

大韓造船學會論文集
 第 32 卷 第 3 號 1995 年 8 月
 Transactions of the Society of
 Naval Architects of Korea
 Vol. 32, No. 3, August 1995

Assumed Mode Method에 의한 附加물을 갖는 任意 四角形 平板의 振動解析

한성용*, 허영철*

Vibration Analysis of Quadrangular Plate having Attachments by the Assumed Mode Method

by

S. Y. Han* and Y. C. Huh*

요 약

船體, 海洋構造物과 같은 大型 構造物은 대부분 板 構造物로 이루어져 있으며, 이에 各種 機器類, cable類, Pillar, 彈性支持된 裝備 등과 같이 集中質量, 分布質量, 支持스프링, 質量-스프링 系 등이 附加되는 경우가 많다. 이러한 板 構造物의 振動解析 方法으로 매우 單純한 경우를 제외하고는 嚴密解를 얻기 어렵기 때문에 Rayleigh-Ritz方法, assumed mode method와 같은 解析의 方法이 주로 適用되고 있다. 局部 판넬의 形狀은 直四角形 뿐만 아니라 사다리꼴, 三角形 등 매우 多樣한데 上記 解析의 方法을 적용한 研究는 대부분 直四角形인 경우에 대하여 이루어졌다. 따라서 本 研究에서는 任意 四角形 形狀 平板에 集中質量, Pillar와 같은 支持스프링, 質量-스프링 系 등이 附加된 全體 系의 振動解析을 效率的으로 遂行하는 方法으로서 任意 四角形 形狀을 效果的으로 취급하기 위해 特性座標系를 활용하고 assumed mode method를 적용하는 定式化를 제시하였다. 質量-스프링 系가 附加된 사다리꼴 平板을 對象으로 일련의 數值 計算을 遂行하고 有限要素法에 의한 結果와 比較 檢討 하므로써 本 研究에서 제시한 方法의 妥當性을 입증하였다.

Abstract

In ship and offshore structures, there exist many local panels of various shapes having many kinds of attachments reducible to damped spring-mass systems. For the vibration analysis of panels, analytical methods such as Rayleigh-Ritz method or the assumed mode method can be efficiently applied. There have been many studies on the vibration analysis of rectangular panels using the analytical methods but relatively few for arbitrary shape panels. An efficient formulation based on the assumed mode method

발 표 : 1993년도 대한조선학회 추계연구발표회('93. 11. 12)

접수일자 : 1994년 2월 15일, 재접수일자: 1995년 7월 18일

* 정회원, 삼성중공업(주) 선박해양연구소

is presented for the vibration analysis of an arbitrary quadrangular plate having concentrated masses, supporting springs such as pillars and spring-mass systems. In the formulation, the natural coordinate system is used for the efficient treatment of an arbitrary quadrangular shape. Through some numerical calculations, accuracy and efficiency of the presented method are shown.

1. 序言

船體, 海洋構造物과 같은 大型 構造物은 대부분 板 構造物로 이루어져 있으며, 이에 各種 機器類, cable 類, Pillar, 彈性支持된 裝備 등과 같이 集中質量, 分布質量, 支持스프링, 質量-스프링 系 등이 附加되는 경우가 많다. 이러한 板 構造物의 振動解析 方法으로 매우 單純한 경우를 제외하고는 嚴密解를 얻기 어렵기 때문에 Rayleigh-Ritz方法, assumed mode method[1]와 같은 解析的 方法과 有限要素法이 주로 이용되고 있다. 有限要素法은 대부분 汎用프로그램을 사용하기 때문에 解析的 方法에 비해 入力 作業이 번거롭고 計算時間이 길어 非 效率的인 경우가 많다. 또한 局部 판넬의 形狀은 直四角形 뿐만 아니라 사다리꼴, 三角形 등 매우 多樣한데 판넬 振動解析에 대해 上記와 같은 解析的 方法을 적용한 研究는 대부분 直四角形인 경우에 대하여 이루어졌다[2-7]. 따라서 任意 四角形 形狀 판넬의 振動解析을 效率的으로 遂行하기위해 解析的 方法을 적용하는 研究가 必要하다.

本 研究에서는 任意 四角形 形狀 平板에 集中質量, Pillar와 같은 支持스프링, 質量-스프링 系 등이 附加된 全體系의 振動解析을 效率的으로 遂行하는 方法으로서 assumed mode method를 적용하는 定式化를 제시한다. 이때 任意 四角形 形狀을 效果的으로 취급하기 위해 特性座標系[8]를 활용한다. 일련의 數值 計算을 遂行하고 有限要素法에 의한 結果와 比較檢討 하므로써 本 研究에서 제시한 方法의 妥當性을 보인다.

2. 定式化

本 定式化는 Fig.1에서와 같이 任意 四角形 形狀의 等方性平板에 均一分布質量, 集中質量, Pillar와 같은 支持스프링, 彈性支持 裝備와 같은 質量-스프링 系 등이 附加된 全體系의 效率的인 振動解析에 대해 assumed mode method를 적용한다.

Fig.2에서와 같이 任意 四角形 形狀을 效率的으로

취급하기 위해 直角座標系 대신 有限要素法의 要素 形狀을 취급하는데 사용되는 特性座標系(Natural Coordinate System)[8]를 이용한다.

