Econ. Environ. Geol.
Vol. 28, No. 5, p. 527-534, 1995.

웨이블렛 변환에 의한 파형 해석

김 희 준*

Waveform Analysis Using Wavelet Transform

Hee Joon Kim*

ABSTRACT: A disadvantage of Fourier analysis is that frequency information can only be extracted for the complete duration of a signal $f(t)$. Since the Fourier transform integral extends over all time, from $-\infty$ to $+\infty$, the information it provides arises from an average over the whole length of the signal. If there is a local oscillation representing a particular feature, this will contribute to the calculated Fourier transform $F(\omega)$, but its location on the time axis will be lost. There is no way of knowing whether the value of $F(\omega)$ at a particular ω derives from frequencies present throughout the life of $f(t)$ or during just one or a few selected periods. This disadvantage is overcome in wavelet analysis which provides an alternative way of breaking a signal down into its constituent parts. The main advantage of the wavelet transform over the conventional Fourier transform is that it can not only provide the combined temporal and spectral features of the signal, but can also localize the target information in the time-frequency domain simultaneously. The wavelet transform distinguishes itself from Short Time Fourier Transform for time-frequency analysis in that it has a zoom-in and zoom-out capability.

서 언

웨이블렛(wavelet)이란 원래 작은 파를 뜻하는 말이다. 진동이나 파동을 취급하는 분야에서는 이 말을 국소적인 파형을 나타내는 용어로 오래 전부터 사용해 왔다. 그러나 지금과 같은 일반화된 수학개념으로 웨이블렛이 만들어진 것은 10년 정도 밖에 안된다. 처음에는 지진기록에서 파의 불연속성을 검출할 목적(Morlet *et al.*, 1982a; 1982b)으로 사용된 것이 수학자의 손에 넘어가 적분변환으로서의 정식화가 시도되고, 군(group)의 표현과 관련된 추상적 골격이 만들어졌다. 1980년대 중반에는 적분변환의 이산화(discretization)가 시도되고 매끄러운 웨이블렛에 의한 완전 정규직교기저(orthonormal basis)를 조립하는데 성공하였으며, 이를 계기로 특히 직교웨이블렛(orthogonal wavelet)에 관한 연구가 폭발적으로 늘어났다. 또한 이러한 흐름과 병행하여 이공학의 여러 분야에 대한 응용이 시도되어 지금은 많은 분야의 연구자들에게도 웨이블렛이라는 개념이 알려졌다. 정보압축, 시계열해석, 화상처리, 수치해석 등이 대표적인 응용분야이다.

웨이블렛이라는 개념은 실은 완전히 새로운 것이 아니라 이와 유사한 개념은 많은 분야에서 이미 사용되고 있었다. 예를 들면 전기공학의 sub-band 필터, 시계열해석의 Gabor 변환이나 윈도우후리에변환(windowed Fourier transform), 수학의 Calderon공식이나 무조건기저(unconditional basis)의 이론 등이다. 웨이블렛은 이들 이론이나 개념의 연장선상에 위치하고 있다. 즉 웨이블렛은 수학, 물리학, 공학 등 여러 분야에서 사용되어온 전통적인 기법을 통합하는 위치에 있다. 각 분야에서 이미 어느 정도 기초가 닦여져 있었기 때문에 많은 사람들의 참여가 가능해졌다고 볼 수 있다. 물론 어느 특정분야에서 볼 때에는 지금까지 알고 있었던 것과는 많이 닮기는 하지만 약간 다르다는 것이 웨이블렛에 대한 인상일 것이다. 그래서 응용을 하는 측에서는 웨이블렛의 일반적인 조립 뿐만 아니라 개개의 과제와 관련된 보다 상세하고도 엄밀한 수학적 논의가 요구되는 것이 현실이다.

웨이블렛변환은 원래 지구물리탐사 분야에서 처음으로 시도된 기술이지만(Morlet *et al.*, 1982a, b; Goupillaud *et al.*, 1994), 최근 새로운 기술로서 관심이 높아지고 있다(e.g., Goupillaud, 1992). 그것은 후리에변환이 엄밀하게는 정상신호에 대해서만 정의되는데 비해 웨이블렛변환은 비정상신호에도 적용가능하기 때문이다. 여기서는 웨이블렛을 자료해석의 도구로서 보는 관점에 서서 해설한다.

