

〈論 文〉

비축대칭 형상을 가진 제품의 최종단계 평금형 압출에 관한 상계해석

김동권* · 배원병** · 김영호**

(1995년 9월 20일 접수)

An Upper Bound Analysis of the Final-Stage Square Die Extrusion of the Non-Axisymmetric Bars

Dong Kwon Kim, Won Byong Bae and Young Ho Kim

Abstract

A simple kinematically admissible velocity field is proposed to determine the final-stage extrusion load and the average extruded length in the square-die forward extrusion of non-axisymmetric bars from circular billets. The proposed velocity field is applied to the square-die extrusion of trochoidal gear-shaped bars and rectangular-shaped bars. The profile function of a rectangle is approximated by using a Fourier series. Experiments have been carried out with hard solder billets at room temperature. The theoretical predictions of the extrusion load are in good agreements with the experimental results and there is generally reasonable agreements in average extruded length between theory and experiment.

Key Words : Square Die Extrusion, Kinematically Admissible Velocity Field, Non-Axisymmetric, Fourier Series

1. 서 론

평금형을 이용한 전방압출은 제품의 품질이 우수하고 생산성이 높으며 또한 생산단가가 낮은 등의 여러가지 장점이 있으므로 복잡한 형상을 가진 제품의 제조시에 많이 이용되고 있다.⁽¹⁾ 복잡한 형상의 제품을 평금형 압출하는 동안에 소재의 단면을 따라

서 형성되어지는 유동은 균일하지 않다.

적절한 금형설계와 공정제어를 위해서는 압출하중과 소재유동을 효과적으로 예측할 수 있는 방법에 대한 체계적인 연구가 필요하다. 현재 평금형 전방압출 공정에 대한 연구들^(2~4)은 대부분 초기단계의 2차원 평금형 압출에 관한 연구인데 적절한 공정설계를 위해서는 최종단계의 비정상상태의 해석이 중요하지만, 비축대칭 형상의 최종단계의 해석은 거의 없는 실정이다. 따라서, 일반화된 형상의 최종단계에서의 속도장을 개

*한국중공업 기술연구소

**부산대학교 정밀정형 및 금형가공연구소

발할 필요성이 있는데, 본 연구에서는 이를 위하여 비축대칭 형상을 가진 제품의 평균형 압출시에 적용할 수 있는 최종단계의 동적가용속도장을 제시하였다. 제시된 속도장을 직사각형 봉제품과 트로코이드기어 봉제품에 적용하여 압출하중과 압출된 재료의 평균길이를 단면감소율, 형상비, 대칭축의 수 등에 대해서 이론해석을 하고 그 이론의 타당성을 검증하기 위해 경납의 실험결과와 비교 검토하였다.

2. 동적 가용속도장의 유도

원형 소재로부터 비축대칭 형상을 가진 봉제품이 3차원 평균형 전방압출된 후의 형상을 Fig. 1에 나타낸다. 그림에 있는 것처럼 원점이 원형 소재의 밀면의 중심에 놓이고, 기하학적 대칭축에 $\theta=0$ 축이 놓이는 원통좌표계가 사용되었다. 전체 영역을 3개의 요소로 나눈 후, 요소 I 과 II 는 소성 변형 중에 있고, 요소 III 은 변형이 끝난 준-강체(pseudo-rigid body)로 가정한다.⁽⁵⁾ 재료는 등방성, 비압축성이고 강-소성체이며 Von Mises의 유동법칙을 따른다고 가정

한다.

2.1 요소 I

속도경계조건을 만족시키기 위하여 축방향 속도성분 U_z 와 접선방향 속도성분 U_θ 를 다음과 같이 가정한다.

$$U_z = -\frac{U_o}{T}Z \quad (1)$$

$$U_\theta = -\frac{U_o}{T}A(R_o - R)^p \omega_1(\theta) \quad (2)$$

여기서, A , p 는 반경방향 속도의 크기를 결정하고, $\omega_1(\theta)$ 는 평균형 압출되는 동안에 보다 실제적인 소재유동을 보장하기 위하여 속도경계조건을 만족시켜야 하는 함수이다.

