Journal of Historia Mathematica Vol. 8. No. 1, (1995), 14 - 25.

수학의 '하부구조'에 관한 소고
-수학은 '각론'보다 '총론'을 중요시한다-

목포대학교 김 용 국

이야기를 시작하기에 앞서 -'하부구조'라는 표현에 대해서-

요즘 매스컴에서 자주 쓰이는 시사적인 용어의 하나로 '인프라스트럭춰'라는 말이 있다. 우리말로는 보통 '사회 간접시설' 이라고 옮겨진다. 그러나 이 난해한 번역으로는 뜻이 분명히 가슴에 와 닿지 않는다. 인프라스트럭춰란 요컨대, 의(衣)·식(食)·주(住) 등 삶에 직접 필요한 '수면(水面) 위'의 조건들에 비해, 이것들을 보완하는 간접적인 수단, 예를 들면 도로, 항만, 다리 등의 시설을 비롯하여 환경, 정화, 휴식공간, 문화시설 등 '수면 하'의 조건을 가리킨다. 이 낱말을 글자 그대로 풀이하자면, '인프라'(infra)는 아래·하부·기초 등의 뜻, '스트럭춰' (structure)는 구조, 그러니까,

'하부(또는 기초) 구조'

라고 불러야 옳다. 확실히, 인프라스트럭춰라는 낱말에는 그런 뜻이 담겨 있다. 이 '수면하의 조건'이 잘 갖추어져 있는지, 취약한지에 따라서 삶의 질에 큰 차이가 나타나며, 이것이 튼튼한지 그렇지 않는지에 의해서 그 나라, 그 사회의 문화의 정도를 가늠할 수 있기 때문이다. 그러니까, 사회적인 측면에서 '인프라스트럭춰'란 입고, 먹고 마시며, 그 안에서 지내는 수면 위의 삶을 밑에서 받쳐 주는 '하부구조'라고 풀이해도 조금도 틀리지 않는다.

거미가 거미줄을 치고, 벌이 벌집을 지울 때 언뜻 별 뜻이 없는 것처럼 보이지만 언젠가 꼭 쓰임새가 있도록 (우주적인 차원에서) 깊은 배려가 배풀어지고 있다. 자연은 결코

낭비를 하지 않는다. 이 점에서 우주의 섭리는 우리 인간이 상상할 수 없을 만큼 철저히 '합리적'이다. 인간사회도 모름지기 이 합리성을 본뜨고 있다. 따라서 그 하부구조는 앞으로 일어 날수 있는 온갖 충격을 이겨내는 충분한 탄력을 지니도록 설계되어 있다. 만일 그렇지 않다면 사회의 기능에 이상이 생겼다는 위험신호이다.

하물며, 인간이 엮어 낸 구조물 중에서 가장 합리적인 수학의 하부구조는 어떤 '무게'가 그 위에 실리게 되든 견딜 수가 있도록 더더욱 튼튼하게 지어져 있다. 수학의 하부구조는 한치의 군더더기가 있을 수 없다. 이 구조물 속에 들어 있는 것이면 모두가 서로 음으로 양으로 밀접하게 얽혀서 전체를 이루는 중요한 역할을 하고 있다. 겉보기에 고립된 내용인 것 같아도, 마치 거미줄의 한 오리 한 오리가 서로 연관되어 전체를 떠받치고 있는 것처럼 늘 '전체'와 유기적인 관계를 맺고 있다.

이제부터 이러한 수학의 네트워크의 극히 부분적인 단면도를 스케치하겠다. 그러니 만큼, 수학의 '하부구조'라 하여도 가벼운 마음으로 약간 무책임한(?) 보따리를 늘어놓은 것이므로, 시사적인 뉘앙스를 풍기는 '인프라스트럭춰' 정도의 뜻으로 받아들여 주었으면 한다. 학문적인 용어인 'Substructure'의 무게는 결코 실려 있지 않다는 말이다. (특히 수학에서는 'sub'라는 접두사를 사용하면 특정한 내용을 지닌 전문용어가 되어 버린다. 가령, 'Subspace'(部分位相空間), 'Subbase'(準基底) 등)

첫번째 스케치
-'3대 난문'에서 군(群)의 이론까지-

그리스에서 시작된 작도는 '자와 컴퍼스'만을 가지고 도형을 그리는 것이었다. 여기서 '자'는 직선을 긋는 도구, '컴퍼스'는 원을 그리는 도구이다. (즉, 각도기를 사용하는지, 자의 눈금을 이용하는 것은 금지된다) 이것을 대수적으로 표현을 하면 작도는 1차식・2차식을 구하는 문제가 된다. 따라서, 직선이나 원의 교점 등을 구하는 작도는 1차 방정식이나 2차 방정식의 해를 구하는 문제로 귀착된다. 그런데, 1차 방정식의 해는 4칙연산에 의해서, 그리고 2차 방정식의 해는 제곱근을 구함으로서 얻어진다. 즉, 어떤 길이(수)를 작도할 수 있다는 것은, 그 길이가 주어진 길이를 바탕으로 4칙연산과 제곱근 구하기를 유한번 되풀이함으로써 구할 수 있음을 말한다.

이 관점에서 그리스에서 시작된 '삼대난문'에 관해서 생각해 보자. '3대 난문'으로 알려진 작도문제란 (1) 입방체의 부피를 배로 늘리는 문제, (2) 원과 같은 넓이를 갖는 정사각형의 작도 문제, (3) 임의의 각의 3등분 문제를 가리킨다. (1)은 주어진 입방체의 한변을 1로 하면, 작도할 입방체의 부피는 2이다. 따라서 이 입방체의 한변의 길이는 2의 세제곱근($\sqrt[3]{2}$)이다. (2)는 주어진 원의 반지름을 1로 하면 그 면적은 원주율 π, 따라서 이 원과 같은 면적을 가진 정사각형의 한변은 π의 제곱근($\sqrt{\pi}$)이 된다. 그리고, (3)은 이른바 '각의 3등분 방정식' $x^3-3x-2a=0$ 이라는 3차방정식의 해를 구하는 문제가 된다. 결국, 이 '3대난문'은, 대수적으로 따지면,

$$\sqrt[3]{2},\ \pi,\ x^3-3x-2a=0$$

등의 값, 또는 해가 유한 횟수의 4칙연산과 제곱근($\sqrt{\ }$)을 구하는 절차를 거쳐 얻을 수 있는가 라는 문제로 돌아간다.