* 부산수산대학교 응용지질학과 (Department of Applied Geology, National Fisheries University of Pusan, Pusan 608-737, Korea)

시간-주파수 해석

주어진 시계열자료에서 이에 포함된 주기성을 알고 싶을 때 후리에해석을 하게 된다. 많은 경우 FFT(fast Fourier transform) 등으로 자료를 후리에변환시켜서 후리에스펙트럼(Fourier spectrum)을 그려보면 주요 주기가 나타나게 된다. 이러한 주기성의 검출이 가능한 것은 후리에변환의 exp(iωt)라는 적분핵(integral kernel)이 주기함수이기 때문이다. 이 적분핵은 미분작용소(연산자)의 고유해이기도 하기 때문에 후리에변환은 선형미분방정식과도 관계가 깊어서 수치계산의 스펙트럼법(spectral method)의 기초를 제공한다.

후리에변환은 자료에 포함된 유사성(similarity)을 검출할 때도 이용된다. 시계열자료가 자기유사적 구조를 가질 경우 스펙트럼의 형태는 멱함수가 된다. 그리고 물리현상에서는 이 멱지수가 중요한 의미를 가질 때가 많다. 한 예로 발달한 난류 속도장의 후리에스펙트럼이 $-5/3$의 멱지수를 가지는 것은 잘 알려진 사실이다. 이러한 멱법칙은 exp($i\omega t$)의 주기성과는 관계가 없고, 이 적분핵이 서로 닮음의 관계에 있기 때문이며 이것이 자료의 자기유사성을 스펙트럼의 멱법칙이라는 형태로 나타나게 하는 원인이다.

이러한 두 가지 측면이 자료해석의 도구로서 후리에해석의 우수성을 지탱하고 있다. 그러나 후리에해석이 항상 편리한 것만은 아니다. 후리에스펙트럼은 후리에변환의 위상부분을 소거한 양이며, 시각에 관한 정보를 잃어버린 탓으로 스펙트럼과 국소적 현상과의 대응관계를 찾아보기가 어렵다. 예를 들면 시간과 함께 주파수가 단조롭게 증가하는 경우에 스펙트럼만을 보고 주파수 변화의 경향을 판단하는 것은 불가능하다. 또 각 시각에서는 뚜렷한 국소적 유사성을 가진 자료, 즉 어느 특정시각 부근만 보면 명확한 스펙트럼의 멱법칙이 나타나는 경우에서도, 시계열 속에 서로 다른 유사성을 가진 시각이 혼재되어 있으면 스펙트럼의 멱법칙은 뚜렷하게는 나타나지 않을 것이며, 스펙트럼의 형태로 유사성의 특성을 판단하는 것은 거의 불가능하다.

후리에변환이 갖는 이러한 불편함은 적분핵 exp($i\omega t$)가 계속 진동하는 함수임에 기인한다. 그래서 실용적으로는 윈도우함수를 써서 먼저 자료를 국소적 부분으로 한정한 후 후리에변환하는 방법을 채용하게 된다. 이는 핵함수를 윈도우함수에 의해 국소화하는 것에 해당되며 이것으로 얻어지는 국소 스펙트럼을 사용하여 어느 시각의 어느 주파수 성분의 해석, 즉 시간-주파수해석이 이루어지게 된다. 그러나 이러한 방법에는 몇가지 문제가 있다. 첫째, 적분핵의 국소화는 불확정성관계(uncertainty principle)를 통해 주기성 검출의 정도저하를 일으킨다. 둘째, 시간에 관한 분해능이 어느 정도 이상으로는 좋아지지 않는다. 셋째, 핵함수의 유사성이 깨진다. 국소적인 해석에서는 첫번째 문제는 어쩔 수 없지만 나머지 두가지 점은 반드시 필연적이라고 할 수는 없다. 결국 이 방법은 후리에변환을 주기성과 유사성 양쪽을 부분적으로 희생시켜서 국소화한 것으로 볼 수 있다.

이에 비해 후리에변환의 주기성은 희생시키지만 유사성은 엄격히 유지한 채 국소화하는 것이 웨이블렛변환이다. 이러한 특성은 응용대상을 자연히 한정하게 된다. 즉 주파수의 분해능은 그다지 높지 않으므로(상대정도 일정) 주파수해석에는 적합치 않지만, 핵함수의 국소성과 유사성으로 자료의 국소유사성 해석에는 매우 적합하다. 예를 들면 스펙트럼의 멱법칙을 수반한 현상의 해석이나 자료의 각 점마다의 특이성강도(singularity strength)의 검출 등에는 유리한 방법이다. 요약하면 웨이블렛해석이란 후리에해석에서 주기성을 국소성으로 바꾼 도구이다.

