Journal of Historia Mathematica Vol. 8. No. 1, (1995), 61 - 68.

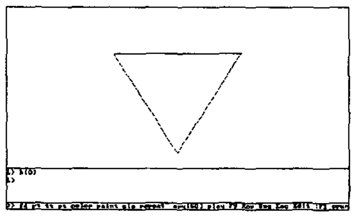
프랙탈 수학과 카오스

서울대학교 조 한 혁

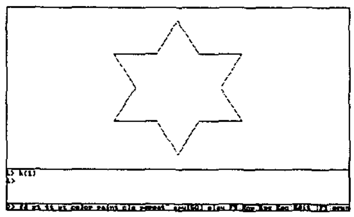
수천년에 걸친 수학사를 통해 볼 때, 수학은 항상 기존의 수학을 극복하는 과정을 통해 발전하여 왔으며 또한 극복되는 과정에는 항상 갈등과 긴장이 있었다. 예를 들어, 유리수 (rational number) 개념을 바탕으로 한 피타고라스 시대의 수학은 무리수 (irrational number)의 발견을 통해 극복되고 발전되었다. 그러나 피타고라스 시대에도 발견된 무리수를 곧바로 받아들이기 보다는 처음에는 쉬쉬하며 감추고 무시하려하였다. 현대에 들어와서도 유클리드 기하에 기초한 점, 선, 차원의 개념을 통해 이루어진 전통적인 기하의 세계에 칸토르 (G. Cantor), 코흐 (H. Koch), 시어핀스키 (W. Sierpinski) 등의 여러 수학자들은 괴물의 모습을 가진 도형들을 소개하게 된다. 그러나 수학자들은 그 것을 새로운 수학적 대상으로는 생각지 않았으며, 오히려 수학의 반례 또는 예외적인 대상으로 여겼다. 따라서 무리수가 발견되었을 때와 같이 이러한 도형들의 심오한 모습은 다소 무시되었으며, 1970년도 중반에 맨델브로트(Mandelbrot)가 구해주기 까지 그 것들은 수학 동물원에 갖혀있게 된다. 이후, 수학 동물원에 갖혀있던 수학적 괴물들은 피타고라스 시대에 발견된 무리수의 경우와 같이 수학의 괴물에서 수학적 실재로 인정을 받으며 본격적으로 연구되어 마침내 프랙탈 이론으로 발전하게 된다. 특히 프랙탈이 자연의 모습을 설명하는 효과적인 언어임을 인식하게 되어 80년대 이후 급격히 주목받게 된다.

이제 수학적 괴물중의 하나인 코흐(Koch curve) 곡선을 컴퓨터를 통해 직관적으로 정의한 후, 그 모습을 프랙탈 언어로 살펴보자. 이제 음이 아닌 정수들을 평면상의 닫힌집합 (closed set)들로 대응시키는 함수 $K(n)$을 생각하자. 다음 화면은 교육용 컴퓨터 언어 MAL에서 함수 $K(n)$을 정의한 후, n의 값에 각각 0, 1, 2, 3을 대입한 후 실행시킨 컴퓨터 화면의 모습이다 [2].