그 안에서 4칙연산이 자유로이 이루어지는 수 집합을 통틀어 '체(體, field))'라고 부른다.

즉, 체(體)란 집합의 원소 사이에 성립하는 (연산)관계를 가리키는 이름이다. 한편, 집합의 원소 사이에 일정한 관계가 정의되었을 때, 이 집합은 '구조'(構造)를 이룬다. 즉, 수 집합은 자연수로부터 출발하여 정수·유리수로 확대되었을 때 비로소 그 테두리 안에서 '체'(體)라는 구조를 지닌다. 이러한 구조(=체)를 '유리수체(有理數體)'라고 한다. 수가 더 확대되면 실수 전체가 이루는 체('實數體'), 복소수 전체가 이루는 체('複素數體')등이 생긴다. 이 유리수체는 수의 세계에서는 가장 규모가 작은 체이다.

요컨대, '3대난문' 중의 (1)은, 유리수체로부터 출발하여 제곱근 꼴의 수($\sqrt{a}$, a는 양의 정수)를 계속 더해 가는 체의 확대(='확대체'(expansion field)) 작업의 결과 $\sqrt[3]{2}$을 얻을 수 있으면 '작도가능', 그렇게 할 수 없으면 '작도불능'이 된다. 이 증명은 본질적으로 귀류법(歸謬法, reductio ad absurdum)이 된다. 즉, $3\sqrt{2}$을 포함하는 확대체가 존재한다고 가정하여 모순을 이끌면 되는 것이다. (2), (3)도 같은 방법으로 그것이 불가능함을 증명할 수가 있다. (이 방법은 초등적인 내용이어서 어려운 것은 아니다) 이 확대체에 의한 수의 확대 문제가 3대난문이라는 '수면위'의 사건 뒤에 숨겨진 수학의 인프라스트럭춰인 것이다.

아벨, 갈로아 등에 의한 대수방정식의 일반적인 해에 관한 이론의 배후에도 이 문제가 인프라스트럭춰로서 가로놓여 있다. 16세기 이태리 르네상스 시대에 있었던 3·4차 방정식의 해법은 '존재하는 해'를 찾는 것이었으므로 본질적으로는 사다리를 한계단씩 더듬어 올라가는 '장인적'(匠人的)인 작업에 비유할 수가 있다. 그러나, 5차방정식 이상에 대해서는 그러한 해의 공식이 존재하지 않는다는 것을 증명하기 위해서는, 이미 '사다리'를 오르는 식의 장인적인 기술을 가지고는 불가능하다. 따라서, 여기서도 3대난문 문제의 해결과 마찬가지로 귀류법이 등장한다.

방정식의 (대수적)해가 존재한다는 것은 4칙연산과 거듭제곱근(일반적으로 $\sqrt[n]{a}$)으로 나타내어지는 해의 공식을 구할 수 있음을 말한다. 요컨대, 4칙연산이 가능한 유리수체(有理數體)에 어떤 거듭제곱근을 덧붙이므로서 확대체를 만들어 가는 작업을 통해 마침내 그 해를 포함하는 체(體)를 이룰 수 있을 때 해의 공식이 존재한다고 말할 수 있다. 아벨은 일반의 5차방정식에 관해서는 그러한 체가 존재하지 않는다는 것을 귀류법을 써서 증명하였다. 이것은, 본질적으로 3대난문과 동일하다. 자와 컴퍼스에 의한 작도의 경우 허용된 수단이 4칙연산과 제곱근 구하기뿐이었는데 반하여, 방정식의 해법에서는 일반적으로 n제곱근까지를 구하는 방법이 가능했다는 차이가 있긴 하지만, 어쨌든 제곱근, 또는 거듭제곱근을 덧붙여서 확대체를 이루어 나가는 과정 속에서 해를 구할 수 있는지를 문제삼는다는 점에서 구조적으로는 동일했다.

방정식의 해의 이론에 관해 아벨이 취한 방법이 '수의 확대' 였다면 갈로아의 방법은 그 반대인 '수의 축소' 였다. 즉, 갈로아는, 체(體)의 확대과정에 대해 역으로 '군'(群. group)이라는 축소된 수학구조를 생각했다. 체가 4칙연산이 가능한 구조였는데 반해 군은 (구체적인 의미는 상관이 없는) '덧셈'이라고 불리는 한가지 연산만이 성립하는 훨씬 단순한 구조이다. 갈로아에 의한 군의 이론은 종래의 '방정식의 해법'이라는 구체적인 의미를 떠나 '대수적 구조' 자체를 문제삼는 추상적인 대상을 주제로 삼고 있다. 실제 대수학은 갈로아 이래로 구조주의적(構造主義的)인 경향을 뚜렷이 보이기 시작하였다. 때를 거의 같이 하여, 기하학의 분야에서도 '도형의 성질'이라는 구체적인 시각이 '공간의

구조'라는 추상적인 관점으로 바뀌었던 것은 퍽 흥미롭다.

두번째 스케치
-'평행선 공리'의 의문 규명 이후-

유클리이드의 <(기하학)원론>은 그리스이래 서양 학문(=과학)의 이상적인 모델이다. 정의-공준(公準)-공리-정리-의 차례로 이루어진 이 책의 구성이 비단 수학뿐만 아니라 널리 과학에 미친 영향은 헤아릴 수 없이 크다. 그런데, 처음의 '정의'에 이어 나타나는 '공준'(일반적인 공리와 구별된 수학에 관한 공리. 앞으로는 이것 역시 '공리'라고 부르기로 한다) 중의 마지막 다섯번째인 다음 명제는 연역적 체계의 기본으로 삼기에는 극히 의심스러웠다.