이러한 관점에서 보면 웨이블렛해석을 "시간-주파수해석"의 도구로 하기에는 주의를 요한다. 웨이블렛해석은 시계열을 시간과 주파수의 2차원면에 표현하는 방법임에는 틀림없으므로 그러한 뜻에서는 "시간-주파수해석"을 실현할 수 있으며, 주파수 분해능이 나쁜 점을 경시한다면 국소 주파수해석의 도구로서 사용이 가능하다. 그러나 그와 같은 목적이라면 윈도우를 씌워서 통상의 후리에변환을 사용하는 쪽이 더 유리하다. 웨이블렛은 국소주파수의 해석보다는 오히려 국소유사성의 해석에 적합한 도구이며 이러한 뜻에서 후리에해석과는 그 적용영역을 달리하고 있다.

연속 웨이블렛변환

먼저 어떤 함수 $\psi(t)$를 선택하고 이를 해석용 웨이블렛(analyzing wavelet) 또는 mother wavelet이라고 부른다. 이 함수를 두 개의 실변수 a, b로 변형하여 만들어지는 함수

$$\psi^{(a,b)}(t)=\frac{1}{\sqrt{|a|}}\ \psi\left(\frac{t-b}{a}\right),\quad (a,\ b\in R,\ a\neq 0)$$

를 웨이블렛이라고 한다. 이 형태로도 알 수 있듯이 웨이블렛은 원래의 함수 $\psi(t)$를 횡방향과 종방향으로 각각 a와 $1/\sqrt{|a|}$배 확대한 후 횡방향으로 b만큼 평행이동한 것이다. 따라서 웨이블렛은 서로 닮음의 (모든 L^2 노름이 같은) 함수로 되어있다. 후리에변환과 비교하면 a는 주기

(주파수의 역수)의 역할을 하지만 b는 시각의 변수로 후리에변환에는 대응되는 것이 없다. 이 함수계를 이용하여 주어진 함수를 표현하는 것이 웨이블렛변환이며, 변수 a, b가 연속적(연속 웨이블렛변환), 또는 이산적(이산 웨이블렛변환), 그리고 이산적인 경우 웨이블렛이 비직교기저인지 직교기저인지에 따라 모두 세 가지 종류가 있다.

웨이블렛변환은 후리에변환과 달라서 연속변환과 이산변환 사이에는 단순한 이산화 이상의 차이가 있으며, 매우 다른 수학적 구성을 가지고 있다. 연속 웨이블렛변환은 형식적으로는 위의 $\psi^{(a,b)}(t)$를 후리에변환의 $\exp(i\omega t)$와 같이 쓴 것이며 순변환과 역변환(반전공식)은 각각 다음과 같다.

$$T(a, b)= \frac{1}{\sqrt{c_\psi}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi^{(a,b)}(t)^* f(t)\, dt,$$

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{c_\psi}} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} T(a, b)\, \psi^{(a,b)}(t) \frac{dadb}{a^2}$$

여기서 $T(a, b)$은 $f(t)$의 (연속) 웨이블렛변환이라 한다. 단, 이들 쌍이 성립되기 위해서는 $\psi(t)$과 $f(t)$는 모두 $L^2(\boldsymbol{R})$에 속하는 것이 가정된다. 또 $\psi(t)$는 다음의 허용조건(admissibility condition)을 만족해야 한다.

$$c_\psi \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\Psi(\omega)|^2}{|\omega|}\, d\omega < \infty$$

$$\left(\Psi(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\omega t)\, \psi(t)\, dt\right)$$

여기서 c_ψ는 위의 순·역변환의 정의에 나오는 정수이다. 이 조건은 멀리서 충분히 빠르게 감쇠하는 함수, 구체적으로는

$$\int_{-\infty}^{\infty}(1+|t|^\varepsilon)|\psi(t)|dt, \quad (\text{for some } \varepsilon>0)$$

를 만족하는 $\psi(t)$에 대하여는 다음의 간명한 조건과 동일하다.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\psi(t)\, dt=0$$

실제 응용에서는 $\psi(t)$로서 Mexican hat이라고 불리는

$$-\frac{d^2}{dt^2}\left[\exp\left(\frac{-t^2}{2}\right)\right]=(1-t^2)\exp\left(\frac{-t^2}{2}\right)$$

가 잘 이용된다.

연속 웨이블렛변환에서는 후리에해석의 Parseval 관계와 유사한 관계식, 즉 에너지분배의 관계식이 성립한다.

