

大韓造船學會論文集  
 第 32 卷 第 3 號 1995 年 8 月  
 Transactions of the Society of  
 Naval Architects of Korea  
 Vol. 32, No. 3, August 1995

## 직접법을 이용한 Poisson 방정식 수치해법에 관하여

신영섭\*, 이기표\*\*

### A Numerical Analysis on the solution of Poisson Equation by Direct Method

by

Y. S. Shin\* and K. P. Rhee\*\*

#### 요 약

비압축성 가정하에 Navier-Stokes 방정식을 이용하여 비정상 점성유동을 수치해석하기 위해서는 매시간 단계에서 타원형 압력 Poisson 방정식의 해를 구해야 하며, 이에 많은 계산시간이 소요된다.

본 논문에서는 직접법을 이용하여 압력 Poisson 방정식을 수치해석하였으며, 분할수 증가에 따른 소요시간 문제를 다루었다.

Green 정리를 압력 Poisson 방정식에 적용하면 주어진 문제는 경계치문제로 변환되고, convolution 형의 영역적분은 F.F.T. 를 이용하여 계산시간을 단축할 수 있어, 직접법 이용시 소요시간은 경계치문제의 해를 구하는 데에 좌우된다.

직접법의 검증을 위하여 해석해를 알고 있는 경우에 대하여 수치해석하였고, 물체경계조건과 정합문제에 관하여 수치해석 하였는데, 분할수가  $(n, n)$  시  $O(n^3)$  미만의 계산시간으로 수치해석할 수 있었다.

#### Abstract

In the numerical analysis of incompressible unsteady Navier-Stokes equation, large time is required for solving the pressure Poisson equation of the elliptic type at each time step.

In this paper, a numerical analysis by the direct method is carried out to solve the pressure Poisson equation and the computing time is analyzed as mesh size increases. The pressure Poisson equation can be transformed to the boundary value problem by the Green theorem. The computing time for the convolution type of the domain integral can be reduced by using F.F.T. and the computing time in the direct method depends

---

발 표 : 1993년도 대한조선학회 추계연구발표회('93. 11. 12)

접수일자 : 1994년 2월 15일, 재접수일자: 1995년 7월 18일

\* 정회원, 한라공업전문대학 조선과

\*\* 정회원, 서울대학교 조선해양공학과

entirely on obtaining the solution of the boundary value problem.

The numerical analysis on the known solutions is carried out and compared for the verification of the direct method. And the numerical analysis on the body boundary and domain decomposition problem are carried out with the computing time less than  $O(n^3)$  in the  $(n,n)$  mesh.

## 1. 서론

비압축성 가정하에 Navier-Stokes 방정식을 이용하여 비정상 점성유동을 수치해석하는 단계를 시간과 공간으로 나누어 보면, 각시간단계에서는 타원형의 압력 Poisson 방정식을 풀어야 되고, 이에 많은 계산시간이 소요됨을 알 수 있다.

압력 Poisson 방정식의 해법으로는 유한차분법(finite difference method)과 같이 어떤 점에서의 해의 변화가 그 점 주위의 해에 주 영향을 주고 이 과정을 축차법을 이용하여 점진적으로 전체해를 구하는 국부적방법(local method) 또는 스펙트럴법(spectral method) 이나 경계요소법(boundary element method) 에서와 같이 어떤 점에서의 해의 변화가 전체해에 바로 영향을 주는 직접법(direct method) 을 사용할 수 있다.

Hockney[1]는 압력 Poisson 방정식을 단순형상 및 단순경계조건에 국한하여 국부적방법과 직접법의 수치해석결과를 비교하였는데, 이 경우 직접법이 분할수 증가에 따라 계산시간과 정확도면에서 유리함을 보인 바 있다. 한편 Davis, Moore & Purtell[2] 은 관내에 물체가 있을 때의 비정상 점성유동문제 해석시, 해의 정확도를 높이기 위하여 직접법에 의해 압력 Poisson 방정식을 수치해석한 바 있다. 여기서 직접법은 Swartrauber[3]에 의한 cyclic reduction method 를 이용하였다.

직접법은 지배방정식, 영역의 형상 및 경계조건에 많은 제한을 받는다. 직접법이 가장 효과적으로 사용되는 경우는 사각형영역이 등간격으로 분할되었을 때이며, 지배방정식은 상수계수의 선형편미방정식이고 특정한 경계조건하일 때이다. 즉 대칭성과 변수분리를 이용할 수 있는 경우를 의미하므로 일반적인 경우에는 직접법이 갖고 있는 계산시간이나 정확도면에서의 이점을 상실한다. 최근에는 일반적인 편미방정식인 경우에도 선형 상수계수이외의 항을 강제항으로 처리하여 축차법으로 해석하는 방법, 복잡한 영역을 분리하여 정합면에서 정합하는 방법 등이 소개되어 직접법의 단점을 보완하고 있다.