"한 직선이 두 직선과 만났을 때 생기는 같은 쪽의 안각의 합이 두 직각보다 작을 때, 이 두 직선은 그 쪽에서 만난다"

이 명제는 단순 명쾌한 나머지 네 명제에 비해 유독 조건문으로 되어 있어 길다. 게다가 표현도 지나치게 까다롭다. 평행선에 관한 명제(그래서 '평행선 공리'로 알려져 있다)임에도 불구하고, '평행선'이라는 표현은 눈에 띄지 않는다. 그러나 조금 따져 보면 그 이유를 알 수가 있다. 평행선이 만나지 않는다는 것을 확인하기 위해서 는 직선을 무한히 연장시켜 봐야 하는데, 이것은 인간에게는 불가능하기 때문이다. 그래서 이 제5공리('평행선 공리')가 다른 공리들로부터 증명되는 명제-즉, 공리가 아닌 '정리'-인 것으로 짐작하여 그 '사실'을 밝히려는 노력이 시작되었다. 그 과정에서 이 명제를 훨씬 알기 쉽게 나타낼 수 있다는 것을 알았다. 지금 쓰여지고 있는 다음 공리가 그것이다.

"주어진 직선 바깥에 있는 한 점을 지나서 이 직선에 평행인 직선은 오직 하나 있다" (플레이페어(Playfair))

이것을 '정리'로 본다면, 그 증명은 앞서의 3대난문과 관련된 작도문제나 5차방정식의 일반적인 해의 문제처럼 귀류법을 써야 한다. (동양의 논리학에는 귀류법은 없었다!) 그러기 위해서는 이 명제의 부정, 즉,

1. 직선 바깥의 한 점을 지나 그것에 평행인 직선은 존재하지 않는다.
2. 직선 바깥의 한 점을 지나 그것에 평행인 직선은 두개 이상 있다.

라는 가정이 모순임을 밝히면 된다. 실제 사케리(G. Saccheri, 2667-1733)는 이 가정과 '평행선 공준'을 제외한 나머지 네 공리인

① 임의의 점에서 임의의 점으로 직선을 그을 수 있다
② 임의의 선분을 연장하여 직선을 만들 수 있다
③ 임의의 점을 중심으로 하여 임의의 반지름으로 원을 그릴 수 있다
④ 직각은 모두 같다

로 부터 모순을 이끌려고 하였으나 실패하였다. 그러나, 수학상의 '모순'이 일상의 상식과는 다른, 순전히 논리상의 문제임을 새삼 깨달았다는 것은 중요한 수확이었다.

만일 사케리와는 반대, 즉 위의 가정 1, 2가 옳다는 입장에 선다면 상황은 전혀 달라진다. 실제, 볼야이(J. Bolyai, 1802-1860), 로바체프스키(Lobachvskii, 1793-1856)등은 이 가정을 긍정적으로 받아 드림으로서 새로운 기하학(=비유클리이드 기하학)을 건설할 수가 있었다. 그러나, 이 두 사람은 이 새 기하학의 내부에 모순이 일어나지 않는다는 것을 증명한 것은 아니었다. 그렇다면, 비유클리이드 기하학의 무모순성(無矛盾性)을 어떻게 증명할 수 있을까? 이에 대한 '답'으로 나온 것이, 비유클리이드 기하학의 모델을 유클리이드 기하학의 세계에서 구성해 보는 일이었다. 클라인(Klein, 1849-1925), 포앙카레

(Poincare, 1854~1912)등이 고안했든 모델이 그 대표적인 예이다. 이 중 클라인의 모델을 보기로 들면, 유클리이드 평면 R2 의 한 원의 내부를 비유클리이드 기하학의 세계로 바꾸는 일이 그것이다. 즉, 이 원 내부를 비유클리이드 기하학에서의 '평면', 그리고 원둘레 상의 점을 무한원점(無限遠点), '직선'은 원둘레상의 두 점을 맺는 현으로 간주한다. 그러면,

"직선 l 위에 없는 점 P를 지나서 l과 만나지 않는 직선은 무수히 그을 수 있다"

만일 이 모델에 모순이 있다면, 이 모델을 포함한 유클리이드 공간 그 자체에 모순이 있다는 이야기가 된다. 이 비유클리이드 기하학의 등장은 여러 가지 점에서 수학을 탈바꿈시켰다. 특히 기하학은 커다란 전환기를 맞이한다. 즉, 거시적으로 공간 그 자체를 문제 삼는 추상공간론(抽象空間論)의 연구를 자극하였고, 다른 한편에서는 공리의 무모순성을 주제로 하는 기하학기초론(幾何學基礎論)이 일어나고 더 나아가 기하학의 틀을 떠나 집합론과 결합된 수학기초론(數學基礎論)이라는 연구분야가 개척되어 현대수학의 중요한 조류를 이루게 된다. 비유클리이드 기하학 탄생과 더불어 수학은 모름지기 '논리'를 가장 중요과제로 삼게 된 것이다.

세번째 스케치
-무한의 문제-

ㄱ. 집합론 탄생 전

'현대수학'의 여명기인 19세기의 수학의 중요한 특징은, 무한을 주제로 삼기 위한 정지작업의 시대였다는 점이다. "수학은 무한을 다루는 학문이다"(포앙카레) 라는 20세기의 수학관은 이 19세기의 성과를 바탕으로 이루어진 것이다. 그러나, 무한이 수학의 중요한 소재로 받아들여지기까지에는 먼 그리스 시대부터 피나는 '무한 길들이기'의 과정이 있었다는 것을 잊어서는 안된다.