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2\, dt=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|T(a, b)|^2\frac{dadb}{a^2}$$

이것으로 "시각 b에서 주파수 $1/a$의 성분을 가진 에너지(scalogram)"는 $|T(a, b)|^2$이라고 하여 시계열의 특성을 논하는 것도 (불확정성관계의 관점에서 보면 약간 모순된 표현이지만) 일단은 가능하다. 일반적으로 시계열 중의 급격한 변동이 일어나는 시간대에서는 높은 주파수를 기대할 수 있으며, 이러한 예상은 $T(a,b)$ 또는 $|T(a,b)|^2$를 이용하여 어느 정도는 정량적으로 확인할 수 있다 ($T(a,b)$에서 a를 바꾸는 것은 보는 해상도를 바꾸면서 대상을 관찰하는 것에 해당됨). 예를 들면 $|T(a,b)|^2$을 $a-b$ 평면에 조감도 또는 다색으로 표시하여 시계열자료에 포함된 여러가지 현상을 어떤 패턴으로 분류하는 식의 사용법도 있다. 또 원래 1차원의 자료를 2차원면으로 전개함으로써 패턴인식이 쉬워진다는 잇점도 있다.

그러나 이러한 연속변환은 기저함수계인 웨이블렛이 서로 직교하지 않을 뿐더러 1차독립도 아니라는 점에 주의해야 한다. 위의 에너지분배의 관계식은 웨이블렛변환이 $L^2(\mathbf{R})$에서 $L^2(\mathbf{R}; dadb/a^2)$으로의 사상(mapping)임을 나타내고 있지만, 그 상은 실은 후자의 L^2 공간 전체가 아니라

$$T(a,b)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}K(a,\ b;\ a',\ b')\, T(a',\ b')\frac{da'db'}{a'^2}$$

$$K(a,\ b;\ a',\ b')=\int_{-\infty}^{\infty}\psi^{(a,b)}(t)^*\psi^{(a'b')}(t)\, dt$$

를 만족하는 $T(a,b)$에 한정된다(이러한 성질을 이용하여 잡음을 제거하려는 시도도 있음). 만일 $\{\psi^{(a,b)}(t)\}$가 정규직교계이면 $K(a,\ b;\ a',\ b')$는 델타함수가 되어 웨이블렛변환이 전사가 되는 것에 주목하라. 웨이블렛의 1차종속성이 웨이블렛상 $T(a,b)$의 1차종속성을 일으키는 것이다. 바꾸어 말하면 원래 1차원의 자료 $f(t)$를 2차원의 함수로 사상하는 것이므로 필연적으로 중복이 생기고, 이 중복이 1차종속성을 일으키는 것이다. 이는 $T(a,b)$가 나타내는 패턴 속에는 자료 본래의 특징에 기인한 것 외에, 연속 웨이블렛변환 자체에 내재된 자료와는 무관한 패턴이 포함되는 것을 의미한다. 따라서 $T(a,b)$에서 볼 수 있는 패턴을 사용할 때는 이러한 허상(ghost)에 충분한 주의를 기울여야 한다. 또 이 1차종속성은 $|T(a,b)|^2$의 에너지적 해석에도 주의가 필요함을 뜻한다. 실제로 예를 들면

$$f(t)=\psi^{(a_0,b_0)}(t)$$

라고 선택해도 $T(a,b)$의 support는 $(a_0,\ b_0)$의 한 점이 아

니라(위 관계식을 만족하도록) 보다 넓은 것이 된다. 이는 정규직교계의 경우와는 사뭇 다른 상황임을 주의해야 한다.

한편 기저함수의 유사성은 웨이블렛의 가장 중요한 특징이며, 자료에 들어있는 유사적 특징(스케일링에 관한 특성)의 해석은 웨이블렛의 적용분야로서 가장 적합한 것 중의 하나이다. 지금(유계인) 자료 $f(t)$가 $t=t_0$에서 α 위의 헬더연속(Hölder continuous), 즉

$$|f(t_0+h)-f(t_0)|\leq C|h|^{\alpha},\quad (0<\alpha\leq 1,\ C\text{는 정수})$$

이라고 하자. 이 때 $\psi(t)$가 멀리에서 충분히 빠르게 감쇠하고 있으면 $f(t)$의 연속 웨이블렛변환 $T(a,b)$는 지수 α의 값을 민감하게 반영하여

$$|T(a,b)|\leq C'|a|^{1/2}(|a|^{\alpha}+|b|^{\alpha}),\quad (C'\text{는 정수})$$

가 성립한다(Daubechies, 1992). 따라서 α의 값을 검출하기 위하여는 원리적으로는 웨이블렛변환 $T(a,b)$를 만들고, 그 스케일링칙을(예를 들면 log-log 표시하여) 조사하면 된다. 이러한 지수(흔히 특이성강도라고 불림)는 프랙탈(fractal) 집합상의 측도, 난류 속도장 등에서 중요한 물리적 의미를 가지기 때문에 웨이블렛변환의 응용이 많이 시도되고 있다. 단, 점마다 지수가 달라지는 멀티프랙탈측도에서는 $T(a,b)$의 진동이 심해 그 점근형을 찾아내기가 어려운 경우가 있으며, 대상에 따른 해석용 웨이블렛의 최적화 등도 시도된다.