본 논문에서는 Green 정리를 기저로한 직접법을 이용하여 압력 Poisson 방정식을 수치해석하였다. Green 정리를 압력 Poisson 방정식에 적용하면 주어진 문제는 경계치문제로 변환되고, convolution 형의 영역적분은 F.F.T. 를 이용하여 계산시간을 단축할 수 있어, 직접법 이용시 소요시간은 경계치문제의 해를 구하는 데에 좌우된다. 이 방법은 스펙트럴법에 비해 일반적인 경계조건처리가 용이하고, 축차법을 이용하여 해를 구하므로 비정상문제시에도 전시간단계의 정보를 사용할 수 있는 장점을 가지고 있다. 여기서 사용한 Green 함수는 국부적방법과의 정합을 가능하게 하기 위하여 이산화된 Poisson 방정식을 만족하는 Green 함수를 사용하였다.

직접법의 검증을 위하여 해를 알고 있는 경우에 대하여 수치해석하여 비교하였고, 물체경계조건과 정합문제에 대하여 수치해석하였다. 경계조건과 분할수에 따른 소요시간을 조사하였는데, 분할수를  $(n,n)$  으로 하였을 때,  $O(n^3)$  미만의 계산시간으로 수치해석할 수 있음을 알 수 있었다.

## 2. 기본 방정식

2차원 비정상, 비압축성 유동을 가정하면 무차원화된 연속방정식 및 지배방정식은 다음과 같다.

연속방정식

$$D \equiv \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.1)$$

지배 방정식

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{R_n} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{R_n} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (2.2)$$

여기서  $u, v$  는 특성속도  $U_0$ ,  $x, y$  는 특성길이  $L$ ,  $t$  는  $L/U_0$ ,  $p$  는  $\rho U_0^2$  으로 무차원화되었고  $R_n = U_0 L / \nu$  을 의미하며  $\rho, \nu$  는 각각 유체의 밀도와 동점성계수를 의미

한다.

F, G 를 다음과 같이 정의하고,

$$F \equiv \frac{1}{R_n} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial uv}{\partial y} \quad (2.4)$$

$$G \equiv \frac{1}{R_n} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial uv}{\partial x} - \frac{\partial v^2}{\partial y} \quad (2.5)$$

식 (2.2), (2.3) 을 시간에 대해 이산화하면 다음과 같다.

$$\frac{u^{n+1}}{\Delta t} = \frac{u^n}{\Delta t} + F^n - \frac{\partial p^n}{\partial x} \quad (2.6)$$

$$\frac{v^{n+1}}{\Delta t} = \frac{v^n}{\Delta t} + G^n - \frac{\partial p^n}{\partial x} \quad (2.7)$$

여기서  $n$  은 시간단계를 의미하며,  $D^{n+1}$  을 0으로 하는 압력 Poisson 방정식은 식 (2.6), (2.7) 로 부터 다음과 같이 표현된다.

$$\nabla^2 p^n = R^n \quad (2.8)$$

여기서  $R_n$  은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} R^n &\equiv \frac{D^n}{\Delta t} + F_x^n + G_y^n \\ &= \frac{D^n}{\Delta t} + \frac{1}{R^n} \nabla^2 D^n - \frac{\partial (u^n)^2}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial (u^n v^n)}{\partial x \partial y} - \frac{\partial (v^n)^2}{\partial y^2} \end{aligned} \quad (2.9)$$

이러한 비정상유동 수치해석 과정에서 대부분의 계산시간은 매시간단계에서 타원형의 압력 Poisson 방정식의 해를 구하는데 소요된다. 해석방법으로는 유한차분법과 같은 국부적방법 또는 스펙트럴법과 같은 직접법을 이용할 수 있다. 국부적방법은 복잡한 형상이나 일반적인 편미분 방정식일 때에도 쉽게 접근할 수 있는 장점을 갖고 있으나 분할수를 증가할수록 축차횟수가 증가하여 계산시간이 많이 소요되는 단점을 갖고 있다. 2차원 Dirichlet 경계조건이 주어진 사각형유동 (Duct flow) 에 대하여 유한차분법으로 수치 해석하는 경우, 완화계수를 잘 선정하여도 축차횟수는 분할수에 비례하게 되어 분할수가  $(n, n)$  일 때 계산시간은  $O(n^3)$  인 것으로 알려져 있다. 이에 반해 직접법은 상수계수의 선형편미분방정식, 단순형상 및 특정경

계조건 문제가 아니면 적용하기가 어려우나 영역의 대칭성이나 변수분리를 이용할 수 있는 경우에는 계산시간과 정확도면에서 장점을 갖고 있다.