그리스인의 사고는 다른 어느 문명권의 민족보다도 논리적이었다. 그들이 무엇보다 중요시한 학문은 수학, 그 중에서도 기하학이었는데, 그것은 그들의 조화적인 우주관에 딱 들어맞는 것이었기 때문이다. 그러나, 도형을 다루게 되면 필연적으로 '무한'의 문제가 생긴다. 유클리이드가 <원론> 제1권의 첫머리에서

1. 점이란 부분을 갖지 않는 것이다
2. 선이란 폭을 갖지 않는 것이다

라고 정의하고도, 도형이 이러한 '점'이나 '선'등으로 부터 이루어진다는 말을 하지 않았던 것은, '무한'이라는 벽에 부딪치는 것을 피하기 위해서 였다.

그리스의 사색가들에게 '무한'이라는 무서운 심연을 느끼게 한 것은 제논(Zenon, B. C 5세기)의 파라독스(逆說)이다. 제논이 내놓았던 수수께끼는 특히 '아포리아'(aporia, 해결할 수 없는 문제(=難問))라고 불려진다. 그의 다음과 같은 수수께끼 앞에서 사람들은 갈피를 잡지 못해 곤혹스러워 할뿐이었다. (이 수수께끼는 지금도 완전히 해결되어 있지는 않다!)

"날으는 화살은 날지 않는다"

(각 순간마다 화살은 어떤 위치에 있으며, 따라서 멈춰 있기 때문이다)

"달음질의 명수 아킬레스도 얼마쯤 앞에서 출발하는 거북이를 앞지를 수가 없다"

(거북이를 앞지르기 위해서는 거북이 있던 위치를 거쳐야 하기 때문이다)

"운동은 일어나지 않는다"

(어떤 거리를 가기 위해서는 그 반, 그 반의 반, . . . 을 가야 하기 때문이다)

이들 파라독스는 모두 무한과 관련이 있었다. 그래서, 그리스의 철학자들은 '무한'이라

는 무서운 함정을 아주 조심스럽게 피했고, 끝내는 무한을 금기(禁忌)로 삼고 말았다. 특히 논리를 생명으로 하는 수학은 파라독스라는 덫에 걸리면 결정적인 타격을 입는다. 이 때문에 도형을 다루는 기하학에서도 무한을 외면하게 된 것이다. . . . 그 후 2천년에 가까운 세월이 흐른 다음에야 비로소 수학은 무한을 콘트롤 할 수 있게 된 것처럼 보였다. 17세기에 이르러 뉴턴, 라이프니츠에 의한 미적분학(微積分學) 이라는 무한수학이 탄생한 것이다.

그런데 미적분학의 기본이 되는 '극한'(極限)의 개념에는 도저히 납득할 수 없는 대목이 나타난다. 함수 $y=f(x)$의 도함수 dy/dx는

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

즉, Δx가 0에 한없이 가까워졌을 때의 Δy와 Δx의 비를 가리킨다. 그런데, Δx가 0에 한없이 가까워지면 Δy도 한없이 0에 가까워진다. 따라서 이때의 $\Delta y/\Delta x$란, 알기 쉽게

$$\frac{0}{0}$$

과 같은 것인데, 이것은 일정한 값이 아닌 '부정'(不定)이다. 그런데, Δx는 아무리 작아도 0이 아니기 때문에 처음에는 Δx로 나누었다가, 마지막에는 Δx는 아주 작다는 이유로 0으로 간주해서 무시해 버린다는 것은 앞뒤가 맞지 않는 일종의 속임수가 아닌가!?

이런 의아심, 또는 반발은 뉴턴이 극한의 개념을 썼을 때부터 제기되었었다. 그럼에도 불구하고 미적분학이 근대과학을 뒷받침하는 최강의 무기가 될 수 있었던 이유는 무엇일까? 그것은, 비록 설득력은 미처 갖추지 못했다 하여도,.이 무한수학의 창시자들(뉴턴, 라이프니츠)이 직관적이나마 무한개념을 바르게 이해하였고 다루는 방법도 옳았기 때문이었다. 그러니까, 철학자 버클리(1685-1753) 등이 제기한 전술한 항의성(抗議性) 의문은, 느낌으로는 공감을 할 수 있다 하여도 이치로는 납득할 수 없다는 것이었다. 이편에 선 '동지'가 아니라 반대편에 선 '적'의 공격을 어떻게 막아낼 수 있는가의 문제였다. 제논의 파라독스, 평행선의 공리 등에서 빚어진 상황이 다시 되살아난 것이다.

이런 경우, '눈에는 눈'이 아니라 '말에는 말'로 맞서야 한다. 코시(Cauchy, 1788-1857)의 다음 설명이 높이 평가되는 까닭은 그래서이다.

"변수가 차례로 취하는 값이 일정한 값에 접근하고, 그 차가 임의의 값보다도 작아지면, 이 일정 값을 처음 변수의 '극한'이라고 한다"

이처럼 코시는 단숨에 마지막 단계로 치닫지 않고, 중간 과정을 통해 극한을 파악하였다. 이렇게 하면 변량이 극한값에 도달하는 순간을 굳이 문제 삼을 필요가 없으며, 따라서 0/0이라는 벽에 부딪칠 염려도 없다. 또, 논리적으로 따져도 이치에 맞는다. 이것이 가능했던 것은, 무한을 '질'(質=定性的)이 아니라 '양'(量=定量的)의 입장에서 파악했기 때문이다. 오늘날 이른바 '입실론-델타'(ε-δ) 용법이라고 불리는 발상이 그것다.

수열 $\langle x_n\rangle(=x_1, x_2, x_3, \dots)$이 궁극적으로 a에 도달한다-'수렴'(收斂)한다-는 것을 엄격히 형식화한다면 다음과 같이 된다. 아무리 작은 양수 ε('입실론')을 놓고 생각해도 항수(項數) n을 어떤 자연수 N보다 크게 잡으면 언제나 x_n과 a의 차를 ε보다 작게 할 수가 있다. 기호로는

$$(n>N\text{인 모든 } n\text{에 대해서})\ |x_n-a|<\varepsilon \tag{1}$$

이것이

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

를 양적으로 나타낸 것이 된다. 여기에는 '얼마든지', '자꾸자꾸' 등 애매한 개념은 끼여들 여지가 없다.