2-1 特性座標系(Natural Coordinate System)

任意 四角形 形狀을 效果的으로 표현하기 위해 直角座標系, x-y,와 特性座標系(Natural Coordinate System), r-s,를 Fig.2에서 함께 보여주고 있다. 두 座標系의 變換 關係式은 다음과 같다[8].

$$x = \sum_{i=1}^4 h_i(r,s)x_i \quad (-1 \leq r,s \leq 1) \quad (1)$$

$$y = \sum_{i=1}^4 h_i(r,s)y_i$$

여기서,

$$h_1 = \frac{1}{4}(1+r)(1+s), \quad h_2 = \frac{1}{4}(1-r)(1+s) \quad (2)$$

$$h_3 = \frac{1}{4}(1-r)(1-s), \quad h_4 = \frac{1}{4}(1+r)(1-s)$$

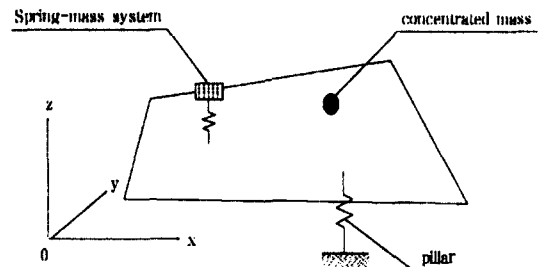


Fig.1 A Quadrangular plate having concentrated masses, pillars and spring-mass systems

直角座標系와 特性座標系 사이의 微分operator와 面積 積分의 變換 關係式은 각각 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{\bar{J}} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial s} & -\frac{\partial y}{\partial r} \\ -\frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial s} \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\iint_A f(x,y) dx dy = \iint_A \bar{f}(r,s) \bar{J} dr ds \quad (4)$$

여기서, \bar{J} 는 Jacobian matrix의 determinant로서 다음과 같다.

$$\bar{J} = \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial y}{\partial s} - \frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial x}{\partial s} \quad (5)$$

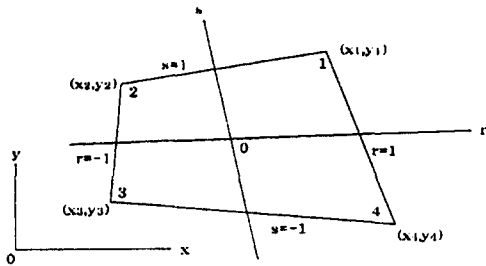


Fig. 2 Natural coordinate system of a quadrangular plate

2-2 境界條件

四角形 平板의 境界條件으로는 Fig.3에서 보여 주듯이 각 邊에서 橫 및 回轉方向에 대해 並進스프링과 回轉스프링으로 支持된 경우를 생각하여 自由 부터 固定 사이의 任意의 支持條件을 고려할 수 있도록 한다. 이들 彈性스프링의 單位 길이 當 스프링 剛性을 邊 $r=-1$ 과 $+1$ 에서 k_{Ri} ($i=1,2,3,4$)이고, $s=-1$ 과 $+1$ 에서 k_{Si} ($i=1,2,3,4$)라고 할 때 이들을 無次元 파라메타 ξ_i ($i=1,2,3,4$) 및 ζ_i ($i=1,2,3,4$)로 다음과 같이 나타낸다.

$$\begin{aligned} \frac{k_{R1}}{D} &= \frac{\xi_1}{2^3}, & \frac{k_{R2}}{D} &= \frac{\xi_2}{2} & \text{at } r &= -1 \\ \frac{k_{R3}}{D} &= \frac{\xi_3}{2^3}, & \frac{k_{R4}}{D} &= \frac{\xi_4}{2} & \text{at } r &= +1 \\ \frac{k_{S1}}{D} &= \frac{\zeta_1}{2^3}, & \frac{k_{S2}}{D} &= \frac{\zeta_2}{2} & \text{at } s &= -1 \\ \frac{k_{S3}}{D} &= \frac{\zeta_3}{2^3}, & \frac{k_{S4}}{D} &= \frac{\zeta_4}{2} & \text{at } s &= +1 \end{aligned} \quad (6)$$

여기서 D 는 판의 굽힘강성으로서 식(16)에서와 같다.

이와 같은 四邊 彈性支持에 대한 境界條件 式은 面內 비틀 效果와 自由端의 corner force를 無視하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} &= -\frac{\xi_1}{2^3} w, & \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} &= \frac{\xi_2}{2} \frac{\partial w}{\partial r} & \text{at } r &= -1 \\ \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} &= \frac{\xi_3}{2^3} w, & \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} &= -\frac{\xi_4}{2} \frac{\partial w}{\partial r} & \text{at } r &= +1 \\ \frac{\partial^3 w}{\partial s^3} &= -\frac{\zeta_1}{2^3} w, & \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} &= \frac{\zeta_2}{2} \frac{\partial w}{\partial s} & \text{at } s &= -1 \\ \frac{\partial^3 w}{\partial s^3} &= \frac{\zeta_3}{2^3} w, & \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} &= -\frac{\zeta_4}{2} \frac{\partial w}{\partial s} & \text{at } s &= +1 \end{aligned} \quad (7)$$

여기서 $w(x,y,t) = w(r,s,t)$ 는 平板의 橫方向 振動 變位이다.