이산 웨이블렛변환

비직교웨이블렛과 프레임

파라메터의 이산화는 웨이블렛 전체의 유사성이 유지되도록

$$\psi_{j,k}(t)=a_0^{j/2}\psi(a_0^j(t-\frac{kb_0}{a_0^j})),\quad (a_0>1,\ b_0>0,\ j,\ k\in Z)$$

와 같이 행해진다. 물론 $\{\psi_{j,k}\}$를 완전기저로 하기 위해서는 $\psi(t)$나 a_0, b_0 등을 적절히 선택해야 한다. 대충 말하면 $\psi(t)$ 및 그 후리에변환 $\Psi(\omega)$가 공히 멀리에서 충분히 빠르게 감쇠할 때는 a_0과 b_0를 잘 선택하면 $\{\psi_{j,k}\}$를 $L^2(\boldsymbol{R})$의 프레임(frame)으로 할 수가 있다. 일반적으로 프레임이란 힐버트공간(Hilbert space) H의 부분집합 $\{\psi_m|m\in M\}$ (M는 첨자집합)에서 어떤 양수 A, B(frame bound)가 존재하고 임의의 원 $f\in H$에 대해

$$A\|f\|^2\leq\sum_{m\in M}|\langle\psi_m,f\rangle|^2\leq B\|f\|^2,$$

($\|\ \|^2$는 노름, $\langle\ \rangle$는 내적)

가 되는 것을 말한다. 예를 들면 앞에서 나온 Mexican hat를 적당히 이산화하면 $L^2(\boldsymbol{R})$의 프레임이 얻어진다. 프레임에는 이중프레임(dual frame)이라고 불리는 집합 $\{\tilde{\psi}_m|m\in M\}$이 수반되어 임의의 원 f에 대하여

$$f=\sum_{m\in M}\langle\psi_m,f\rangle\ \tilde{\psi}_m$$

가 되는 것, 또 특히 $A=B$일 경우에는 $\tilde{\psi}_m=\psi_m$가 되는 것(이 경우를 tight frame이라고 함) 등이 알려져 있다.

완전 정규직교 웨이블렛

가장 간단한 완전 정규직교 웨이블렛(이하 직교웨이블렛)은 Haar 기저라는 이름으로 이전부터 알려진 불연속 함수계에서

$$\psi(t)=\begin{cases}1 & (0\leq t<1/2\\ -1 & (1/2\leq t<1)\\ 0 & (\text{otherwise})\end{cases}$$

및 $a_0=2$, $b_0=1$로서 얻어진다. 그러나 보다 더 연속성이 좋은 것은 80년대에 Stromberg와 Meyer에 의해 독립적으로 구성되고, 그 후 Mallat 등에 의해 다음의 다중해상도해석(multiresolution analysis)이라고 불리는 일반적 외관이 정비되었다.

［정의］ $L^2(\mathbf{R})$의 폐부분공간렬 $\{V_j|j\in Z\}$과 함수 $\phi(t)$의 쌍으로서 다음의 5가지 조건을 만족하는 것.

1. (단조성) $V_j\subset V_{j+1}$ $(j\in Z)$
2. (조밀성) $\overline{\bigcup_{j\in Z}V_j}=L^2(\boldsymbol{R})$
3. (분리성) $\bigcap_{j\in Z}V_j=\{0\}$
4. (스케일링성) $f(t)\in V_j\longleftrightarrow f(2^{-j}t)\in V_0$
5. (정규직교성) $\{\phi(t-k)|k\in Z\}$는 V_0의 정규직교기조

여기서 V_j는 직교웨이블렛 중 스케일변수가 j 이하인 것으로 만들어지는 공간에 대응한다. 또 $\phi(t)$는 해석용 웨이블렛(or mother wavelet) $\psi(t)$를 만들어내는 함수로서 스케일링함수(or father wavelet)라고 불린다. 이 스케일링함수에서 만들어지는 함수계

$$\{\psi_{j,k}(t)=2^{j/2}\psi(2^jt-k)|\ j,\ k\in Z\}$$

는 V_j의 정규직교기조가 된다.