ㄴ. 집합론-실재(實在)와 추상화 · 형식화의 사이-

중학교에서 무리수를 처음 배울 때, 유한소수 또는 순환(무한)소수인 유리수에 대해서 비순환소수로서 차별화 했었다. 이 말은 자칫, '순환'은 주기성이 있다, 즉 규칙적이지만, '비순환'은 반대로 규칙성이 없다는 오해를 낳기 쉽다. 그러나, '비순환성'과 '불규칙성'은 전혀 별개의 개념이라는 점에 주의해야 한다. 가령, 1. 010010001. . . 이라든지, 1. 2345678910111213. . . 등의 무리수는 순환하지 않지만 규칙성이 있다. 또, $\sqrt{2}$나 $(1+\sqrt{5})/2$ (황금비)는 소수로 나타내면 규칙성이 없지만, 연분수(連分數)로 나타내면 규칙성이 나타난다.

19세기 수학이 거둔 성과의 하나는 원주율 π와 자연로그(對數)의 밑 e의 '초월성'(超越性), 즉 이들 무리수가 방정식의 해로는 나타나지 않는다는 것을 증명하였다는 점이다. 이것들은 같은 무리수이면서 $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{2}$ 등처럼 (대수)방정식 의 해가 되는 수('대수적 무리수')는 아닌 것이다. ($\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{2}$은 각각 $x^2-3=0$, $x^3-2=0$의 해이다) 이 두 초월수 중에서 e는 π만큼 일반화되지 않고 있지만,

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

또는,

$$e = 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots$$

이라는 극한값은 미적분학에서는 중요한 수이다. 이 무리수의 초월성에 대한 정리는 무한을 다루는 수학인 집합론(集合論)에서 다룬다.

무한에는 두 가지 종류가 있다는 것을 지적한 사람은 플라톤의 제자인 아리스토텔레스이다. 하나는 1, 2, 3, . . . 과 같이 끝이 없는 무한이고, 또 하나는 마치 부처님 손바닥 안에 든 괴물처럼 전체가 드러나 있는 무한이라는 것이다. 전자는 아무리 해도 따라잡을 수 없다는 뜻에서 '미완(未完)의 무한', 후자는 '완결된 무한'이라고 불렀다. 유한의 존재에 지나지 않는 인간에게는 무한이란, 모두 '미완'의 것이며, 완결된 무한을 손에 쥘 수 있는 것은 오직 우주의 창조주인 신뿐이라는 것이다.

집합론의 창시자 칸토르(G. Cantor, 1845~1918)는 오직 '신의 소유'(아리스토텔레스)인 무한을 수학의 세계로 끌어들였다. 추상적으로 형식화된 그런 무한이 아니라, 우리가 감각적으로 받아들일 수 있는 '소박한' 무한을 그대로 수학의 대상으로 삼은 것이다. (이 무모한 '정직성' 때문에 그는 비극을 자초한 셈이다) 우선 '집합'에 관한 그의 정의를 들어보자.

"집합이란, 직관, 또는 사고의 대상으로서 확정되어 있으며 서로 명확하게 구별되는 것 -이것을 집합의 '원소'라고 한다-을 하나의 전체로 묶은 것이다"

실제로 이 정의에 의해 자연수 전체로 된 집합 N은

$$N = \{1, 2, 3, \cdots\}$$

와 같이 '{ }'이라는 그릇 속에 갇힌 '완결된 무한'이 된다. 그러나 무한을 수로서 다룰 때 지금까지와는 다른 새로운 문제를 안게 된다. 유한의 범위에서는 두 집합의 크기는 기본적으로 원소를 낱낱이 1, 2, 3, . . 으로 셈해 나가서 어느 쪽이 먼저(또는 나중에)

불리어지는가에 의해 대소를 판가름할 수 있다. 그러나, 무한인 경우에는 그렇게 셈할 수 없으므로(그래서 무한!) 수의 대소를 다른 방법으로 정할 수밖에 없다. 그러기 위해서는 다시 수가 탄생했던 당시의 원초적인 단계로 되돌아가서 생각해 봐야 한다. '수 셈'의 가장 기본적인 방법은 두 집합(양떼와 돌멩이, 사과와 수사, . . .)의 원소 사이의 '1대1 대응'이었다. 이 1대1 대응이 성립할 때는 두 집합의 크기는 '같고', 그렇지 않을 때는 '크고 작은' 차이가 있다고 말한다. 무한이라는 암흑의 세계에서는 이처럼 '원시적'인 방법으로 한발자욱씩 맨손으로 더듬어 나갈 수밖에 없는 것이다.

이 방법을 쓰면 무한에서는, 첫째로 전체와 부분의 크기가 같을 수도 있는 것이다. 가령, 짝수의 집합 E={2, 4, 6, . . . }은 분명히 자연수의 집합 N의 부분집합이지만, 그 '크기'는 같다. 즉, N와 E 사이에 1대1 대응이 성립하는 것이다. "전체는 부분보다 크다"라는 수학 상식(유클리이드 <(기하학) 원론>의 공리)은 무너져 버린다.

먼저 크기를 나타내는 이름부터 지어내야 한다는 이야기이다. 유한의 수에 대해서는 1, 2, 3, …, 또는 문자를 써서 'x'나 'n'과 같이 나타냈었다. 칸토르는 자연수 집합의 크기인 무한을

$$\aleph_0 \text{ (알래프 제로)}$$

로 나타냈다. 여기서 기호 '$\aleph$'(알래프)는 히브리 문자이며 그 아래 붙은 '0'은 최초의 수(무한)를 뜻한다. 그는 무한수 중에서도 대소관계가 성립하며, 그 중 가장 작은 것이 자연수집합 N의 크기를 나타내는 수라고 생각해서, 이것을 $\aleph_0$라고 이름지었다. 자연수 집합 N과의 사이에 1대1 대응이 성립하는 정수 집합 I, 유리수 집합 Q 등은 '크기'가 N과 같기 때문에, 이것들의 '수'도 $\aleph_0$이다.