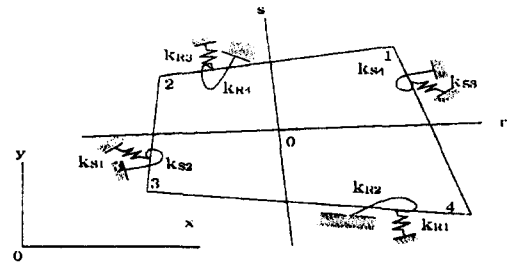


Fig.3 Elastically supported plate against translatory and rotatory displacements

2-3 振動波形 假定

四角形 平板의 振動變位를 特性座標系에서의 單純 固有函數를 사용하여 다음과 같이 近似的으로 나타낸다.

$$\begin{aligned} w(w,y,t) &= w(r,s,t) \\ &= \sum_{m=1}^p \sum_{n=1}^q q_{mn}(t) R_m(r) S_n(s), & -1 \leq r, s \leq 1 \end{aligned} \quad (8)$$

여기서 $R_m(r)$, $S_n(s)$ 은 特性座標系에서 r, s 軸 方向으로 平板과 동일한 境界條件을 갖고 無次元 길이 2인 單純보의 固有函數이다.

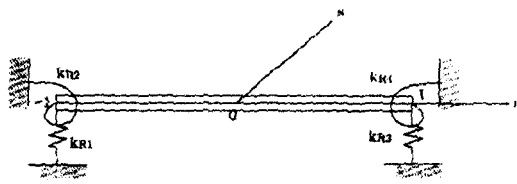


Fig. 4 Boundary condition elastically supported in r-direction

Fig.4에서와 같이 無次元 길이가 2인 單純보의 固有振動에 대한 運動方程式과 境界條件式은

$$\frac{d^4 R_m(r)}{dr^4} - \left(\frac{\alpha_m}{2}\right)^4 R_m(r) = 0, \quad m = 1, 2, \dots, p \quad (9)$$

및

$$\begin{aligned} \frac{d^3 R_m}{dr^3} &= -\frac{\xi_1}{2^3} R_m, \quad \frac{d^2 R_m}{dr^2} = \frac{\xi_2}{2} \frac{dR_m}{dr}, \quad \text{at } r = -1 \\ \frac{d^3 R_m}{dr^3} &= \frac{\xi_3}{2^3} R_m, \quad \frac{d^2 R_m}{dr^2} = -\frac{\xi_4}{2} \frac{dR_m}{dr}, \quad \text{at } r = 1 \end{aligned} \quad (10)$$

이며, 式(9)의 一般解는

$$\begin{aligned} R_m(r) &= A_m \cosh\left(\alpha_m \frac{r}{2}\right) + B_m \sinh\left(\alpha_m \frac{r}{2}\right) \\ &+ C_m \cos\left(\alpha_m \frac{r}{2}\right) + D_m \sin\left(\alpha_m \frac{r}{2}\right) \end{aligned} \quad (11)$$

와 같다. 여기서 α_m 은 길이가 2인 單純보의 m 次 固有值이며, A_m, B_m, C_m, D_m 은 m 次 振動形에 대한 固有函數를 決定하는 未知數들로서 式(10)의 境界條件으로부터 얻어진다. 즉 式(11)을 式(10)에 代入하면 이들을 구할 수 있는 固有值問題를 다음과 같이 얻게 된다.

$$[Z]_m \{U\}_m = \{0\}, \quad m = 1, 2, \dots, p \quad (12)$$

이다. 여기서 $\{U\}_m = [A_m, B_m, C_m, D_m]^T$ 이다.

式(12)로부터 固有值 α_m 을 구할 수 있는 特性方程式(characteristic equation)을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\det([Z]_m) = 0, \quad m = 1, 2, \dots, p \quad (13)$$

任意 次數의 固有值 α_m 에 該當하는 固有벡터

$\{U\}_m$ 은 α_m 을 式(12)에 代入하여 얻는다.

한편 兩端 彈性支持 單純보의 任意 m, n 次 固有函數 $R_m(r), R_n(r)$ 은 다음의 直交關係式을 만족한다.

$$\int_{-1}^1 R_m(r) R_n(r) dr = 0, \quad m \neq n \quad (14)$$

$S_n(s)$ 에 대한 固有解 및 直交關係式은 運動方程式(9)와 境界條件 式(10)에서 R_m, r, ξ_i 대신 S_n, s, ξ_i 로 바꾸어 동일한 方法으로 얻을 수 있다.

2-4 에너지 算定

任意 四角形 形狀 平板의 振動解析을 assumed mode method에 의해 遂行하기 위해 全體系의 運動에너지, 變形에너지를 구해야 한다. 全體系의 에너지는 각 構成 要素의 에너지 寄與分을 合하여 다음과 같이 얻는다.