반경방향의 속도경계조건

$$R = R_o \text{에서 } U_R = 0 \quad (3)$$

와 비압축성조건

$$\frac{\partial U_R}{\partial R} + \frac{U_R}{R} + \frac{1}{R} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial U_z}{\partial Z} = 0 \quad (4)$$

을 적용하면 결국 요소 I에서의 속도장은 다음과 같다.

$$U_R = -\frac{U_o A}{TR} \frac{(R_o - R)^{p+1}}{(p+1)} \frac{d\omega_1}{d\theta} + \frac{u_o(R^2 - R_o^2)}{2TR} \quad (5a)$$

$$U_\theta = -\frac{U_o}{T} A (R_o - R)^p \omega_1(\theta) \quad (5b)$$

$$U_z = -\frac{U_o}{T} Z \quad (5c)$$

이제 속도장을 만족시키는 함수 $\omega_1(\theta)$ 를 결정하기 위하여 $R_i(\theta)$ 를 다이의 횡단면을 나타내는 함수라고 하면 $\omega_1(\theta)$ 는 아래와 같이 일반적인 형태로 표현될 수 있다.⁽⁶⁾

$$\omega_1(\theta) = R^q(\theta) \left[\sum_{i=1}^M \{B_i \sin(iN\theta) + C_i \cos(iN\theta)\} \right] \quad (6)$$

여기서, N 은 대칭축의 수, q 는 반경방향 속도의 크기를 결정하고, B_i 와 C_i 는 접선방향 속도의 퍼짐량을 결정하는 데 필요한

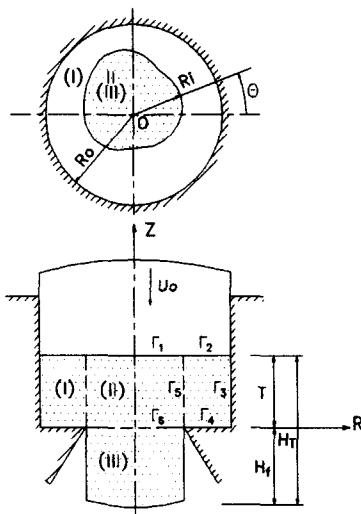


Fig. 1 A general scheme for the deformation model

최적화 변수이다.

R, θ 방향에서의 속도경계조건은 다음과 같다.

(i) 대칭축이 있는 경우(즉, N 이 양의 정수)

$$\theta=0 \text{ 에서 } U_\theta=0 \quad (7)$$

$$\theta=\alpha \text{ 에서 } U_\theta=0 \quad (8)$$

$$\theta=0 \text{ 에서 } U_R=(U_R)_0 \quad (9)$$

$$\theta=\alpha \text{ 에서 } U_R=(U_R)_\alpha \quad (10)$$

위의 경계조건을 (5b)와 (6)식에 적용하면 최적화변수 $C_i=0$ 임을 알 수 있다. 대칭축 가운데 하나를 $\theta=0$ 선에 일치시키면 결국 $\omega_1(\theta)$ 는 아래와 같은 형태로 표현할 수 있다.

$$\omega_1(\theta) = R^q(\theta) \left[\sum_{i=1}^M \{B_i \sin(iN\theta)\} \right] \quad (11)$$

(ii) 대칭축이 없는 경우에는 $N=1$ 로 잡으면 $\omega_1(\theta)$ 는 다음과 같다.

$$\omega_1(\theta) = R^q(\theta) \left[\sum_{i=1}^M \{B_i \sin(i\theta) + C_i \cos(i\theta)\} \right] \quad (12)$$

이와 같이, $\omega_1(\theta)$ 는 기하학적인 대칭축의 유무에 따라서 선택해야 한다.