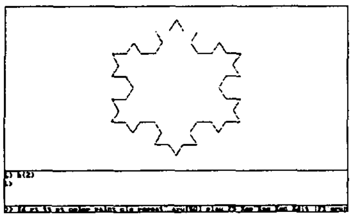
L> K(0) ↵



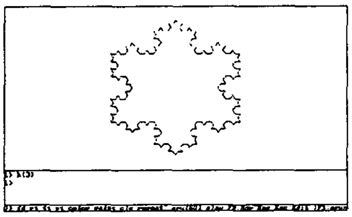
L> K(1) ↵



L> K(2) ↵

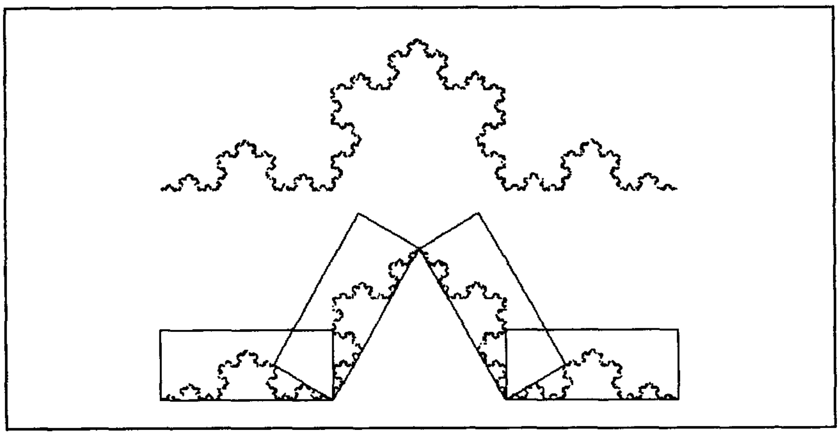


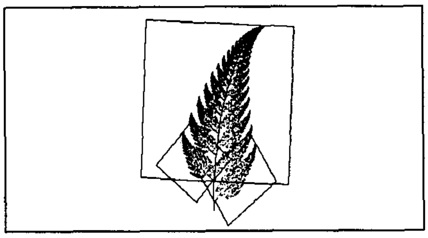
L> K(4) ↵

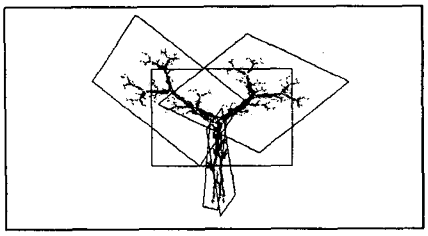


이 때, 수열(sequence) $K(n)$은 코시(Cauchy)수열을 이루게 되고, 평면상의 닫힌 집합들의 모임이 갖는 완비성(Completeness)에 의해 $\lim_{n\to\infty} K(n)$ 이 존재하게 된다. 그 극한값(그림)을 코흐섬이라 부르는데, 코흐섬의 북쪽 해안선만 떼어낸 다음의 위쪽 그림을 흔히 코흐곡선이라 부른다 [1].

여기서 코흐곡선은 자신을 닮은 네 개의 부분으로 이루어져 있음을 보게된다. 즉, 위의 사각형 중에 하나를 택해 확대경으로 정확히 3배를 확대하여 보면 그 부분은 전체 모습과 똑 같아진다. 뿐만 아니라 코흐 곡선을 이루고 있는 임의의 한 부분을 떼어 크게 확대하여도 본래의 코흐 곡선 모습을 얻을 수 있다. 이러한 전체와 부분사이의 통일된 관계는 유클리드 기하의 세계에서는 볼 수 없었던 것이다 (예를 들어 원의 한 부분을 떼어 확대하면 직선의 모습을 얻게 된다). 맨델브로트는 코흐 곡선과 같은 기괴한 도형에 프랙탈 (fractal) 이란 이름을 붙혀주고 본격적으로 연구를 하였다. 이제 자연에서 볼 수 있는 프랙탈의 모습을 다음의 그림들을 통해 살펴보자. 여기서 작은 사각형 안에 있는 그림을 확대시키면 본래의 그림과 비슷한 그림을 얻을 수 있음에 주목하자.