(1) 四角形 等方性 平板 및 附加된 分布質量

⊙ 運動에너지 :

$$\begin{aligned} T_p &= \frac{1}{2} (\rho h + M_a) \iint_A \dot{w}(x, y, t)^2 dx dy \\ &= \frac{1}{2} (\rho h + M_a) \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \dot{w}(r, s, t)^2 \bar{J} dr ds \end{aligned} \quad (15)$$

⊙ 變形에너지 :

$$\begin{aligned} V_p &= \frac{1}{2} \iint_A \left[D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 4D_{xy} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] dx dy \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[D \left(A_r \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + A_s \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + A_{rs} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial s} + A_r \frac{\partial w}{\partial r} + A_s \frac{\partial w}{\partial s} \right)^2 \right. \\ &+ 4D_{xy} \left(B_r \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + B_s \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + B_{rs} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial s} + B_r \frac{\partial w}{\partial r} + B_s \frac{\partial w}{\partial s} \right)^2 \\ &- 4D_{xy} \left(C_r \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + C_s \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + C_{rs} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial s} + C_r \frac{\partial w}{\partial r} + C_s \frac{\partial w}{\partial s} \right)^2 \left. \right] \bar{J} dr ds \end{aligned} \quad (16)$$

여기서 ρ, h, M_a 는 각각 平板의 質量密度, 두께 및 單位 面積 當 附加 分布質量이고, D, D_{xy} 는 平板의 굽힘 및 비틀림剛性으로서

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad D_{xy} = \frac{Gh^3}{12}$$

와 같이算定되며, E, G, ν 는 平板의 彈性係數, 剪斷係數 및 Poisson比이며, 特性座標系로 置換한 에너지算式에서의 係數 $A_{ij}(r,s), B_{ij}(r,s), C_{ij}(r,s), D_{ij}(r,s)(i,j=r,s)$ 는 식(3),(4),(5)의 關係를 利用하여 구할 수 있다.

(2) 境界스프링

2.2節에서 記述된 바와 같이 境界의 支持條件으로 주어진 竝進 및 回轉스프링의 變形에 따른 에너지 寄與分은 式(6),(7)을 使用하면 特性座標系에서 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$V_e = \frac{D}{2} \left[\frac{L_1}{2} \int_{-1}^1 \left\{ -\frac{\partial^3 w}{\partial r^3} w + \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \frac{\partial w}{\partial r} \right\}_{r=-1} ds + \frac{L_2}{2} \int_{-1}^1 \left\{ \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} w - \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \frac{\partial w}{\partial r} \right\}_{r=1} ds + \frac{L_3}{2} \int_{-1}^1 \left\{ -\frac{\partial^3 w}{\partial s^3} w + \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \frac{\partial w}{\partial s} \right\}_{s=-1} dr + \frac{L_4}{2} \int_{-1}^1 \left\{ \frac{\partial^3 w}{\partial s^3} w - \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \frac{\partial w}{\partial s} \right\}_{s=1} dr \right] \quad (17)$$

여기서 L_1, L_2, L_3, L_4 는 $r=-1, r=+1, s=-1, s=+1$ 에서 각 邊의 길이이고 나머지 記號는 2.2節에서 說明되었다.

(3) 集中質量

◎ 運動에너지 :

$$T_m = \frac{1}{2} M_c \dot{w}(r_c, s_c, t)^2 \quad (18)$$

여기서, M_c 는 集中質量의 크기이고, r_c, s_c 는 平板上的 附着位置에 대한 特性座標系에서의 座標이며, $\dot{}$ 는 時間에 대한 微分을 뜻한다.

(4) 支持스프링

◎ 變形에너지 :

$$V_s = \frac{1}{2} K_c w(r_p, s_p, t)^2 \quad (19)$$

여기서, K_c 는 支持스프링의 常數이고, r_p, s_p 는 支持스프링 附着位置에 대한 特性座標系에서의 座標이다.

(5) 質量-스프링系

Fig.5에서와 같이 平板 위에 附加된 質量-스프링系에 대한 에너지 寄與分은 다음과 같다.

◎ 運動에너지 :

$$T_{sm} = \frac{1}{2} M_s \dot{z}(t)^2 \quad (20)$$

◎ 變形에너지 :

$$V_{sm} = \frac{1}{2} K_s \{w(r_s, s_s, t) - z(t)\}^2 \quad (21)$$

여기서, M_s, K_s 는 質量-스프링系의 質量 크기 및 스프링 常數이고, r_s, s_s 는 平板上的 附着位置에 대한 特性座標系에서의 座標이며, $\dot{}$ 는 時間에 대한 微分을 뜻한다.

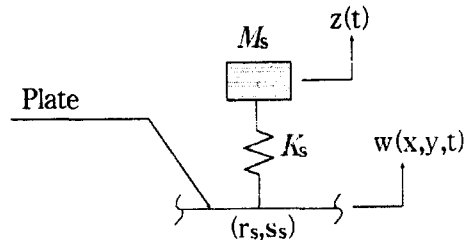


Fig. 5 A spring-mass system attached on a quadrangular plate

(6) 全體에너지

全體 運動에너지는 式(15),(18),(20)을 合하고, 全體 變形에너지는 式(16),(17),(19), (21)을 合하여 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$T = T_p + \sum_{l=1}^{n_m} T_{ml} + \sum_{l=1}^{n_s} T_{sml} \quad (22)$$

$$V = V_p + V_e + \sum_{l=1}^{n_p} V_{sl} + \sum_{l=1}^{n_s} V_{sml}$$

여기서 n_m, n_p 및 n_s 은 각각 부가된 集中質量, 支持 스프링 및 質量-스프링 系의 갯수를 나타내고, 下添子 l 은 l 번째 該當 附加物에 대한 것을 뜻한다.