요컨대, 무한집합 중에서도 가장 '작은' 집합은 그 원소 하나 하나에 빠짐없이 '하나·둘·셋·…'하고 번호를 매길수 있는 집합(='가부번 집합'(可附番集合))이라는 것이다.

그러나 실수집합 R은 크기가 무한이면서도 자연수집합 N과의 사이에 1대1 대응이 성립하지 않는다. 즉, 모든 실수에 빠짐없이 1, 2, 3, … 이라고 번호를 매길 수가 없다. 이 사실은 '귀류법'을 써서 증명할 수가 있다.

먼저 이런 문제를 생각해 보자. 10자릿수 10개가 있다. 이 중의 어느 것과도 다른 10자리 수를 만들 수 있는가? 그렇다면 100자릿수가 100개 있을 때, 1000자리수가 1000개 있을 때는? 이런 경우까지를 예상하고 똑같이 쓸 수 있는 방법을 찾아냈다면 대단한 수학적 직관력을 지닌 사람이다. 그 방법이란 알고보면 별 것도 아니다. 즉, 직사각형 꼴로 늘어선 수열의 왼쪽 위로 부터 오른쪽 아래로 대각선을 긋고, 이 줄 위에 있는 숫자가 1일 때는 '2'로 바꾸고, 1 이외의 숫자일 때는 '1'로 나타낸다. (물론 다른 두 수의 짝을 생각해도 된다)

이렇게 해서 만든 10자리 수

1 1 2 1 2 1 1 1 1 1

는 처음 10개의 10자리수 중 어느 것과도 같지 않다. 이 방법을 쓰면 1만개의 1만 자리수, 아니 100만개의 100만 자리의 수, . . . 가 있는 경우에도 이것들과 다른 수를 쉽게 만들 수 있다. '대각선 논법'이라고 불리는 칸토르의 천재적인 착상은 이것을 무한의 경우까지 확대하여,

실수 전체의 집합 R과 자연수의 집합 N 사이에 1대1 대응이 성립하지 않는다는 것을 증명하는데 쓰인다. 그런데, R(실수집합)의 '크기'는 그 부분집합인 개구간 (0,1)과 같으므로, R과 N(자연수집합)의 '크기'를

비교하기 위해서는 R대신에 $(0, 1)$을 쓰면 된다. 그리하여, 무한과 관련이 있는 명제의 증명에는 귀류법을 써서,

" N과 $(0, 1)$사이에 1대1 대응이 성립한다" 고 가정해 본다.

'대각선 논법

'-실수집합 R은 자연수집합 N 보다 '크다'-

N과 $(0, 1)$ 사이에 1대1 대응이 성립한다(='크기'가 같다)고 가정하자. 즉,

$$\begin{array}{lcccccccc} N: & 1, & 2, & 3, & 4. & 5, & \ldots, & n, & \ldots \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \\ (0, 1): & a_1, & a_2, & a_3, & a_4, & a_5, & \ldots & a_n, & \ldots \end{array}$$

여기서, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, ... a_n, ... 는 모두 소수꼴로 표시된 수이다. 유리수는 유한소수 아니면 (무한)순환소수가 되는데, 유한소수일 때는 가령, 0.1=0.9999...와 같이 생각하면, 0과 1 사이의 모든 실수는 무한소수로 나타내어진다.

따라서, 개구간 $(0, 1)$내의 모든 실수가 자연수집합과 1대1 대응을 이룬다면, 1, 2, 3, ... 의 번호를 매길 수가 있어야 한다.

그러나, $(0, 1)$의 원소 중에는 이 번호열에서 빠진 것이 생긴다.('대각선 논법'의 등장!) 다음과 같은 원소 b가 그것이다.

$$b = 0.b_1 b_2 b_3 \ldots$$

(단, a_{nn}이 1이 아니면 b_n은 1, a_{nn}이 1이면 b_n은 2)

이 누락된 수를 번호 열에 끼워 넣어도 같은 방법을 쓰면 다시, 번호 열에서 빠진 원소가 나타난다. 이렇게, (다람쥐 쳇바퀴 도는 식으로) 계속 누락된 수가 나타난다.

이것은, 결국 처음의 가정 "모든 실수에 번호를 붙일 수 있다"- 즉, 실수집합이 자연수집합과 1대1 대응-와 어긋나므로 $(0, 1)$은 자연수집합보다 '큰' 집합이고 가부번 집합은 아니다!

<증명 끝>

지금까지 이야기한 내용을 정리하면 다음과 같다. 유한집합의 '크기'(=원소수)는 1, 2, 3, ...n, ... 등의 숫자나 문자(기호)로 나타낼 수 있다. 자연수의 집합의 '크기'를 나타내는 수 나타내어지는 수(=자연수)는 모두 유한의 수이다. 자연수집합의 '크기'를 나타내는 수 $\aleph_0$는 어 떤 유한수보다도 크기 때문에,

$$1 < 2 < 3 < \ldots < n < \ldots < \aleph_0$$

여기서, '집합의 크기'니 '(집합의) 원소의 개수'니 하는 말 대신 집합의 '농도(濃度)'라는 표현을 쓰면(무한의 세계에서는 '개수'는 어울리지 않으므로), 실수집합의 농도는 어떤 유한집합의 농도보다 크다. 이것을

$\aleph$ (알래프)

로 나타낸다. 이것을 특히 '연속체(連續體)의 농도'로 부른다. 따라서,

$$1 < 2 < 3 < \ldots < n < \ldots < \aleph_0 < \aleph$$

이 '$\aleph$'에는 그 오른쪽 아래에 아무 표시가 없다. 실수집합의 농도가 자연수집합의 농도 바로 다음의 '크기'(이때는 $\aleph_1$이어야 하지만) 인지 분명치 않으므로 밑수를 적지 않고 놔둔 것이다. 어쨌든, $\aleph_0$와 $\aleph$의 관계로 말미암아 같은 '무한'일지라도 '대소'관계가 성립한다는 것을 알 수가 있다. 그런데, 어떤 집합 A가

연속체 가설

-" $\aleph$은 $\aleph_0$ 다음 크기의

무한수(= $\aleph_1$)이다!?"-

괴델(Gödel,1906-1978) : 집합론 (=칸토르 이후의 公理論的 集合論)이 모순되지 않는다면, 이것에 연속체 가설을 덧붙여도 모순이 일어나지 않는다.(1940년)따라서, 이 입장에서는 " $\aleph_0$ 다음의 무한수는 $\aleph_1$ 이다"가

된다.

