Journal of Historia Mathematica Vol. 8. No. 1, (1995), 41 - 45.

유클리드 기하학의 재건

아주대학교 **방 승 진**

1. 서 론

유클리드 기하학은 그리스 시대 유클리드가 당시의 기하 지식을 연역적 체계로서 정리하여 완성한 기하학으로 그가 저술한 원론은 20세기 중반까지 교양인의 필독서로서의 자리를 지켜왔다. 유클리드 기하학에서 공리론적 방법이 시작되었고 현재는 모든 수학에 적용되고 있다.

이런 유클리드 기하학의 면모가 너무 강조되어 단지 수학적 사고법 훈련의 도구로서만 인정되고 그 자체가 발전할 수 있는 수학 분야라는 사실이 망각되기도 한다. 현행 우리나라의 기하 교육은 유클리드 기하학의 기본적인 성질들을 중고등학교에서 배우고, 대학교에서는 비유클리드 기하를 공리론적 관점에서만 (또는 사영 기하학을) 배우거나 아예 안 배우고 건너뛴다. 이런 기하교육 시스템의 맹점은 중고등학교 때의 유클리드 기하학 교육과 대학교 기하 교육의 연계성이 미약하고, 너무 공리론적 관점에서만 바라보아 유클리드 기하학이 무미건조하게 된다는 것이다. 미분기하학도 컴퓨터 보급이 많이 안되있고, 인식 부족으로 개념 위주의 교육으로 흐를 수 밖에 없어서 좋은 학습 효과를 기대하기 힘들다. 우리나라의 경우 수학잡지를 통한 학교교육의 보급이 안되고 있고 유클리드 기하학을 연구하는 사람도 없다. 최근 발간되는 유클리드 기하학 책의 보급도 안되고 있는 상태이므로 기하학자가 되어도 유클리드 기하학의 수준은 중고등학교 수준에 머무르는 것이 다반수이다. 그러나 유클리드 기하학의 쓸모는 수학적 사고법 훈련에만 있는 것이 아니라 그 자체가 수학적 심미안의 관찰대상이 되며, 여타 수학문제를 연구하는데 기초 도구로서의 역할도 있다. 가령 삼각 함수의 덧셈정리가 톨레미 정리와 같다는 사실을 모르고서는 제대로 된 수학교육을 받았다고 할 수 없으며, 수학자라면 연구 수행에서 핸디캡을 갖고 있는 것이다. 본 고에서는 유클리드 기하학 연구가 컴퓨터를 이용하여 수행되는 사실을 소개하고, 수학사적인 관점에서 이런 연구가 유클리드 기하학의 재

건을 의미한다는 관점을 피력하고자 한다.

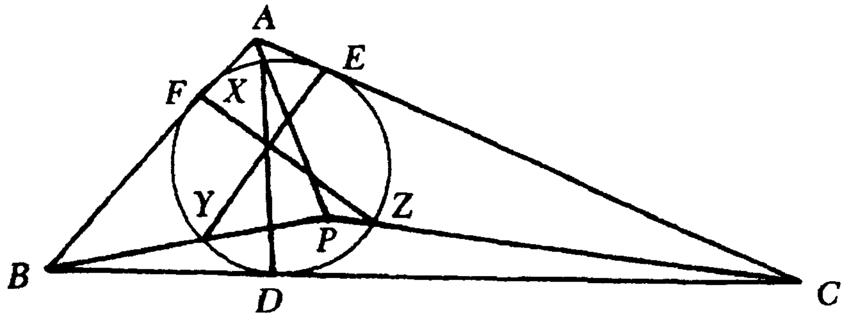
2. 유클리드 기하학에 대한 관점 제고

주사기로 어떤 지식을 사람의 두뇌에 주입할 수 있는 기술이 없는한 최소한 컴퓨터를 통한 가상경험을 통하더라도 경험을 통한 학습은 필수불가결하고, 우리가 몸담고 있는 공간은 유클리드 공간이므로 어떠한 수학이 발달하여도 경험에 근거해야 한다면 유클리드 기하학은 영원할 수 밖에 없는 것이다. 이런 의미에서 미국 캘리포니아 버클리 대학교의 W.Y.Hsiang교수가 쓴 글 [1]에 의하면 21세기에도 우리는 같은 수체계로 계산을 하고 같은 공간 안에서 살게 될 것이므로 수, 집합, 벡터, 함수는 수학학습에 있어 영원히 기본이 되는 대상이다.

유클리드 기하학을 현대화하여 수학교과과정에 추가하였고, 입학시험과 수학올림피아드등의 결과에 의하면 중국의 교과 과정의 개정은 성공적이라 판단된다.