式(22)에 式(15)-(21)을 式(8)과 함께 代入하여 정리하면 $q_{mn}(t)$ ($m=1 \cdots p; n=1 \cdots q$)와 質量-스프링 系의 質點 變位 z_k ($k=1, 2, \cdots, n_s$)를 一般座標系로 하는 에너지 算式을 얻을 수 있다.

2-5. 固有振動解析

強制外力과 減衰가 없는 保存系에 대한 Lagrange 運動方程式

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{ij}} + \frac{\partial V}{\partial q_{ij}} = 0, \quad (i=1, 2, \dots, p; j=1, 2, \dots, q) \quad (23)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{z}_k} + \frac{\partial V}{\partial z_k} = 0, \quad (k=1, 2, \dots, n_s)$$

에 全體系의 運動 및 變形에너지 式(22)를 代入하면 式(8)에서의 係數 $q_{mn}(t)$ 와 質量-스프링 系의 質點 變位 z_k ($k=1, 2, \dots, n_s$)를 一般座標系로 하는 ($p \times q + n_s$) 自由度系의 固有振動 運動方程式을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$[M]\{\ddot{U}\} + [K]\{U\} = \{0\} \quad (24)$$

여기서 $[M]$ 과 $[K]$ 는 慣性 및 剛性매트릭스이고, $\{U\}$ 는 一般座標系로서 다음과 같다.

$$\{U\} = [q_{11} \cdots q_{1q} \cdots q_{p1} \cdots q_{pq} z_1 \cdots z_{n_s}]^T \quad (25)$$

또한 모든 積分 演算은 편의상 Gauss 數值積分

$$\int_a^b \int_a^b F(r, s) dr ds = \sum_i \sum_j \alpha_i \alpha_j F(r_i, s_j)$$

을 이용하였다. 여기서 α_i, α_j 및 (r_i, s_i) 는 Gauss sampling point의 加重值 및 座標이다.

固有振動의 경우 $\{U(t)\}$ 는 圓振動數가 ω 인 調和函

數이므로 式(24)는 全體系의 固有振動에 대한 ($p \times q + n_s$) 自由度 系의 固有值問題로 귀착된다.

$$(-\omega^2[M] + [K])\{U\} = \{0\} \quad (26)$$

上記 式에서 얻어진 固有值로 부터 全體系의 固有振動數를 얻을 수 있으며, 固有振動形은 固有벡터를 式(8)에 代入하여 구한다.

2-6 強制振動解析

附加物을 갖는 平板에 作用하는 起振特性으로서 平板 內部에 起振力을 誘發하는 裝備가 있는 경우나, 船體 global 振動으로 부터 平板의 境界를 통해 變位 起振 형태로 傳達되는 경우가 있을 수 있다. 本節에서는 上記 두 가지 起振 형태에 대한 定常狀態應答을 구하기 위한 定式化를 遂行한다.

2-6-1 集中調和起振力에 대한 定常狀態應答

Fig.6에서와 같이 平板 內의 任意의 點 (x_i, y_i) 에 集中調和起振力 $F_i e^{i\omega t}$ ($i = \sqrt{-1}$)가 作用하고, 質量-스프링 系가 附加되어 있는 경우는 任意의 k 번째 質點에 集中調和起振力 $F_k e^{i\omega t}$ 도 함께 作用한다고 생각한다. 이러한 起振特性에 대해 一般座標系 式(25)에서의 一般力 $Q_j e^{i\omega t}$ 는 假想일의 原理를 적용하여 다음과 같이 얻어진다.

(i) $1 \leq j \leq p \times q$ 일때,

$$Q_j = F_i R_m(r_i) S_n(s_i), \quad (j = (m-1) \times q + n)$$

(ii) $p \times q + 1 \leq j \leq p \times q + n_s$ 일때

$$Q_j = F_k, \quad (j = p \times q + k) \quad (27)$$

여기서 (r_i, s_i) 는 平板 內의 加振點에 대한 特性座標系에서의 座標이다.

한편 全體系의 運動 및 變形에너지는 2-4節에서와 同一하나, 強制振動解析에서는 減衰에너지를 함께 고려해야 한다.