본 연구에서는 Green 정리를 이용한 직접법을 다루었다. Green 정리에 의하여 압력 Poisson 방정식의 해는 경계치 문제로 표현되는데, 다른 직접법에 비해 일반적인 경계조건 처리가 용이하고 축차법을 이용하여 해를 구하므로 비정상 유동해석시 전시간단계의 정보를 이용할 수 있다는 장점을 갖고 있다. 한편 Green 함수는 이산화된 Poisson 방정식을 만족하도록하여 유한차분법과 같은 국부적 방법과 정합시에도 해의 불일치가 나타나지 않도록 하였다.

### 3. 수치해석법

#### 3.1 스펙트럴법

다음과 같은 상수계수의 선형편미분방정식이며 단순형상 및 단순경계조건이 주어진 경우에 대하여 스펙트럴법의 특성을 살펴 보면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \nabla^2 p &= R(x, y) \quad \text{in} \quad -L < x, y < L \\ p(0, y) &= p(L, y) = p(x, 0) = p(x, L) = 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

$p, R$  이 다음과 같이 Fourier 급수로 표현가능하다면,

$$p(x, y) = \sum p^k(y) \sin(\pi k x / L) \quad (3.2)$$

$$R(x, y) = \sum R^k(y) \sin(\pi k x / L) \quad (3.3)$$

식 (3.1) 의 편미분방정식은 다음과 같은 상미분방정식으로 변형된다.

$$\frac{d^2 p^k(y)}{dy^2} - \left(\frac{\pi k}{L}\right)^2 p^k(y) = R^k(y) \quad (3.4)$$

식 (3.1) 의 해를 구하기 위하여 영역을  $(n, n)$  으로 이산화하면 식 (3.4)의 상미분방정식은 tridiagonal 형의 연립방정식이 되므로 각 모드의 해를 구하는 데에는  $O(n)$  의 계산시간이 소요되며,  $x$  축 방향의 분할이 등간격이라면 식 (3.2) 에서와 같이 각 모드의 값을 F.F.T. 를 이용하여 역변환을 하면 식 (3.1) 의 해를 구할 수 있으므로, 전체 계산시간은  $O(n^2 \log n)$  이 되는 효율적인 계산방법임을 알 수 있다. 이 경우는 경계조건을 만족시키는 기저함수를 선택하여 지배방정식과 경계조건이 분리되었으며 지배방정식도 상수계수

이므로 식 (3.4)와 같은 간단한 tridiagonal 형태로 표현되었고, 분할도 등간격인 경우가 되어 F.F.T. 를 이용할 수 있기 때문이다. 그러나 일반적인 편미분방정식이나 일반경계조건 및 복잡한 형상인 경우에는 이러한 변수분리 및 대칭성의 특성을 잃게 되어  $O(n^2 \log n)$ 의 계산시간을 유지할 수 없게 된다. 일반 편미분방정식인 경우에도 상수계수 이상의 항을 강제항으로 처리하여 축차법을 이용하는 방법이 소개되고 있으나 영역 내에 국부적 현상이 지배적일 때는 점근해를 구하기가 어려울 것으로 판단되며, 그러한 경우에는 영역을 분리하여 직접법과 국부적방법과의 정합을 하는 것이 효과적일 것으로 생각된다. 따라서 직접법이 보다 다양한 문제로 확장되기 위해서는, 정합이 가능하도록 임의의 경계조건에 쉽게 접근할 수 있어야 하며 국부적방법과 정합시 불일치가 일어나지 않는 것이 요구된다. 한편 여기서의 영역 이산화방법은 유한차분법에서 사용하는 이산화방법을 그대로 이용한 것이며 단지 수치해석방법면에서  $x$ 방향으로는 격자수에 해당하는 기저함수를 택함으로써 수치해석방법이 국부적방법에서 직접법으로 변환되었음을 알 수 있다.

### 3.2 Green 정리를 이용한 직접법

Green 정리를 이용하면 식 (2.8)의 압력 Poisson 방정식의 해는 다음과 같이 표현된다.

$$2\pi p(x,y) = \int (pG_n - p_n G) dl + \iint R G dS \quad (3.5)$$

여기서,

$$G = \log r, \\ r^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2$$

이며  $(\xi, \eta)$  는 특이점좌표를 의미한다. 따라서 주어진 문제는 분할수가  $(n, m)$  일 때,  $2n + 2m$  미지수의 경계치문제로 되어 계산시간은 식 (3.5)의 면적분시간과  $2n + 2m$ 미지수의 연립방정식 해를 구하는 시간에 좌우된다. 면적분계산은 직접계산시  $(n * m)^2$  시간이 소요되나 convolution 형의 적분이므로 분할이 등간격일 때는 F.F.T. 를 이용하면 계산시간을 단축시킬 수 있다.  $P_r(x, y)$ 를 다음과 같이 정의하고,

$$2\pi p_r(x, y) = \iint R(\xi, \eta) G(x - \xi, y - \eta) dS \quad (3.6)$$

식 (3.6) 을 Fourier 변환하면 다음과 같다.