각 V_j는 V_{j+1}의 부분공간이므로 그 직교보공간, 즉

$$V_j \oplus W_j = V_{j+1}, \quad V_j \perp W_j$$

가 되는 W_j를 선택할 수 있다. 이 때 W_j에 대해서는 직합의 조밀성, 즉

$$\overline{\bigoplus_{j \in Z} W_j} = L^2(\boldsymbol{R})$$

가 성립한다. 그래서 $\{\psi(t-k) | k \in Z\}$가 W_0의 정규직교기조가 되는 함수 $\psi(t)$를 찾으면 이것이 바로 해석용 웨이블렛이 된다. 이러한 $\psi(t)$는 $\phi(t)$에서부터 쉽게 조립할 수 있다($\psi(t)$는 유일하지 않음). 결국 다중해상도해석만 얻을 수 있으면 그 다음은 자동적으로 직교웨이블렛이 구성되는 셈이다.

웨이블렛을 사용하는 입장에서는 실·후리에 양공간에서 동시에 가능한한 국재(localize)되는 것이 바람직하다. 그러나 그것은 불확정성관계 때문에 한계가 있으며, 또 양공간에서 동시에 support compact가 되는 것은 불가능하다. 또 한편으로는 웨이블렛은 연속성(미분가능성)이 좋을 수록 전개가 빨리 수렴하므로 보다 더 매끄러운 것이 바람직하다. 그러나 1) (실공간의) 멀리에서 지수함수적으로 감쇠하고, 2) 무한회 미분가능하고, 3) 모든 도함수가 유계인 직교웨이블렛은 존재하지 않는다는 부정적 정리도 있기 때문에 보통은 1) 또는 2), 아니면 양쪽을 완화하는 방법을 선택한다.

지금은 몇 가지의 다중해상도해석과 이에 수반된 직교웨이블렛이 알려져 있지만, 실공간과 후리에공간에서 국재의 정도로 분류하면 다음의 두 가지가 대조적이다.

1) Daubechies의 웨이블렛(실공간에서 support compact)

$$\psi(t) \in c^{\lambda(N)}(\boldsymbol{R}), \quad \lambda(N) \simeq 0.3485N$$

$$\text{supp } \psi(t) \subset [1-N, N], \quad \text{for large } N$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t)\, t^m\, dt = 0, \quad \text{for } 0 \leq m \leq N-1$$

2) Meyer의 웨이블렛(후리에공간에서 support compact)

$$\psi(t) \in C^{\infty}(\boldsymbol{R})$$

$$\text{supp } \Psi(\omega) \subset \left[-\frac{8\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}\right]$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t)\, t^m\, dt = 0, \quad \text{for } 0 \leq m < \infty$$

Daubechies의 웨이블렛은 실공간에서 support compact라는 뚜렷한 특성을 가지지만(Fig. 1), 웨이블렛의 미분가능회수가 증가되면 support가 커지고 함수형태는 좌우비대칭이다. Meyer의 웨이블렛은 후리에공간에서 support compact이기 때문에 실공간에서는 무한으로 진동하고 있으며(멀리에서의 감쇠는 어떤 멱함수보다 빠르지만 지수함수적이지는 않음, Fig. 2), 무한회 미분가능한 함수로 형태는 좌우대칭(중심은 1/2)이다.

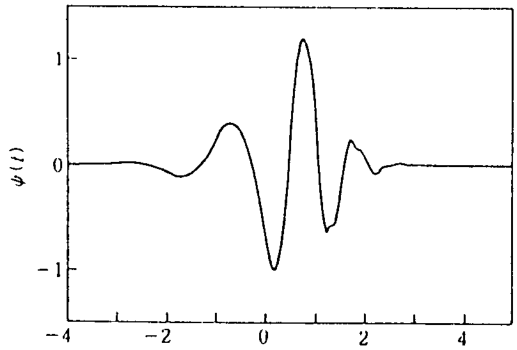

Fig. 1. Daubechies' orthogonal wavlet (N=5).

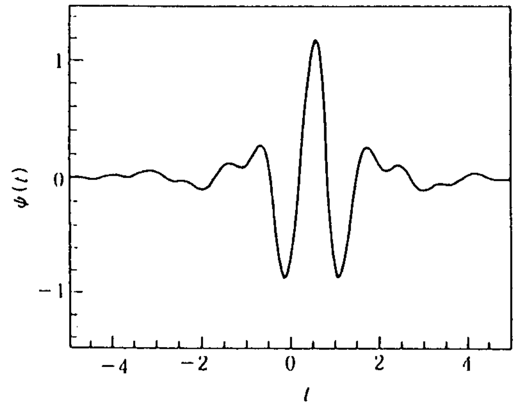

Fig. 2. Meyer's orthogonal wavelet.