코헨(Cohen,1934-): 집합론(=公理論的 集合論)에 연속체 가설의 부정-즉,“ $\aleph_0$ 보다 크고 $\aleph$보다 작은 무한수가 존재한다”-을 덧붙여도 모순은 일어나지 않는다.(1963년)

그런데, 모순이 일어나지 않는다는 것과 연속체 가설 그것이 증명되었다는 것과는 별개의 문제이다. 따라서, 위의 두 결론은 (공리론적)집합론이 연속체가설의 정당성 여부를 결정하는 힘이 없음을 말하는 것이 된다

있을 때 그 부분집합 전체로 된 집합, 즉, $2^A = \{X \mid X$는 A의 부분집합$\}$의 원소수(농도)는 A의 원소수(농도)보다 크다는 것은 유한집합에서 성립하지만, 이 관계는 무한집합에서도 성립한다. (귀류법의 이용!) 따라서, 자연수집합의 부분집합 전체로 된 집합의 농도를 $2^{\aleph_0}$로 나타내면, $\aleph_0 < 2^{\aleph_0}(=\aleph)$이고, $2^{\aleph_0}$의 부분집합의 원소 전체의 집합의 농도 $2^{\aleph}$는 $2^{\aleph_0}$보다 크기 때문에,

$$\aleph_0 < 2^{\aleph_0}(=\aleph) < 2^{\aleph}.$$

실수의 ‘개수’(농도)는 $\aleph$이어서 유리수의 ‘개수’ $\aleph_0$ 보다 많다. 따라서, 실수 중에는 유리수가 아닌 수, 즉 무리수가 $\aleph_0$개 보다 ‘많이’ 들어 있다. 이 무리수 중, 방정식의 해가 될 수 없는 것들이 π나 e이외에 얼마나 들어 있을까? 이것을 알기 위해서는 방정식의 해가 될 수있는 수(=‘대수적 수’)는 얼마나 되는지 부터 살필 필요가 있다. 칸토르는 이것이 기껏 $\aleph_0$, 그러니까 자연수의 개수와 같은 가부번(可附番)개 밖에 없다는 것을 밝혀 냈다.

-‘대수적 수’의 개수는 기껏 자연수의 개수와 같은 가부번(可附番)개 $\aleph_0$-

보통의 방정식(유리수를 계수로 갖는 방정식)은 계수를 모두 정수 꼴로 만들 수가 있다. 특히

$$a_0x^n + a_1x_n + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

은 a_0가 양의 정수인 꼴일 때로 한다.(언제든 그렇게 만들 수 있다)

이 때,

$$n + a_0 + |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$$

를 이 방정식의 ‘높이’라고 부른다. 따라서, 방정식의 ‘높이’는 항상 양의 정수이다. 가령, 방정식 $x^2+3x-1=0$의 ‘높이’ h는

$$\begin{aligned} h &= 2+1+|3|+|-1| \\ &= 2+1+3+1 = 7 \end{aligned}$$

이다.

h	방정식	개수
1	없음	0
2	$x=0$	1
3	$x+1=0, x-1=0, 2x=0$ $x^2=0$	4
4	$x+2=0,\ x-2=0,$ $2x+1=0, 2x-1=0, 3x=0,$ $x^2+1=0, x^2-1=0, 2x^2=0,$ $x^2+x=0, x^2-x=0, x^3=0$	11
5	…	28

h가 커짐에 따라서 그 ‘높이’를 갖는 방정식의 개수는 엄청 많아지지만, 유한개이다. 그리고, 일반적으로 n차의 방정식의 해는 기껏해야 n개이기 때문에, 어떤 높이 h에 대해서도 그 방정식의 해가 되는 대수적 수도 유한개이다. 따라서, 대수적 수 전체의 합은 가부번(可附番) 개의 무한, 즉, $\aleph_0$개이

다.

우리가 보통 알고 있는 무리수란 거듭제곱근으로 나타내어진 수 $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[4]{5}$ 등이다. 이것들은 모두 방정식의 해인 '대수적 수'이다. 그런데 이것들을 모두 합쳐도 가부번개($\aleph_0$)라고 할 수 있을까? 실수의 집합의 크기는 이들 대수적 수 이외에 π나 e등의 초월수까지를 포함해서 비가부번(非可附番)개인 $\aleph$이다. 그런데, 초월수의 '개수'도 가부번개라고 한다면 $\aleph_0+\aleph_0=\aleph_0$, 그러면 실수는 가부번개라는 모순이 생긴다. 요컨대, 초월수는 대수적 수 보다 '많은' $\aleph$개이어야 된다.

우리가 알고 있는 초월수는 기껏 π나 e 등 몇 개뿐인데, 이런 종류의 수가 실수중 거의 대부분을 차지하고 있다. π나 e가 초월수라는 사실이 밝혀진 것은 칸토르의 이 '발견'보다 불과 수년전의 일이었다. 그러나, 칸토르의 증명은 이를테면 수면 위로 살짝 비친 괴물의 꼬리 끝부분만을 보고 그 정체를 정확히 알아맞히는 '재주'에 견줄 수가 있다. 위대한 업적이란 으레 이런 것이다. 데모크리토스의 원자론(原子論)이 그랬었고, 뉴튼의 인력법칙의 발견이 그랬다. π와 e의 초월성이 증명된 것은 각각 1882년 (린데만(Lindemann))과 1873년(에르미트(Hermite))의 일이었지만, 이들의 업적이 손으로 만지고 눈으로 볼 수있는 구체적인 대상을 다루는 장인적(匠人的) 솜씨였다고 한다면, 칸토르의 그것은 일반화된 추상적 · 이론적 사고의 결과였다. 구체적인 대상에서 눈을 떼지 않는 약간 우직스러운 태도를 '구시대적'이라고 한다면, 그 대상을 포함하는 배경까지를 한데 묶어서 생각하는 칸토르의 태도는 확실히 '현대적'이다.