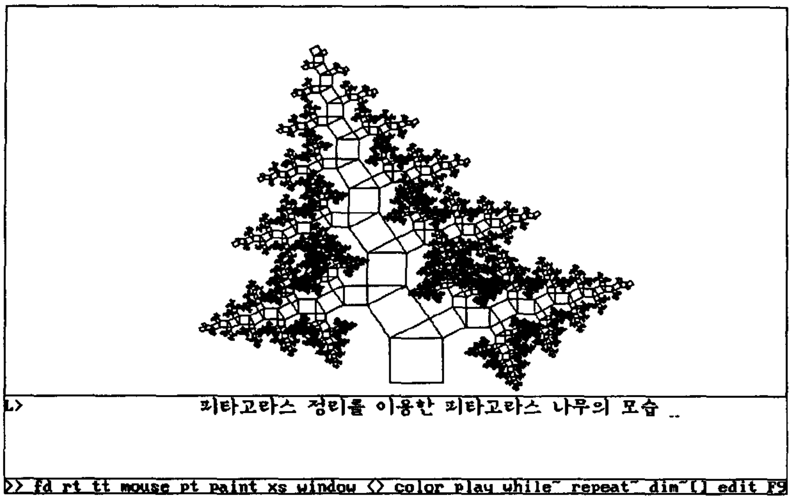




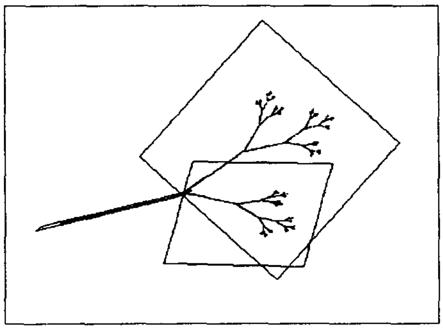


앞에서 살펴본 코흐 곡선과 지금 살펴본 그림들 모두에서 우리는 전체와 부분들 사이에 닮음의 성질이 있음을 보게 된다. 전체와 부분들 사이의 이러한 닮음을 자기닮음(self-similarity)이라 하며, 그림의 한 부분을 확대하고 또 확대할 때 본래의 모습과 비슷해지는 그림을 간단히 프랙탈 (fractal) 그림이라 부른다. *Fractal* 이라는 용어는 멘델브로트가 사물이 아주 잘게 "쪼개져 있는(fractured)" 것을 묘사하는 용어로 만들어 냈는데, 그는 fractal 을 파괴되어 있다는 뜻의 프랑스어에서 따왔다고 한다. 따라서 프랙탈의 사전적인 의미는 조각인데, 그렇다면 무엇이 조각나 있다는 말인가? 쉽게 말해서 전체가 전체의 모양과 닮은 조각들로 조각나 있다는 것이다. 직관적으로 프랙탈 그림이란 전체와 부분이 서로 닮은 기하학적 그림이고, 수학적으로 말하면 프랙탈은 자기닮음성(self-similarity)과 프랙탈차원(fractal dimension)을 가진 그림이 된다 [4].

이렇게 탄생한 프랙탈 이론은 해안선, 구름, 산, 나뭇잎 등의 여러 자연의 모습에 이러한 수학적 괴물의 모습이 숨어있음을 주장한 그의 유명한 책 『자연의 프랙탈 기하』를 통해 더욱 세상의 주목을 받게 된다. 사실 전통적인 유클리드 기하에서 다루어져 온 그래픽 체계는 인류가 만들어 낸 많은 산물들을 나타내기에는 불편함이 적었으나, 자연이 만들어 낸 산물들을 표현하는데는 부족함이 많았다. 따라서 이러한 부족함을 극복하기 위해 수학에 더 풍부한 기하내용이 보강되어야할 필요성이 있었는데, 프랙탈 기하는 바로 그런 도구를 제공하였던 것이다. 프랙탈 이론을 응용하여 그런 형상이 실제 자연의 모습과 놀랍도록 흡사하기에 흔히들 프랙탈은 자연의 모습을 설명하는 언어 또는 자연의 모습을 생성하는 직접적인 법칙이라고도 한다. 사실 자연에서 일어나는 현상들은 갑자기 불쑥 일어나지 않는며 대부분의 현상은 기존에 존재하는 것에서 발전되고 변천되어 나타난다. 예를 들어 구름의 모양, 대기의 난류, 나뭇잎의 잎맥, 해안선 등 언뜻 생각나는 자연 현상의 갖가지 모양들은 모두 한 곳의 형상이 이웃한 지점의 형상에, 나아가서 다른 지점의 형상에 어떻게든 영향을 준다는 것을 볼 수 있다. 나뭇잎을 예로 들면, 하나의 세포에서 점점 세포 분열이 일어나 잎의 모양을 형성해 가면서 차츰 잎의 형상을 이루어 간다. 이 과정에서 세포 분열과 증식이 유전자 정보에 의해 방향성을 계속 유지하기 때문에 세포 단위에서부터 전체 형상에 이르기까지 통일된 모습, 즉 나뭇잎 잎맥 모양을 이루어 가는 것이다. 이와같은 전체와 부분 사이의 통일성을 우리는 프랙탈로 설명할 수 있는데, 여기에서는 이미 증식되어 자리잡은 세포들이 그 반복의 재료이며 세포의 유전 정보가 프랙탈 생성의 알고리즘이라 할 수 있다. 이제 간단한 반복의 재료를 통해 그려진 피타고라스 나무라는 다음의 그림을 보자.