따라서 式(22) 및 式(27)을 非保存系에 대한 Lagrange 運動方程式

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{U}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial U_j} + \frac{\partial D}{\partial \dot{U}_j} + \frac{\partial V}{\partial U_j} = 0, \quad (28)$$

$(j = 1, 2, \dots, N)$

에 代入하면, 平板 内部에 集中調和起振力이 作用하는 경우에 대한 強制振動 運動方程式을

$$[M]\{\ddot{U}\} + [C]\{\dot{U}\} + [K]\{U\} = \{Q\}e^{i\omega t} \quad (29)$$

와 같이 얻을 수 있다. 여기서 $[M]$ 과 $[K]$ 는 2-5節에서와 동일한 慣性 및 剛性매트릭스이고, $[C]$ 는 減衰매트릭스로서 實驗 資料 등으로 부터 얻어지는 모우드 減衰比 ζ_r ($r=1, 2, \dots, N$)를 이용하여 고려되는 경우가 많다. 이때 식(28)에서의 減衰에너지 D 는 다음과 같이 표현된다.

$$D = \frac{1}{2} \{\dot{U}\}^T [C] \{\dot{U}\}$$

式(29)의 定常狀態應答은 式(26)의 固有解를 이용하여 모우드 重疊法에 의해 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\{U(t)\} = \left[\sum_{r=1}^N \frac{\{\phi\}_r \{\phi\}_r^T \{Q\}}{m_r (\omega_r^2 - \omega^2 + 2i\zeta_r \omega_r \omega)} \right] e^{i\omega t} \quad (30)$$

여기서 $w_r, \{\phi\}_r, m_r, \zeta_r$ 은 각각 r 次 固有振動形에 대한 固有圓振動數, 固有벡터, modal mass 및 modal damping ratio이다.

따라서 平板 內 任意의 點 (x, y) 에서의 定常狀態應答은 式(30)을 式(8)에 代入하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$w(x, y, t) = w(r, s, t) = [\varphi(r, s)] \{U(t)\} \quad (31)$$

$$= \left[\sum_{r=1}^N \frac{[\varphi(r, s)] \{\phi\}_r \{\phi\}_r^T \{Q\}}{m_r (\omega_r^2 - \omega^2 + 2i\zeta_r \omega_r \omega)} \right] e^{i\omega t}$$

여기서

$$[\varphi(r, s)] = [R_1(r)S_1(s) \cdots R_p(r)S_q(s), 0 \cdots, 0]$$

또한, 任意의 j 번째 質量-스프링 系의 質點에서의 定常狀態應答은 다음과 같다.

$$z_j(t) = U_{p \times q + j}(t), \quad (j = 1, 2, \dots, n_s) \quad (32)$$

2-6-2 調和變位起振에 대한 定常狀態應答

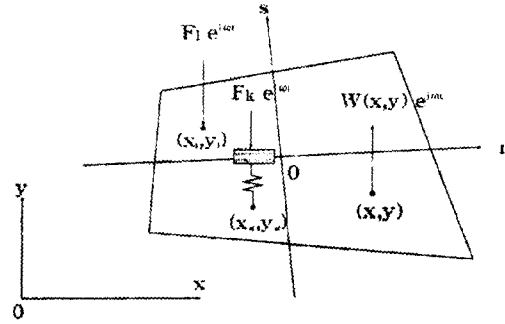


Fig. 6 Harmonic excitation forces applied to a quadrangular plate having attachments

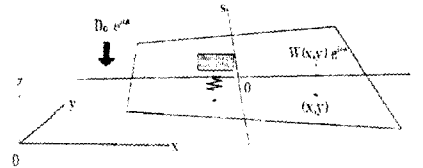


Fig.7 Harmonic displacements excitation applied to a quadrangular plate having attachments

Fig.7에서와 같이 平板의 周邊 境界를 통해 作用하는 橫方向 調和變位起振 $D_0 e^{i\omega t}$ 에 대한 平板과 質量-스프링 系의 質點에서의 定常狀態應答을 구하는 경우에 平板 内部와 質點에서의 相對 變位 應答을 $w(x, y, t)$ 및 $z_k(t)$ ($k=1, 2, \dots, n_s$)라고 하면 絕對變位 應答은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$w_T(x, y, t) = w_T(r, s, t)$$

$$= \sum_{m=1}^p \sum_{n=1}^q q_{mn}(t) R_m(r) S_n(s) + D_0 e^{i\omega t} \quad (33)$$

$$z_{Tk}(t) = z_k(t) + D_0 e^{i\omega t}$$

周邊 境界를 통해 橫 方向으로 調和變位起振이 作用하는 경우에 全體系의 變形에너지는 2.4節에서와 동일하나 全體系의 運動에너지는 剛體運動에 의한 慣性效果를 고려해야 하기 때문에 式(22)에서 運動 에너지 算定時 式(8) 대신 式(33)을 사용하여 얻을 수 있다. 이와 같이 얻어진 에너지 函數를 Lagrange 運動方程式에 代入하면 運動方程式을 다음과 같은 형태로 얻게 된다.

$$[M]\{\ddot{U}\} + [C]\{\dot{U}\} + [K]\{U\} = \omega^2 \{B\}_0 e^{i\omega t} \quad (34)$$

여기서 $[M]$, $[C]$, $[K]$ 는 慣性, 減衰 및 剛性매트릭스로서 式(29)에서와 동일하며, $\{B\}_o$ 는 剛體運動에 의한 慣性力을 반영하고 있다.

式(34)의 定常狀態應答는 式(26)의 固有解를 사용하여 모우드 重疊法에 의해 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\{U(t)\} = \omega^2 D_o \left[\sum_{r=1}^N \frac{\{\phi\}_r \{\phi\}_r^T \{B\}_o}{m_r (\omega_r^2 - \omega^2 + 2i\zeta_r \omega_r \omega)} \right] e^{i\omega t} \quad (35)$$

여기서 ω_r , $\{\phi\}_r$, m_r , ζ_r 은 각각 r 차 固有振動形에 대한 固有圓振動數, 固有벡터, modal mass 및 modal damping ratio이다.