한편, 다이의 형상함수를 나타내는 $R_i(\theta)$ 는 Fourier 계수를 사용한 유한개의 항들에 의하여 아래와 같은 일반적인 형태로 근사화할 수 있다.^(6,7)

$$R_i(\theta) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{A_n \cos(N\theta) + B_n \sin(N\theta)\}, \quad 0 < \theta < 2\pi \quad (13)$$

여기서, Fourier 계수 A_0, A_n, B_n 은 다음과 같다.

$$A_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} t(\theta) d\theta \quad (14a)$$

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} t(\theta) \cos(n\theta) d\theta \quad (14b)$$

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} t(\theta) \sin(n\theta) d\theta \quad (14c)$$

여기서, n 은 Fourier 급수의 항의 수, $t(\theta)$ 는 원형 소재의 중심으로부터 다이의 윤곽까지의 반경방향 거리로 표시되는 데이터점(data point)을 나타낸다.

내부단면의 대칭성을 고려하면 $R_i(\theta)$ 는 짝함수(even function)이므로 다음과 같이 표현된다.

$$R_i(\theta) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \{A_k \cos(kN\theta)\}, \quad 0 < \theta < 2\pi \quad (15)$$

여기서, Fourier 계수 A_k 는 다음과 같다.

$$A_k = \frac{N}{\pi} \int_0^{2\pi/N} t(\theta) \cos(kN\theta) d\theta \quad (16)$$

2.2 요소 II

$V_b(\theta)$ 는 Fig. 2에서 보는 바와 같이 요소 I과 II 사이의 전단경계면 상의 한 점에서의 수직속도를 나타낸다.

$$V_b(\theta) = (U_{Ri} \cos \beta - U_{\theta i} \sin \beta)_{R=R_i} \quad (17)$$

$$\beta = D(\theta^2 - \frac{\pi}{N}\theta) \quad (18)$$

여기서, D 는 최적화 변수이다.

요소 II에서의 속도경계조건은 다음과 같다.

$$R=R_i \text{ 에서 } U_{Rn} = V_b \cos \beta \quad (19)$$

$$R=R_i \text{ 에서 } U_{\theta n} = -V_b \sin \beta \quad (20)$$

$$R=0 \text{ 에서 } U_{Rn} = 0 \quad (21)$$

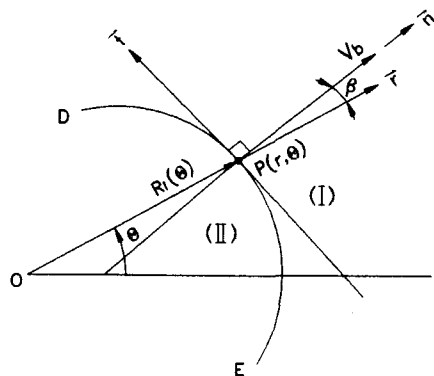


Fig. 2 Shear boundary between element I and element II

위 경계조건을 만족하는 반경방향 속도성분 U_R 과 접선방향 속도성분 U_θ 를 다음과 같이 가정한다.

$$U_R = E \frac{(R_i - R)}{R_i} \frac{R}{R_i} \frac{d\omega_2}{d\theta} + V_b \cos \beta \frac{R}{R_i} \quad (22)$$

$$U_\theta = F \frac{(R_i - R)}{R_i} \frac{R}{R_i} \omega_2(\theta) - V_b \sin \beta \frac{R}{R_i} \quad (23)$$

여기서, $\omega_2(\theta)$ 도 요소 I 에서의 $\omega_1(\theta)$ 과 같은 형태로 표현할 수 있다.

$$\omega_2(\theta) = R_i^r(\theta) \left[\sum_{i=1}^M \{G_i \sin(iN\theta) + H_i \cos(iN\theta)\} \right] \quad (24)$$

여기서, r , G_i , H_i 는 최적화변수이다.