이 그림들은 중학교 수학 내용인 피타고라스 정리를 만족시키는 삼각형들을 반복의 재료로 삼아 피타고라스 정리에 의한 알고리즘으로 그려진 나무의 모습이다. 여기에 전체의 통일감을 잃지 않을 정도의 자유도를 줄 수 있다면 실제의 자연형상과 프랙탈 그래픽 결과의 차이가 점점 없어질 것이다. 이와같이 엉뚱한 재료를 단순 반복하여 얻은 그림이 자연의 복잡한 형상과 비슷하다는 사실에서 우리는 자연의 복잡성을 새롭게 보는 시각을 얻게된다. 이제 다음과 같이 생긴 나무가지의 모습에서 전체의 모습과 닮은 프랙탈 조각들을 찾아내고, 그 조각들로 나무가지를 구성하여 보자 [4].



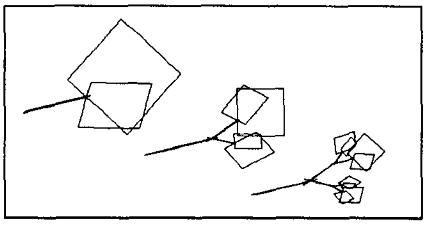
여기서 각각의 프랙탈 조각들은 아핀변환 한 개와 대응된다. 여기서 아핀변환이란 다음의 식과 같이 평면상의 좌표 (x, y)를 (x', y')에 대응시키는 함수이다.

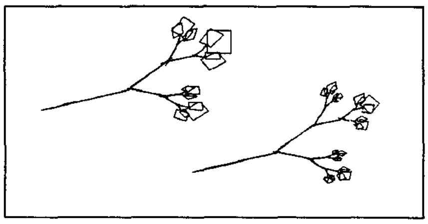
$$\begin{cases} x' = ax + bx + e \\ y' = cy + dy + f \end{cases} \quad \text{즉}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} .$$

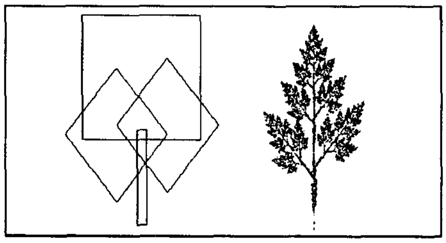
따라서 위의 그림은 세 개의 아핀변환을 이루는 $6 \times 3 = 18$개의 숫자(계수)들과 관련이 있는데, 이 숫자들은 마치 그림의 『유전자 코드』와 비슷한 것이어서 그 숫자들을 조금만 바꾸어도 돌연변이에 해당하는 약간 다른 그림을 보게된다. 실제로 컴퓨터에서 나무가지를 그리는데 사용된 18개의 숫자들을 약간씩 변형시키며 그림을 그려보면 여러 형태의 비슷한 모양의 나무가지를 보게 된다. 이제 위의 꽃가지 그림과 관계되는 3개의 아핀변환을 반복의 재료로 삼아 나무가지의 그림을 그려나가는 다음의 과정을 살펴보자. 다음에서 보듯이 이 과정을 컴퓨터로 계속하면 점점 원래의 나무가지의 모습이 컴퓨