따라서 平板 內 任意의 點 (x, y) 에서의 定常狀態應答는 式(35)를 式(33)에 代入하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$w_T(x, y, t) = w_T(r, s, t) = D_o e^{i\omega t} + [\varphi(r, s)] \{U(t)\} \\ D_o \left[1 + \omega^2 \sum_{r=1}^N \frac{[\varphi(r, s)] \{\phi\}_r \{\phi\}_r^T \{B\}_o}{m_r (\omega_r^2 - \omega^2 + 2i\zeta_r \omega_r \omega)} \right] e^{i\omega t} \quad (36)$$

$$\text{여기서 } [\varphi(r, s)] = [R_1(r)S_1(s) \cdots R_p(r)S_q(s), 0, \dots, 0]$$

또한, 任意의 j 번째 質量-스프링 系의 質點에서의 定常狀態應答는 다음과 같다.

$$z_{Tj}(t) = D_o e^{i\omega t} + U_{p \times q + j}(t), \quad (j = 1, 2, \dots, n_s) \quad (37)$$

3. 數值 計算 및 考察

本 研究에서 제시한 方法의 妥當性을 보이기 위해 Fig.8에서와 같이 사다리꼴 平板에 質量-스프링 系가 附加된 경우에 대해 固有振動解析을 遂行하였다. 사다리꼴 平板의 두께는 8 mm 이고, 材料特性은 一般構造用 鉛鋼에 대한 것으로 취했다. 한편 附加되는 質量-스프링 系에 대해서는 附加位置를 點(1125, 1000)으로 하고, 質量的 크기는 板 自體 質量的 1/2로, 스프링 常數는 質量-스프링 系 自體의 固有振動數가 平板 自體의 基本 固有振動數와 類似하도록 취하여 數值計算을 遂行했다. 本 計算을 위한 컴퓨터로는 PC486-DX2이 사용되었다. 比較目的으로 Workstation HP735에 설치된 MSC/NASTRAN

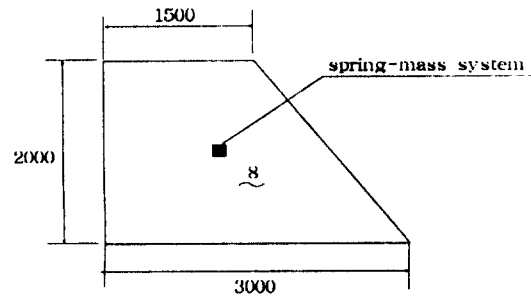


Fig. 8 A quadrangular plate having a spring-mass system(unit:mm)

Table 1. Convergence test of natural frequencies according to the number of terms in assumption of vibratory modes, Eq.(8), for an quadrangular plate (C-C-C-C)

(unit : Hz)

pxq Order	1 x 1	2 x 2	3 x 3	4 x 4	5 x 5	6 x 6	7 x 7
1	18.44	17.46	17.42	17.36	17.35	17.34	17.34
2	-	33.00	31.74	31.64	31.57	31.55	31.54
3	-	40.29	38.23	37.97	37.90	37.86	37.84
4	-	58.31	49.59	48.52	48.21	48.15	48.10
5	-	-	62.86	59.27	59.09	58.97	58.95
run time (seconds)	0.93	1.87	4.34	6.42	9.94	15.10	24.78

을 사용하여 有限要素法에 의한 計算도 함께 遂行하였다.

한편 振動波形 假定에 대한 式(8)에서의 項數에 대한 收斂度를 調査하기 위해 境界條件이 4邊 固定인 平板에 대해 $p=q=1$ 부터 7 까지 증가시키며 計算을 遂行하여 그 結果를 計算時間과 함께 Table 1에 나타내었다. 이로부터 振動波形 假定에 대한 式(8)에서 項數는 $p=q=7$ 로 취하면 충분히 收斂된 結果를 얻을 수 있음을 알 수 있다. 따라서 項數를 $p=q=7$ 로 취하여 境界條件을 四邊 自由, 單純支持 및 固定의 3가지로 變化시키면서 固有振動解析을 遂行한 結果, 固有振動數는 有限要素解析 結果와 함께 Table 2에, 固有振動形은 Fig.9에 각각 보였다. 이로부터 本 研究에서 제시한 方法과 有限要素法에 의한 結果의 相互 符合性은 매우 良好함을 알 수 있다.