식 (22) 와 (23) 을 식 (4) 에 대입하여 적분하고 축방향의 속도경계조건

$$Z = T \text{ 에서 } U_z = -U_\theta \quad (25)$$

를 적용하면 결국 요소 II 에서의 속도장은 다음과 같다.

$$U_R = E \frac{(R_i - R)}{R_i} \frac{R}{R_i} \frac{d\omega_2}{d\theta} + V_b \cos \beta \frac{R}{R_i} \quad (26a)$$

$$U_\theta = F \frac{(R_i - R)}{R_i} \frac{R}{R_i} \omega_2(\theta) - V_b \sin \beta \frac{R}{R_i} \quad (26b)$$

$$U_z = (\dot{\epsilon}_R + \dot{\epsilon}_\theta) (T - Z) - U_\theta \quad (26c)$$

(5) 식과 (26) 식은 비압축성조건과 속도경계조건을 만족함을 쉽게 알 수 있다. 따라서, (5) 식과 (26) 식으로 주어지는 속도장은 동적가용속도장이며 원형 소재로부터 비축대칭 형상을 가진 봉제품의 평균형 압출에 대한 상계해석에 사용할 수 있다.

유도된 수식들을 원형 소재로부터 비축대칭 형상의 봉제품의 3차원 평균형 압출 문

제에 적용할 수 있지만, 제시된 속도장의 타당성을 살펴보기 위해서 트로코이드기어 모양의 봉제품과 직사각형 모양의 봉제품의 평균형 압출의 경우를 계산예로서 선택하였다.

트로코이드기어 제품의 형상함수는 아래와 같다.

$$R_i(\theta) = \frac{1}{2} \{ (a + b) - (a - b) \cos(N\theta) \} \quad (27)$$

여기서, a 와 b 는 트로코이드기어 형상의 장반경과 단반경이다. 그리고, 내부의 모양이 직사각형인 다이의 형상함수는 Fourier 급수를 사용하여 근사화하였다.

3. 실험

경남의 응력-변형률속도 관계식을 얻기 위하여 열간압축용 시험기인 Greeble 5000 에서 압축시험을 행하여 다음과 같은 응력-변형률속도 관계식을 얻었다.

$$\bar{\sigma} = 73.063 \dot{\epsilon}^{0.0293} \text{ (MPa)} \quad (28)$$

그리고, 무운활시의 마찰상수를 측정하기 위하여 링압축시험을 수행하여 0.28의 마찰상수값을 얻었다.

직사각형과 트로코이드기어의 형상과 각각의 경우에 있어서 단면감소율, 형상비, 대칭축의 수의 영향을 파악하기 위해서 다이를 제작하여 이를 교체해 가면서 실험할 수 있도록 제작하였다.

압출실험은 제작된 다이 세트를 설치한 SHIMATZU UH-100A Universal Testing Machine에서 수행하였다. 본 실험에서는 GPIB Interface를 이용하여 PC에서 실험중의 행정과 하중을 자동으로 제어하게 하였다.

Fig. 3 은 트로코이드기어 모양과 직사각형 모양의 평균형 압출시에 단면감소율, 형상비 및 대칭축의 수의 변화에 따른 압출

| | | | | | | | | |
|--------------|----|----|----|----|----|----|----|----|
| N = | 2 | 2 | 8 | 8 | 8 | 8 | 4 | 6 |
| R.A = (%) | 40 | 50 | 20 | 30 | 40 | 50 | 50 | 50 |

Fig. 3 The extruded trochoidal gear and rectangular bars for various process conditions

후의 제품의 형상을 보여주고 있다.

4. 결과 및 고찰

이론 해석에 의한 결과식을 직접 계산할 수 없으므로 수치계산법을 이용하여 계산하였다. 변형 중 각 단계에서의 전체 에너지 소비율(total power consumption rate)을 주어진 매개변수에 대하여 최소화시켰다. 최소화 방법으로는 직접탐색법(direct search method)의 일종인 FPS법(flexible polyhedron search method)⁽⁸⁾을 이용하였다. 그리고, 저자들의 이전 논문⁽⁹⁾에서 언급한 이유로 본 해석에서는 높이감소율이 80% 일 때를 최종단계로 보고 해석을 수행하여 실험결과와 비교하였다.

4.1 압출하중

압출하중의 계산결과를 Fig. 4~Fig. 7에 나타낸다.