칸토르의 집합론에는 이러한 '추상화'의 경향이 마치 '숙명'처럼 늘 따른다. 그가 생애의 유일한 벗 데데킨트(Dedekind, 1831-1916)에게 보낸 편지 속에서

"나는 이것을 증명하였으나, 나 자신도 (사실이라고) 믿을 수가 없다!"

라고 외친 것은 그 좋은 예이다. 그것은, 평면상의 점도 공간상의 점도 직선상의 점과 개수가 같으며, 따라서 점의 개수와 차원의 높이는 일치하지 않는다는 언뜻 상식과 어긋나는 사실을 증명하였을 때의 일이었다.

ㄷ. 집합론의 파라독스와 수학의 위기 -수학의 무대에 나타난 파라독스-

칸토르의 집합론이 수학의 기초로서 자리를 굳혀 갈 때, 그 뿌리를 뒤흔드는 중대한 문제가 발생하였다. 그것은 집합의 정의 바로 그것에서 비롯된 파라독스였다. 칸토르 자신의 정의에 의하면, 우리의 직관 또는 사고의 대상으로서 서로 구별되는 것을 모으면 '집합'이 된다. 그러면, 다음과 같은 경우는 어떨까?

" 우리가 생각할 수있는 모든 집합을 다음 두가지로 나눈다.

첫째, 자기 자신의 원소가 되지 않는 집합 (예: '어느 도서관에 있는 책 전체의 집합')

둘째, 자기 자신의 원소가 되어 있는 집합 (예: '어느 도서관에 있는 책들을 모두 실은 도서목록')"

첫째의 경우에 해당하는 집합(보통 생각하는 집합)들을 모두 모으면 분명 '집합'이 된다. 이것을 '보통집합의 집합'이라고 하자. 즉,

$$A = \{X \mid X\text{는 보통집합}\}$$

둘째의 경우에 해당하는 집합(약간 특수한 집합) 들을 모두 모으면 분명히 '집합'이 된다. 이것을 '이상집합의 집합'이라고 하자.

즉,

$$B = \{Y \mid Y\text{는 이상집합}\}$$

집합을 이렇게 분류하면 어떤 집합이든 위의 첫째, 아니면 둘째에 속하게 된다. 즉, 세상의 모든 집합은 '보통집합'이, 아니면 '이상집합'이 된다. 그렇다면 A, 즉 '보통집합의 집합'은 보통집합인가, 이상집합인가? 사실은 그 어느 쪽도 아니라는 결과가 나타난다!

'보통집합의 집합'은 '보통집합'도 아니고 '이상집합'도 아니다!!

$A = \{X \mid X\text{는 보통집합}\}$,
$B = \{Y \mid Y\text{는 이상집합}\}$이라고 하자.즉,

A는 자기 자신의 원소가 아닌 집합들 전체의 집합,

B는 자기 자신의 원소가 된 집합들 저체의 집합

이라고 하자. 그러면 A자신은 보통집합일까, 이상집합일까?

(1) A는 보통집합이라고 가정하자. 이때 A는 자기 자신의 원소가 될수 없으므로, B의 원소 즉 이상집합 이어야 한다

(2) A는 이상집합이라고 가정하자.이때 A는 자기자신(A)의 원소이므로, A는 보통집합 이어야 한다.

즉, A는 보통집합도 이상집합도 아니다. 그런데 모든 집합은 이 두 집합 중의 하나이므로 이것은 모순이다!

현대 수학의 주춧돌은 말할 나위 없이 집합론이다. 따라서 집합론의 체계에 모순이 있으면 현대수학 자체에 모순이 있다는 이야기이다. 집합론의 모순은 칸토르가 '집합의 집합'이라는 개념을 도입함으로서 집합이 다른 집합의 원소가 된다는 것이 허용되었다. 그리하여 집합론이라는 웅장한 수학체계가 이루어졌다. 그러나 한편으로 이것 때문에 저 앞서의 파라독스를 유발하고 만 것이다. 수학은 새로운 관점을 도입함으로서 새로운 발전의 계기가 마련된다. 그러나 한편으로 새로운 관점의 도입은 또 하나의 위기를 가져올 수 있다. 집합론의 파라독스는 수학의 발전이 이러한 위기를 동시에 잉태하고 있다는 것을 시사해 준다.

결 어
-수학의 발전과 인프라스트럭처-

수학은 늘 그 수면하에 그 원동력을 간직하고 있다. 수학은 어느 시대에서나 표면상에 나타난 것보다도 그 아래에서 눈에 보이지 않게 수학을 추진하는 원동력 즉 인프라스트럭처가 문제가 된다. 따라서 인프라스트럭처가 비약한 수학은 수학으로서 발전할 가능성이 없는 것이다. 그 좋은 예가 동양 수학의 관영 수학적인 성격이다. 오늘날의 관영 수학은 이른바 학교 수학(국민학교에서 대학까지의 수학) 이 바로 그것이다. 이 사실은 수학이 수학교육이외의 자리에서 발전한다는 것을 의미한다. 즉, 수학은 일종의 아웃사이더인 아직 정형화되지 않은 가능적인 상태에서, 정형화의 과정을 겪는 과정에서 발전의 계기를 얻는다. 그러한 예를 이제까지 보아 온 것이다. 앞에서 이야기한 바와 같이 사회의 인프라스트럭처가 그 사회의 발전의 가능성을 보여주는 것처럼 수학에서도 수학이 자생적으로 발전해 가기 위해서는 학교 수학 이외의 수학 문화(인프라스트럭처)가 튼튼히 갖추어져야 한다.