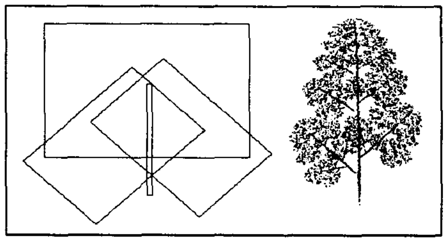
터 화면에 떠오르게 된다. 즉, 다음의 과정을 계속할 때 그 과정의 극한값(그림)에 해당하는 것이 존재하는데, 그 모습이 나무가지의 모양을 갖게 된다. 이와 같이 극한값이 존재하는 이유는 다음의 과정이 축소대응(contraction mapping) 이며 또한 평면상의 닫힌집합들의 모임이 완비성(Completeness)을 갖기에 성립한다. 따라서 유일한 고정점(fixed point)인 극한값을 갖게 된다 [3].





여기에서도 이와같이 주어진 그림을 그 것의 프랙탈 조각들로 나눈 후, 찾아진 프랙탈 조각들로 부터 전체의 모습을 극한과정을 통해 그려낼 수 있음을 보게된다. 이러한 관찰에서 출발하여 미국 조지아 공과대학 교수인 반슬리(Barnsley)는 주어진 그림에서 프랙탈 조각을 찾고, 또한 찾아진 프랙탈 조각들을 자기닮음성을 그려줄 수 있는 아핀변환들의 모임을 통해 표현하고, 또한 컴퓨터를 통해 주어진 그림을 그려내는 기발한 방법을 발견하게 된다. 여기서 프랙탈 조각으로 부터 만들어진 아핀변환들의 모임을 IFS (Iterated Function System)라고 부르는데, IFS는 건축가가 집을 묘사하는 것처럼 산과 구름같은 복잡한 그림을 정의하고 또한 표현할 수 있다 [3]. 프랙탈 조각들과 이들의 IFS를 통해 자연의 여러 모습을 그려내는 작업은 매우 재미있는 일이다. 이 때, 나타내고자 하는 풍경이나 자연의 모습을 원하는 만큼 정확하게 표현하기 위해서는 적당한 프랙탈 조각 (아핀변환) 들을 찾는 수학적 능력이 필수적이다. 이제 단지 네개의 프랙탈 조각에서 나온 IFS를 통해 그릴 수 다음의 나무 모습들을 보자. 여기서 프랙탈 조각들을 약간씩 변형시키면 여러 모양의 나무 모양도 그려낼 수 있음에 주목하자.