(1) 트로코이드기어 제품

Fig. 4는 압출하중에 대한 단면감소율의 영향을 보여준다. 주어진 형상비와 마찰상수의 조건에서 압출하중은 단면감소율이 증가할수록 증가함을 알 수 있다. 본 연구에서 제시된 방법과 실험결과가 비교되어 있는데, 이론에 의한 예상과 실험결과가 잘 일치하고 있다. Fig. 5는 압출하중에 대한 대칭축의 수의 영향을 보여준다. 정해진 마

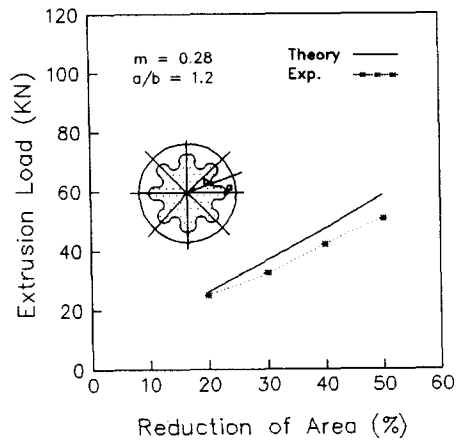


Fig. 4 Comparison between theoretical and experimental extrusion loads of trochoidal gear-shaped bars for various area reductions (R.A)

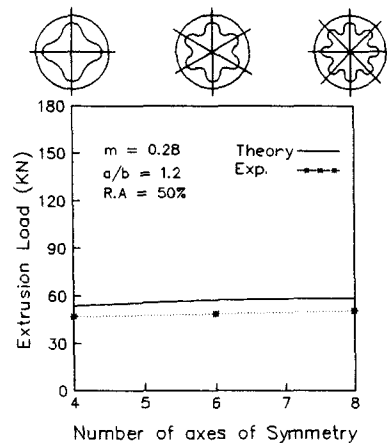


Fig. 5 Comparison between theoretical and experimental extrusion loads of trochoidal gear-shaped bars for various number of axes of symmetry (N)

찰상수, 형상비, 단면감소율의 조건에서 대칭축의 수가 증가할수록 소재내부의 유동이 복잡해져 압출하중이 미세하지만 조금씩 증가하게 된다. 대칭축의 수에 관한 이론적 결과도 실험치와 잘 일치한다.

(2) 직사각형 제품

Fig. 6은 압출하중에 대한 단면감소율의 영향을 보여준다. 주어진 형상비와 마찰상의 조건에서 압출하중은 단면감소율이 증가할수록 증가함을 알 수 있다. 이론치와 실험결과가 잘 일치하고 있다. Fig. 7은 압출하중에 대한 형상비의 영향을 보여준다. 주어진 마찰상수와 단면감소율에서 형상비가 증가할수록 하중이 증가하고 있음을 보여준다. 이것은 형상비가 증가할수록 단면감소율이 커지는 효과가 생기는 유동이 많아져 그에 따른 유동이 복잡해지기 때문으로 생각된다.

4.2 평균압출길이

압출된 재료의 평균압출길이를 Fig. 8 ~ Fig. 11에 나타낸다.

(1) 트로코이드기어 제품

Fig. 8은 평균압출길이에 대한 단면감소율의 영향이 보여진다. 주어진 마찰상수, 형상비의 조건에서 단면감소율이 증가할수록

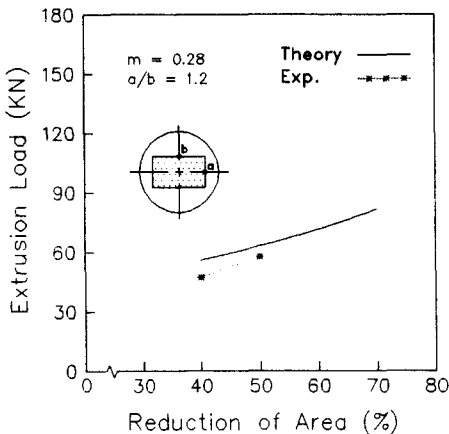


Fig. 6 Comparison between theoretical and experimental extrusion loads of rectangular-shaped bars for various area reductions (R.A)