직교웨이블렛은 전개의 수렴성에 있어서 잇점을 가진다. 후리에해석에서는 기본이 되는 함수가 $\exp(i\omega t)$라는 계속 진동하는 함수이기 때문에 자료 $f(t)$의 어느 한 점이라도 연속성이 나쁘면 전개 전체의 수렴성이 나빠지는데 반해 직교웨이블렛에 의한 표현은 어느 점에서의 함수 값을 표현하는데 필요한 항수는 기저함수가 국소화되어 있기 때문에 다른 점의 불연속성에 그다지 영향을 받지 않는다. 따라서 각 점마다 필요한 항수를 준비하면 된다. 이 잇점은 화상이나 음성자료의 압축기술 등에서 이용된다.

직교웨이블렛은 자료의 국소적인 유사성 검출에도 이용할 수 있다. 예를 들어 해석용 웨이블렛이 적당한 매끄러움과 빠른 감쇠를 가질 때 자료 $f(t)$ ($L^1(\boldsymbol{R})$이면 됨)가 $t=t_0$에서 α 위의 헬더연속이면 직교웨이블렛의 전개계수 $\alpha_{j,k}$는

$$|\alpha_{j,k}| \leq C2^{\,j(\alpha+1/2)}\,(1+|2^j t_0-k|^{\alpha}),\quad (C\text{는 정수})$$

가 되는 것이 증명되어 있다(Daubechies, 1992). 이 특성은 전개계수 $\alpha_{j,k}$가 $f(t)$의 차분 $f(t_0+h)-f(t_0)$과 밀접하게 관계되는 것을 의미하고 있으며, 멀티프랙탈측도의 해석 등에 응용할 수 있음을 시사한다.

자료해석의 관점에서 볼 때 직교웨이블렛의 가장 큰 장점은 기저가 완전 정규직교계를 이루기 때문에 자료 $f(t)$의 웨이블렛계수 $\alpha_{j,k}$가 서로 독립이 되는 점이다. 즉 웨이블렛계수가 나타내는 내용은 모두 $f(t)$에 기인하는 것이며 연속 웨이블렛변환의 경우처럼 허상을 염려할 필요가 없다. 또 직교웨이블렛에서는 전개계수와 후리에스펙트럼 사이에 긴밀한 관계가 있다. 예를 들어 Meyer의 웨이블렛의 경우 $\alpha_{j,k}$와 후리에스펙트럼

$$E(\omega)\equiv\frac{1}{2\pi}|F(\omega)|^2$$

사이에는 적당한 조건하에서

$$E(\omega)\sim\omega^{-p}\longleftrightarrow E_j\equiv\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\alpha_{j,k}|^2\sim 2^{-(p-1)j}$$

가 성립한다. 이 관계는 직교웨이블렛에 의한 해석결과를 종래의 후리에해석 결과와 관련시켜서 논할 수 있는 근거를 마련하는 것이다. 단, 이 관계는 후리에스펙트럼의 값에 관한 것이 아니라 그 멱지수에 관한 점이라는데에 주의해야 한다. 이는 웨이블렛이 주파수해석보다 유사성해석에 더 적합함을 보여준다.

서로 다른 현상이 혼재된 시계열을 생각해 보자. 예를 들면 A, B 두 가지 현상이 각각 서로 다른 멱칙의 후리에스펙트럼을 가진다고 하자. 시계열 중에 A, B 중 어느 한쪽 밖에 없으면 명확한 멱칙이 얻어지지만 A와 B가 혼재되어 있으면 후리에스펙트럼은 뚜렷한 멱칙을 보여주지 않을 것이다. 이러한 혼재현상에서도 시계열을 시간과 주파수의 (2차원) 평면상으로 전개하면 각각의 현상으로 분리할 수 있는 경우가 있다. 이 작업은 자료를 직교웨이블렛으로 전개하여 웨이블렛계수 $\alpha_{j,k}$를 A, B 두 개의 그룹으로 나누는 것에 해당된다. 이러한 분리가 가능한 경우에는 주어진 시계열 속에 A와 B의 현상이 어느 정도의 비율로 포함되는가, 또 에너지는 이들 현상에 어떻게 분할되는가 등을 논의할 수 있다. 또 여기서 A를 신호, B를 잡음이라고 하면, A와 B의 분리는 자료에서 잡음을 제거하는 일과 다름이 없다. 단, 이러한 작업은 연속 웨이블렛변환에서는 어렵다는 점을 주의해야 한다. 연속 웨이블렛변환에서 $T(a,b)$를 어떤 방법으로 $T_A(a,b)$와 $T_B(a,b)$로 분리해도 (연속 웨이블렛변환이 전사가 아니기 때문에) 이들 각각의 함수에 대응하는 자료의 존재가 반드시 보장되지는 않다.