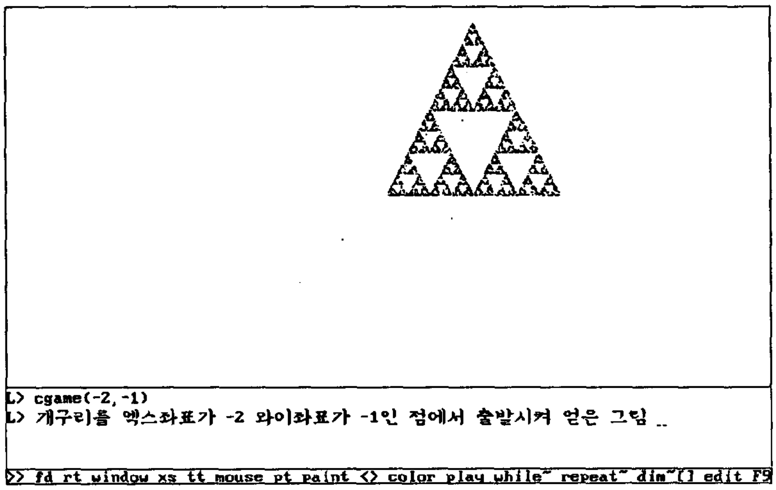




앞에서는 고등학교 수학에서 나오는 수열의 극한과 행렬변환 등을 사용하여 프랙탈을 도입하였는데, 국민학교에서도 도입할 수 있는 예를 살펴보자. 우선 큰 책상위에 개구리 한마리와 정삼각형이 그려져있다고 하자. 이제 개구리가 매 10초 마다 정삼각형의 세 꼭지점 중에 하나를 마음 내키는대로 선택하고, 현재의 위치와 그 꼭지점의 중간 지점으로 점프하며 계속 자리를 옮겨간다고 하자. 만일 개구리의 한 쪽발에 잉크가 발라져있어 개구리가 자리를 옮길 때마다 잉크에 의해 점이 찍힌다면 책상에는 어떠한 그림이 점점

그려질까? 놀랍게도 이때 그려지는 그림의 극한은 항상 일정한 것이며, 그 그림의 종착역은 시어핀스키 삼각형(Sierpinsky triangle)이라 불리운다. 개구리는 자유의지를 갖고 뛰어 다녔다고 생각할 줄 모르지만, 결국은 시어핀스키 삼각형이란 굴레를 벗어나지 못했다. 반슬리는 이러한 놀이를 『 카오스 게임 』이라 불렀는데, 다음의 그림은 말 언어로 짠 cgame.mal 프로그램을 통해 컴퓨터 실험을 한 결과이다 [2]. 다음의 그림에서 『 cgame(-2,-1) 』 명령에 의해 개구리의 처음 위치가 (-2,-1)로 된 후 카오스게임이 시작된다. 이 경우 개구리의 출발점이 원점에서 떨어져 있어서 처음에 찍히는 점들은 시어핀스키 삼각형에 들어오지 않는다. 그러나 곧 점들은 시어핀스키 삼각형 근처로 이동하고 시어핀스키 삼각형을 그리기 시작한다. 따라서 처음의 몇 개 점은 화면에 표시하지 않아야 바른 그림을 얻을 수 있다. 이러한 이유에서 개구리의 행동을 시뮬레이션시키는 컴퓨터 프로그램에서는 10 여번 지난 후 부터 컴퓨터 화면에 점을 찍기 시작하도록 되어있는데, 이렇게 초기의 점들을 없애야 더욱 시어핀스키 삼각형에 근접한 그림을 얻을 수 있기 때문이다.

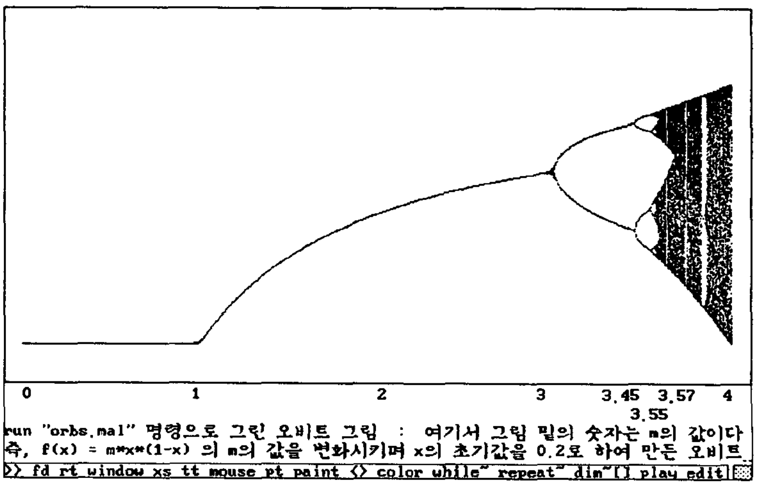
프랙탈 이론을 응용하면 설명이 불가능하리라 여겨졌던 복잡한 자연의 형상을 단 몇 개의 반복형 수식으로 나타내고 또한 미적으로 그려낼 낼 수도 있다. 또한 프랙탈 이론은 실제적인 자연의 현상을 이해하기 위해 사용될 수도 있는데, 구체적으로 프랙탈 이론은 인간의 감각이 미치지 못하는 자연 현상의 모습을 유추하는 데 사용될수 있다. 즉, 인간의 감각이 닿는 부분의 형상에서 어떤 규칙성을 발견할 수 있다면, 그 규칙의 지배를 받지만 인간의 감각이 닿지 않는 부분의 형상을 유추해 낼 수 있다는 것이다. 이를 응용하면 우주 전체에 퍼져있는 별의 분포 모습을 은하계 내에서 관측이 가능한 부분의 별의 분포로 유추한다든지 또는 크롬 분자의 주사전자현미경 사진으로 사진 촬영이 불가능한 헬륨 원자의 전자운 형상을 유추할 수도 있을 것이다. 한편 프랙탈 이론은 지질학 연구나 생물학 연구등에도 적용될 수 있는데, 예를들어 생물학에서 생물체의 닮음에 대한 프랙탈적 연구를 생각할 수 있다. 얼마 안되는 DNA사슬의 유전정보만으로 부모와 닮은 자식이 생기고, 하나의 세포가 분화하여 수천 종의 세포들로 이루어진 커다란 생