위의 논의에서 우리는 유클리드 기하학은 일시적으로 침잠할 수 있으나 그 시대에 맞는 새로운 형태로 다가와 새로운 연구거리를 준다는 확신을 가질 수 있다. 1950년대 Dieudonne가 유클리드 기하학을 배척한 이래로 유클리드 기하학은 아마추어 수학자들이 하는 것이라는 인식을 바탕으로 기하학연구의 방향은 미분기하등 다양체기하학으로 옮겨져 갔다. 한편으로 컴퓨터를 이용한 증명(Auto proving)연구가 시작되면서, 유클리드 기하학은 인간이 하지 않아도 되는 죽은 분야로 인식되었다. 이러한 관점들이 유클리드 기하학은 전문 수학자들이 거들떠 보지 않는 원인이 되었다. 그러나 최근 연구된 사실에 의하면 유클리드 기하학이 다른 형태로 우리에게 다가오고 있다는 것을 알 수 있다. P.J. Davis [8] 에 의하면 컴퓨터는 시각적, 수치적, 기호/대수적, 논리적 선상을 따라 수학실험의 가능성을 열어주므로 자동증명(Automatic proof)와 새로운 정리들의 발견의 가능성을 준다. 기하소프트웨어의 개발은 새로운 정리를 컴퓨터를 통하여 발견하게 해준다. 예를 들어 중고등학교 수학문제들을 전문적으로 취급하고 수학올림피아드책을 출판하는 미국의 MathPro Press의 로고는 Cabri-Geometre [5] 라는 소프트웨어를 사용하여 발견한 다음 정리에 기초를 두고 있다.

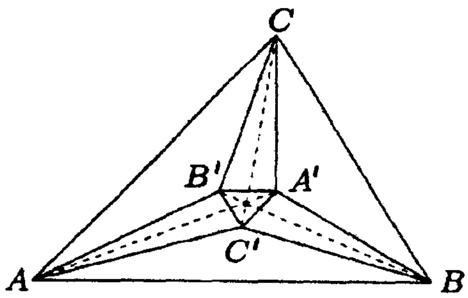
삼각형 ABC의 내접원이 변 BC, CA, AB와 각각 점 D, E, F에서 만난다. 점 P 는 삼각형ABC의 임의의 내부점이다. 직선 PA는 내접원과 두 점에서 만난다. 이들 중 X를 A에 가까운 점이라하자. 비슷하게 Y, Z는 PB, PC가 내접원과 만나는 점 중 각각 B, C



에 가까운 점이다. 그러면 DX, EY, FZ는 한 점에서 만난다.

다음으로 The Geometer's Sketchpad [7] 라는 소프트웨어로 발견한 정리의 예를 보자.

삼각형 ABC에서 각의 삼등분선의 교점으로 이루어진 삼각형 A'B'C'이 정삼각형 (Morley 삼각형이라함) 임은 잘 알려져 있다.



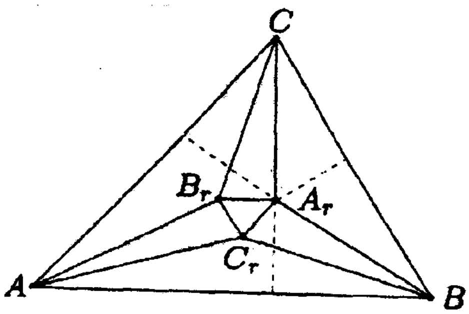
또한 세 직선 AA', BB', CC'가 한 점에서 만남도 잘 알려진 사실이다. 이 사실의 일반화로서

$r \neq 1$ 이 양수일 때, AB 를 중심 A, 반시계 방향 rA만큼 회전시킨 직선과 BA 를 중심B, 시계방향으로 rB만큼 회전시킨 직선이 만나는 점을 C_r이라 하자.

비슷하게 A_r, B_r 도

정의한다. $r<0$ 이면 $|r|$ 일때의 방향과 반대 방향으로 회전시켜서 A_r, B_r, C_r을 얻는다.

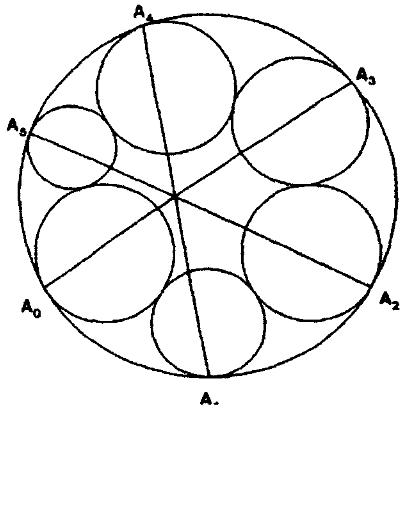
이때 직선 AA_r, BB_r, CC_r은 한 점 H_r(Hofstadter점이라 함)에서 만난다.



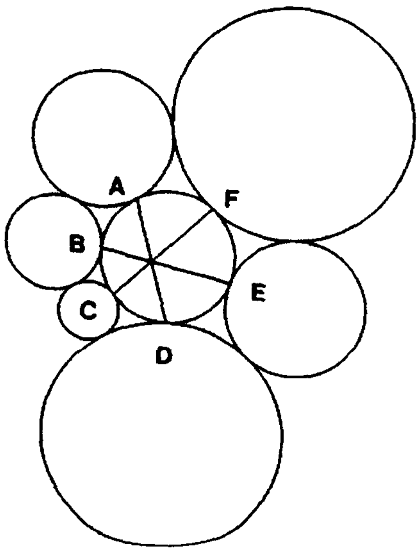
A. Oldknow [12] 는 위의 두 기하 소프트웨어와 기호연산 소프트웨어 Derive [6] 등을 활용하여 Soddy circle에 대한 새로운 정리를 발견하는 예를 보여준다.