또한 強制振動解析의 精度를 檢證하기 위해 境界條件이 四邊 固定인 경우에 대하여 質量-스프링系의 附加位置에서 單位크기(1N)의 調和起振力에 대한

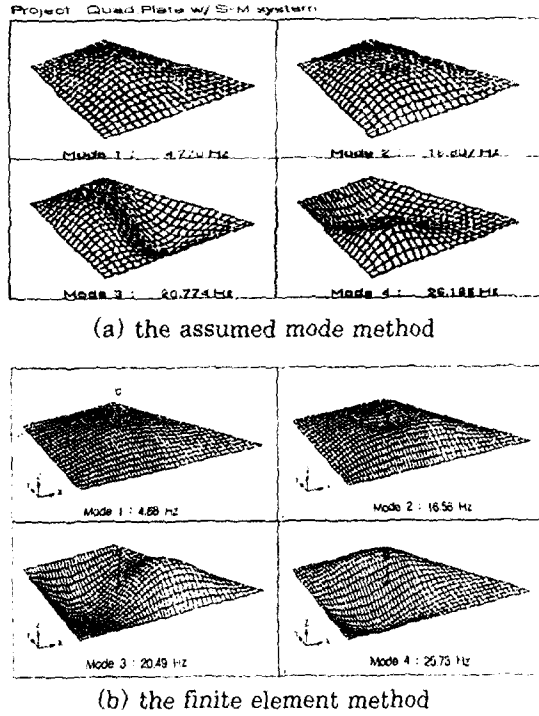


Fig.9 Comparison of calculated mode shapes of a quadrangular plate having a spring-mass system(B.C.: S-S-S-S)

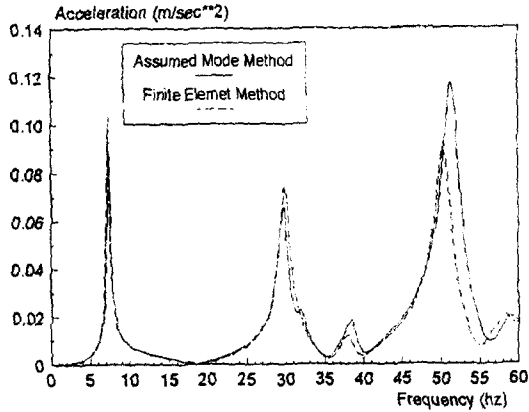


Fig.10 Comparison of calculated results of forced response of a quadrangular plate having a spring-mass system(B.C.:C-C-C-C)

定常狀態應答를 구하였으며, 比較目的으로 有限要素法에 의한 計算도 함께 遂行하였다. 이때 모우드 減衰比는 모든 振動形에 대하여 2%로 假定하였다. 計

Table 2 Calculated natural frequencies of a quadrangular plate without/with a spring-mass system ($M_s = 141.3\text{Kg}$)

(unit : Hz)

B.C	Method	Assumed Mode Method		Finite Element Method		Spring Constant (10^7N/m)
		case-1	case-2	case-1	case-2	
F-F-F-F	1-1	5.25	4.41	5.06	4.33	1.6
	1-2		6.67		6.50	
	2	8.01	8.10	7.88	7.95	
	3	10.74	11.00	10.55	10.75	
	4	14.24	15.13	13.82	14.76	
S-S-S-S	1-1	9.61	4.77	9.37	4.68	5.2
	1-2		16.81		16.56	
	2	20.77	20.77	20.49	20.49	
	3	25.96	26.17	25.55	25.73	
	4	34.89	36.40	34.20	35.54	
C-C-C-C	1-1	17.34	7.39	17.32	7.35	16.8
	1-2		29.85		29.58	
	2	31.54	31.80	31.49	31.71	
	3	37.84	38.48	37.76	38.35	
	4	48.10	51.54	47.98	51.21	

Note : case-1 : without a spring-mass system
case-2 : with a spring-mass system

算結果는 Fig.10에 각각 나타내었으며, 이로부터 相互 符合성이 매우 良好함을 알 수 있다.

4. 結 言

任意 四角形 形狀 平板에 集中質量, Pillar와 같은 支持스프링, 質量-스프링 系 등이 附加된 全體系의 振動解析을 效率的으로 遂行하는 方法으로서 任意 四角形 形狀을 效果的으로 취급하기 위해 特性座標 系를 활용하고 assumed mode method를 적용하는 定式化를 제시하였고, 일련의 數值計算을 통해 本定式化의 妥當性을 확인하였다.

參 考 文 獻

- [1] Meirovitch, L. *Analytical Methods in Vibrations*, The Macmillan Company, 1967.
- [2] Young, D., "Vibration of Rectangular Plates by the Ritz Method", *Journal of Applied mechanics*, Trans. ASME, Vol.72, 1950.
- [3] 金極天, 丁泰榮, "直四角形 板의 振動解析" 大

- 韓造船學會誌 第14卷 第1號, 1977.
- [4] Whaley, P.W., "Prediction of the Change in Natural Frequency of a Cantilevered Flat Plate with Added Lumped Mass," *Journal of Sound and Vibration*, Vol.69, No.4, 1980.
- [5] 渡部 修, et.al., "質量ハネ系の付いた平板の振動について," 日本造船學會論文集, 第154號, 1983.
- [6] 韓聖容, 金極天, "彈性支持附加物 또는 集中質量을 갖는 補剛板의 振動解析," 大韓造船學會誌, 第14卷 第1號, 1986.
- [7] 韓聖容, 鄭重鉉, "一般的 周邊彈性支持 및 各種附加物을 고려한 直四角形 局部판넬의 振動解析," 大韓造船學會 秋季研究發表會 論文集, 1992, pp.95-101.
- [8] Bathe, K.J., *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Prentice-Hall, Inc., 1982.