물체가 만들어지는 생물학적 메카니즘이 프랙탈 이론으로 설명될 수 있다면 생물학계의 연구에 큰 기여를 할 것이다. 프랙탈의 또 다른 응용은 혼돈 이론의 가장 두드러진 예인 대기의 운동 패턴과 일기 예보이다. 흔히 일기 예보는 집적된 과거의 자료와 현재의 관측치를 확률-통계적으로 유추하여 하게 된다. 그런데 현재의 혼돈 이론가들은 대기 운동의 프랙탈 모델과 파라미터를 찾아내게 된다면 보다 정확한 예보도 가능해 질 수 있다고 믿고 있다.

이제 혼돈(haos)이론이 프랙탈과 어떤 관계를 갖고있는가 살펴보자. 카오스의 뜻을 사전에서 찾아보면 '혼돈' 또는 '무질서'로 나와있는데, 카오스에 대한 학자들의 견해는 카오스의 이름 만큼이나 혼돈스럽고 다양하게 많이 있다. 여기에서는 카오스를 초기조건에 민감한 주기성이 없는 일종의 질서 또는 혼돈과 무질서속에 있는 질서라고 간략하게 이해하는 수준에서 내용을 전개해보자. 우리는 주변에서 예측하기가 어려워서 마치 혼돈스럽게 모이는 현상을 자주 보게 된다. 예를 들어 담배연기 또는 굴뚝의 연기가 휘돌면서 허공으로 사라지는 모습이나, 하루하루의 주식시세의 변화에서나, 또는 태풍의 진로 또는 여름날의 날씨 변화등에서 보게 된다. 반면에 지구가 태양을 도는 현상과 달이 지구는 도는 모습은 아주 규칙적인 것 같이 보인다. 어떤 사람은 주식값이 오르고 내리는 것과 같이 너무나 많은 변수가 혼돈의 모습을 만든다고 말한다. 그러나 수학자들은 아주 단순한 공식을 따라 전개되는 현상에서도 혼돈스러운 카오스의 현상이 나타나는 것과, 또한 어떤 카오스 현상속에서도 넓은 의미에서의 어떤 자기닮음의 규칙이 있음을 발견하였다.

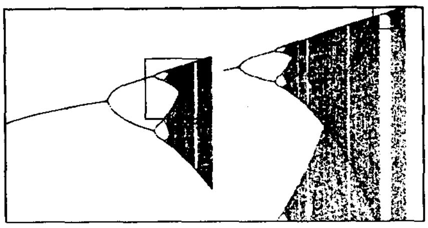
예를 들어 다음의 카오스 현상을 살펴보자. 아래의 그림은 토끼의 집단에서 번식률이 주어진 m이고 토끼수의 변화가 $y = mx(1-x)$ 으로 주어질 때 궁극적으로 토끼수의 변화가 어떻게 되느냐를 보여주는 오비트(orbit)그림이다. 여기서 번식률 m의 값이 0이상 1미만이면 처음에 아무리 많은 토끼가 있다해도 곧 토끼는 멸종하는 것을 볼 수 있다. 그런데 번식률이 3보다 약간 커지기 시작하면 토끼의 마리수는 주기적으로 많아졌다 적어졌다를 반복하게 됨에 주목하자. 또한 번식률이 3.45이상으로 높아지면