위에서 언급한 예들은 성립한다는 자체를 안다는 사실만으로 우리에게 무한한 흥미와 탐구심을 갖게해주는 아름다운 정리이다. 칠원정리(The Seven Circles Theorem) [14] 를 예로 하나 더 들자.

$A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$는 한 원 O의 원주에서 이 순서대로 인접한 점들이고, 이들 6개의 점에서 원 O에 내접하고, 이들 서로는 외접한다. (즉, A_i에서의 원은 A_{i-1}에서의 원과 A_{i+1}에서의 원에 접한다.) 이때 직선 A_0A_3, A_1A_4, A_2A_5는 한 점에서 만난다.



이 정리는 6개의 원이 원 O에 외접하는 경우에도 성립한다.



3. 결 론

P. J. Davis [8] 가 언급했듯이 컴퓨터를 이용한 증명에서 수학자의 역할을 배제할 수 없다. 이 분야를 연구하는 수학자를 양성해야 한다. 학습보조기구로서 컴퓨터가 사용되고 있는 현재는 유클리드 기하학의 연구 결과를 적극 활용해야 하며 정리 발견법을 이용한 수학 창조성의 개발을 꾀해야 한다. 우리의 기하 교육 연구는 van Hiele 이론 [4] 을 적용하여 교과과정의 타당성을 검증하는 단계에 머물고 있다. 컴퓨터를 이용한 수학 교육 연구도 수학 개념을 학생들에게 쉽게 이해시키기 위한 학습 보조 도구로서의 이용에 주관점이 맞추어져 있다. 그러나 앞으로의 방향은 수학 창조성 개발에 컴퓨터를 이용하는 연구로 나아가야 한다고 생각한다. C. Kimberling [11] 의 삼선 좌표를 이용한 중심들의 연구, 선형 대수를 이용하여 원의 성질을 연구한 R.E. Pfiefer 와 C. Van Hook [13] 의 결과등은 유클리드 기하가 다시 광범위하게 연구될 수 있는 가능성이 있음을 보여주고 있다. 특히 최근 일본에서 사당(shine)이나 절의 지붕에 걸어두는 수학적 명판(tablet)을 연구하여 일본 사찰 기하문제(Japanese Temple Geometry Problems) 라는 책을 완성한 것을 볼 때 우리도 유클리드 기하학의 지식을 이용한 수학사 연구에 눈을 돌려야하겠다.

유클리드 추방론이 유클리드원론에 나오는 468개의 명제가 실용가치가 없다는 것에서 출발했다면 [3] 를 최근의 유클리드 기하학에서 일어나는 변화는 유클리드 추방론을 완전히 잠재울 수 있는 가능성을 보여주고 있다. 도형 문제는 중고등학교 수학이라는 등식을 깨쳐버리고 유클리드 기하학을 수학사, 수학교육, 수학연구에 적극 활용하여야 하겠다.

참고문헌

1. 방 승 진 (역), 중국의 21세기 수학교과과정(M. W. Hsiang 과 W. Y. Hsiang 지음), 대한 수학회 뉴스레터 37호(1994년) 18-22.
2. 방 승 진, 무게 중심 좌표와 삼선형 좌표, Math letter 11,7 (1995) 51-9~51-14.
3. 유 희 세. 유클리드 추방론의 의미, 한국수학사 학회지, 3,1 (1986) 7-20.
4. 한 태 식, 기하 교육과 van Hiele 이론, 수학교육 30,3 (1991) 47-69.
5. Cabri Geometre, IMAG, Universite Joseph Fourier, Grenoble, France, 1988.
6. Derive, SoftWarehouse, Inc, Honolulu, Hawaii, USA, 1988.

7. The Geometer's Sketchpad, Key Curriculum Press, Berkeley CA, USA, 1991.
8. P. J. Davis, The Rise, Fall, and Possible Transfiguration of Triangle Geometry : A Mini-history, Amer. Math. Monthly 102, 3 (1995) 204-214.
9. H. Fukagawa and D. Pedoe, Japanese Temple Geometry Problems, the Charles Babbage Research Centre, Canada, 1989.
10. R. Honsberger, Episodes in Nineteenth and Twentieth Century Euclidean Geometry, MAA, 1995.
11. C. Kimberling, Central Points and Central Lines in the Plane of a Tringle, Math. Mag. 67,3 (1994) 163-187.
12. A. Oldknow, Computer Aided Research into Tringle Geometry, Math. Gazette 79, 4 (1995) 263-273.
13. R. E. Pfiefer and C. Van Hook, Cicles, Vectors, and Linear Algebra, Math. Mag. 66,2 (1993) 75-86.
14. S. Rabinowitz, The Seven Circles Theorem, Pi Mu Epsilon J. 8, 7 (1987) 441-449.
15. ——————, Problem 1364, Math. Mag. 64, 1 (1991) p.60.