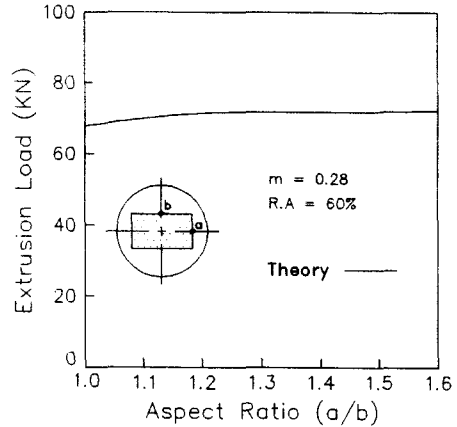


Fig. 7 Theoretical extrusion loads of rectangular-shaped bars for various aspect ratios

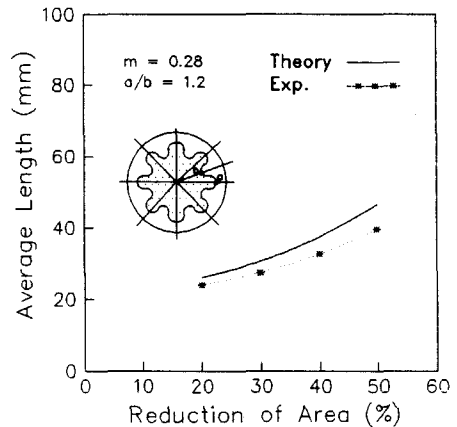


Fig. 8 Comparison between theoretical and experimental average lengths of trochoidal gear-shaped bars for various area reductions (R.A)

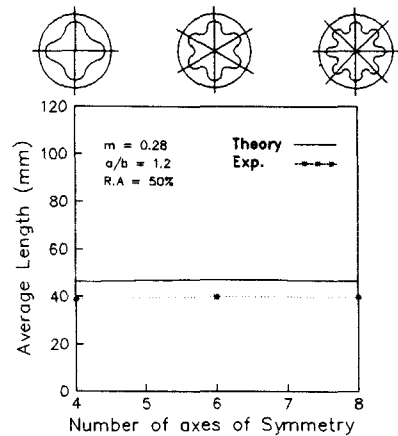


Fig. 9 Comparison between theoretical and experimental average lengths of trochoidal gear shaped bars for the number of axes of symmetry (N)

록 평균압출길이는 증가한다. 이론과 실험 결과가 잘 일치하고 있다. 대칭축의 수에 따른 평균압출길이 변화를 Fig. 9에 나타낸다. 평균압출길이는 대칭축의 수에는 크게 영향을 받지 않는 것을 보여준다. 이는 실험치와 잘 일치하고 있다.

(2) 직사각형 제품

Fig. 10은 단면감소율에 따른 직사각형 제품의 평균압출길이의 변화를 나타내고 있다. 평균압출길이는 단면감소율의 증가와 함께 커지고 있으며, 이 경향은 실험치와 잘 일치하고 있다. 형상비에 따른 평균압출

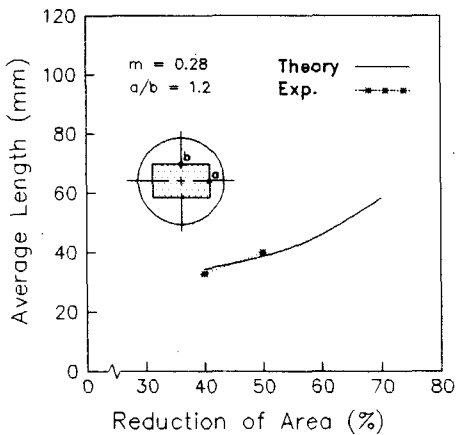


Fig. 10 Comparison between theoretical and experimental average lengths of rectangular-shaped bars for various area reductions (R.A)