여기서는 정규직교 및 support compact인 웨이블렛함수에 대해서 주로 설명하였다. 이러한 웨이블렛은 많은 장점을 가지고 있으나, 유한충격응답(finite impluse response)이 아닐 뿐만 아니라 위상이 선형이 아닌 점에 주의해야 한다. 이러한 점은 계속해서 자료처리가 이어지는 경우, 예를 들면 지진탐사의 자료처리 등에서는 바람직하지 않다. 위상왜곡 문제를 피하기 위해서는 앞에서 소개한 비직교웨이블렛을 쓸 수 밖에 없다.

결 언

웨이블렛해석은 시계열을 시간과 주파수의 2차원면에서 해석하는 것을 가능케 하였다. 원래 이러한 "공역"인 변수의 조를 동시에 취급하는 것은 불확정성관계로 제약이 있을 뿐만 아니라 1차종속성의 문제가 있어 쉽지 않았다. 직교웨이블렛은 이러한 문제에 대한 하나의 해결법을 제공하였으며 시간-주파수 공간에서 자료를 자유롭게 취급할 수 있게 하였다. 단, 이러한 과정에서 주파수공간을 대수적으로 등간격으로 분할하였기 때문에 주파수 분해능은 별로 좋지 않으며, 오히려 국소 유사성해석에 적합한 형태로 정식화되어 있다. 확률과정이나 확률장 등의 해석법으로서 정비가 진행되면 응용범위는 훨씬 넓어질 것이다. 어쨌든 웨이블렛해석은 후리에해석과는 다른 적용영역을 가진 도구이며 후리에스펙트럼과 같은 routine한 사용법은 아직 확립되어 있지 않다. 당분간은 사용자의 창의적 노력이 필요할 것이다.

웨이블렛변환에 관한 교과서는 대부분 수학적 엄밀성을 추구하는 나머지 처음 시작하는 사람에게는 조금 어렵다 (Chui, 1992; Koornwinder, 1993; Young, 1993; Benedetto and Frazier, 1994). 그 중에서도 주로 정규직교 이산적 웨이블렛변환을 비록 적은 분량으로 취급한 것이지만, Press *et al.*(1992) 및 Newland(1993)는 그 내용이 쉬울 뿐만 아니라 컴퓨터 프로그램이 소개되어 있어서 많이 도움이 될 것이다.

사 사

본 연구는 한국과학재단 및 전략광물자원 연구센터의 지원을 받았다. 이 글을 쓰는데 있어 많은 조언을 해주신 공영세 교수님과 강용균 교수님께 감사드립니다.

참고문헌

Benedetto, J. J., and Frazier, M. V. (1994) Wavelets: Mathematics and Applications, CRC Press, 575p.

Chui, C. K. (1992) An Introduction to Wavelets, Academic Press, 266p.

Daubechies, I. (1992) Ten Lectures on Wavelets, CBMS-NSF Reg. Conf. Ser. Appl. Math, v. 61, Soc. Ind. Appl. Math., Philadelphia.

Goupillaud, P. L. (1992) Three new mathematical developments on the geophysical exploration horizon. Leading Edge, v. 11, p. 40-42.

Goupillaud, P. L., Grossmann, A. and Morlet, J. (1994) Cycle-octave and related transforms in seismic signal analysis. Geoexploration, v. 23, p. 85-102.

Koornwinder, T. H. (1993) Wavelets: An Elementary Treatment of Theory and Applications, World Scientific Pub., 225 p.

Morlet, J., Arens, G., Fourgeau, E., and Giard, D. (1982a) Wave propagation and sampling theory—Part I: Complex signal and scattering in multilayered media. Geophysics, v. 47, p. 203-221.

Morlet, J., Arens, G., Fourgeau, E., and Giard, D. (1982b) Wave propagation and sampling theory—Part II: Sampling theory and complex waves. Geophysics, v. 47, p. 222-236.

Newland, D. E. (1993) An Introduction to Random Vibrations, Spectral & Wavelet Analysis, 3rd ed., Longman Sci. & Tech., 477p.

Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T. and Flannery, B. P. (1992) Numerical Recipes in Fortran. 2nd (ed.), Cambridge Univ. Press, 963p.

Young, R. K. (1993) Wavelet Theory and Its Applications, Kluwer Academic Pub., 223p.

1995년 8월 2일 원고접수