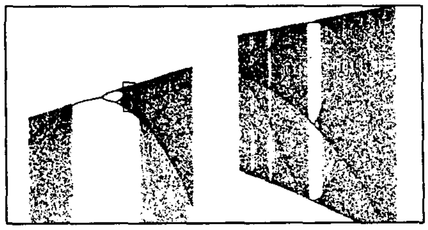


run "orbs.mal" 명령으로 그린 오비트 그림 : 여기서 그림 밑의 숫자는 m의 값이다
즉, f(x) = m*x*(1-x) 의 m의 값을 변화시키며 x의 초기값을 0.2로 하여 만든 오비트

그 곳에서 또다른 갈래질이 일어나서 2년을 주기로 변화하던 토끼수가 그 때부터는 4년을 주기로 달라짐을 보게 된다. 그러다가 번식률이 3.57이상으로 커지기 시작하면 토끼수의 변화는 예측하기 어려운 혼돈의 상태로 변화되기 시작한다. 참고로 처음 갈래질에서 다음 갈래질이 일어나는 m값의 차이들 (예를 들어, 3.45-3.0 과 3.55-3.45 과 3.57-3.55 등등) 은 궁극적으로 화이겐바움 (Feigenbaum) 의 수라 불리우는 4.669 의 값의 역수인 1/4.669 를 공비로 갖는 공비수열을 이루는데, 이러한 현상은 혼돈손에 숨어 있는 또 하나의 놀라운 수학적 규칙이다.

이제 위 그림의 특정 부분을 잡아 확대해가는 다음의 그림을 보자. 다음에서 왼쪽 그림에 나타난 사각형의 모습을 확대하여 오른쪽의 그림이 그려졌다. 이러한 오비트 그림들을 보면 혼돈의 모습 중간 중간에 하얀 빈부분이 도처에 있으며, 특히 오른쪽 그림에서는 하얀 빈 공간을 분명하게 볼 수 있다. 따라서 조그마한 *m*값의 변화에 따라 토끼수의 변화모습이 예측할 수 없는 혼돈의 모습과 규칙적인 모습 사이를 오고 감을 볼 수 있다. 여기에서 우리는 혼돈에서 질서를 그리고 질서에서 혼돈의 모습을 교대로 보게 된다.





결론적으로 우리는 확대된 위의 그림들에서 본래의 오비트 전체 그림을 닮은 모습들을 발견할 수 있다. 부분과 전체사이에 일어나는 이러한 자기닮음이 프랙탈의 기본 성질이었다. 우리는 구름, 산, 나뭇잎등과 같이 불규칙하게 보이는 자연의 모습을 자기닮음의 프랙탈 언어를 사용하여 훌륭하게 표현할 수 있었다. 놀랍게도 불규칙하고 혼돈스러운 오비트 그림의 카오스 모습 속에서도 이러한 자기닮음의 프랙탈 구조를 갖고 있음을 보게 된다. 복잡한 형상과 현상을 다루는 프랙탈과 카오스 이론이 서로 이웃 사촌이었던 것이다.

참고문헌

1. 조 한혁, 교육용 컴퓨터 언어 MAL과 FRACTALS 표현, 대한수학교육학회 논문집, 2권 1호, 33-42, 1992.
2. 조 한혁, 교육용 컴퓨터언어 MAL을 통한 수학학습, 한국수학교육학회지, 32권 4호, 280-299.
3. Barnsley, M., Fractals Everywhere, Academic Press, 1988.
4. Peitgen, Jurgens, and Saupe, Fractals for the classroom, NCTM & Springer-Verlag, 1992.