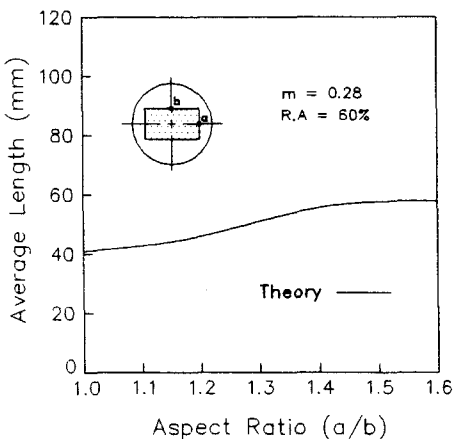


Fig. 11 Theoretical average lengths of rectangular-shaped bars for various aspect ratios

길이의 변화를 Fig. 11에 나타내고 있다. 평균압출길이는 형상비에 따라 상당히 증가하고 있지만 실제로는 차이가 거의 나타나지 않을 것으로 예측된다. 이는 실제유동을 단순한 속도장으로 표현하는 데 원인이 있는 것으로 생각되며 이에 대한 개선이 요청된다.

5. 결 론

평금형을 이용하여 원형 소재에서 비축대칭 형상을 가진 봉제품의 전방압출 공정을 해석하기 위한 단순화된 동적가용속도장을 제시하였다. 제시된 속도장으로부터 주어진 독립변수에 대하여 전에너지 소비율(total power consumption rate)을 최소화시킴으로써 압출하중, 평균압출길이를 구하였다.

이론의 타당성을 검토하기 위해 트로코이드기어 형상과 직사각형 모양에 대해 해석하고, 경납을 소재로 상온에서 실험을 수행하였다. 여러종류의 단면감소율, 대칭축의 수와 형상비에 대한 압출하중의 이론치와 실험치가 잘 일치하였다. 그런데, 평균압출길이에 있어서는 전반적으로는 그 경향이 잘 일치하지만 직사각형 제품의 경우에 있어서는 예측을 완전하게 하지 못해 이에 대한 개선이 요청된다.

따라서, 본 논문에서 제시된 속도장은 원형에서 비축대칭 형상을 가진 봉제품의 평금형 압출공정에서 압출하중 및 압출된 제품의 형상을 예측하는 데 간편하게 사용할 수 있다.

참고문헌

- (1) Lange, 1985, Handbook of Metal Forming, pp. 16.1-16.66, McGraw-Hill, New York.
- (2) Kudo, H. 1960, "An Upper-Bound Approach to Plane-Strain Forging and

- Extrusion-II," Int. J. Mech. Sci., Vol. 1, pp. 229~252.
- (3) Halling, J. and Mitchell, L. A., 1965, "An Upper-Bound Solution for Axisymmetric Extrusion," Int. J. Mech. Sci., Vol. 7, pp. 277~295.
- (4) Chen, C. T. and Ling, F. F., 1968, "Upper-Bound Solution to Axisymmetric Extrusion Problems," Int. J. Mech. Sci., Vol. 10, pp. 863~879.
- (5) Avitzur, B., Bishop, E. D. and Hahn, W. C., 1973, "Impact Extrusion-Upper Bound Analysis of the End of Stroke," Trans. ASME, Ser. B, Vol. 95, pp. 849~857.
- (6) 김종호, 1986, 3 차원 업셋팅 단조에 관한 연구, 박사학위논문, 한국과학기술원
- (7) 한철호, 1986, 3 차원 소성변형을 고려한 일반적 단면형재의 압출에 관한 연구, 박사학위논문, 한국과학기술원
- (8) Kiuchi, M. and Kim, H. K., 1983, "A Study on Application of F. P. S Method to the Limit Analysis," Rep. Inst. Ind. Sci., Tokyo Univ., Vol. 40, No. 3, pp. 144~147.
- (9) 김동권, 조종래, 배원병, 1995, "평금형을 이용한 원형 소재에서 다각형바의 최종단계 전방압출에 관한 연구," 한국소성가공학회지, 제4권 제1호, pp. 59~68.