$$2\pi p_r(\omega_x, y) = \int R(\omega_x, \eta) G(\omega_x, y - \eta) d\eta \quad (3.7)$$

$$2\pi p_r(\omega_x, \omega_y) = R(\omega_x, \omega_y) G(\omega_x, \omega_y) \quad (3.8)$$

따라서 구하고자 하는  $P_r(x, y)$ 는 식 (3.8)을 Fourier 역변환함으로써 구할 수 있다.

$$2\pi p_r(x, y) = F^{-1}\{R(\omega_x, \omega_y) G(\omega_x, \omega_y)\} \quad (3.9)$$

이러한 과정에서 분할이 등간격이면 Fourier 변환 과정은 F.F.T. 를 이용하여 계산할 수 있으므로 계산시간은  $(n * m) \log(n * m)$ 으로 단축된다. 따라서 전체 계산시간은  $2n + 2m$  연립방정식 해를 구하는 데에 좌우된다. 3.1절에서와 같이 여기에서의 영역 이산화방법도 유한차분법에서 사용하는 이산화방법을 그대로 이용한 것이다. 한편 주어진 경계조건하에서 방정식 (3.5)에 의해 구해진 해는 Green 함수가 이산화된 Poisson 방정식을 만족하지 않기 때문에 유한차분법에 의하여 구한 해와 다르게 된다. 여기서는 유한차분법과 같은 해를 얻기 위하여 다음과 같이 이산화된 Poisson 방정식을 만족시키는 Green 함수를 이용하였다.

### 3.3 Green 함수

Green 함수는 다음과 같이 이산화된 Poisson 방정식과 경계조건을 만족시키며, 유한차분법을 이용하여 구한다.

$$\nabla^2 G = \frac{G_{i+1,j} - 2G_{i,j} + G_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{G_{i,j+1} - 2G_{i,j} + G_{i,j-1}}{\Delta y^2} = \delta_{ij} \\ \nabla G \rightarrow 0 \text{ as } r \rightarrow \infty \quad (3.10)$$

여기서  $\delta_{ij}$ 는  $i=j$ 일 때 1,  $i \neq j$ 일 때는 0을 의미한다. Green 함수를 유한차분법을 이용하여 수치해석시에는 분할수의 증가에 따라 축차횟수가 증가하게 되어 계산시간이 증가하게 되나, 다음과 같이 Green 함수의 초기값을 가정하면, Table 1 에서와 같이 계산시간을 단축시킬 수 있다.

$$\iint \nabla^2 G \, dx dy = \iint \delta_{ij} \, dx dy = \Delta x \Delta y,$$

$$\iint \nabla^2 \log r \, dx dy = 2\pi,$$

이므로

$$G \approx \frac{\Delta x \Delta y}{2\pi} \log r \quad (3.11)$$

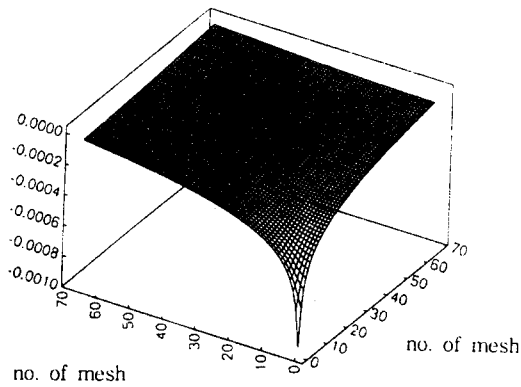


Fig. 1 Numeric source function

Table 1 Comparison of iteration number

mesh size	iteration number without initial value	iteration number with initial value
4 * 4	110	58
8 * 8	329	101
16 * 16	1026	101
32 * 32	3215	95
64 * 64	10345	96

로 가정할 수 있다. Table 1 에는 분할수에 따른 축차횟수를 나타내었다. 여기서 오차는  $\nabla^2 G - \delta_{ij}$  의 최대값을  $10^{-6}$ 으로 하였을 때이며, Fig.1 에는 Green 함수를 도시하였다. Table 1 에서와 같이 가정된 초기해는 축차횟수를 줄이는 데 큰 역할을 함을 알 수 있다.

3.4 Poisson 방정식 수치해석법

해를 Fig.2 에서와 같이 경계면과 영역내 특이점 분포를 하면 다음과 같으며,

$$p = \sum \sigma G + \sum \sum R G \tag{3.12}$$

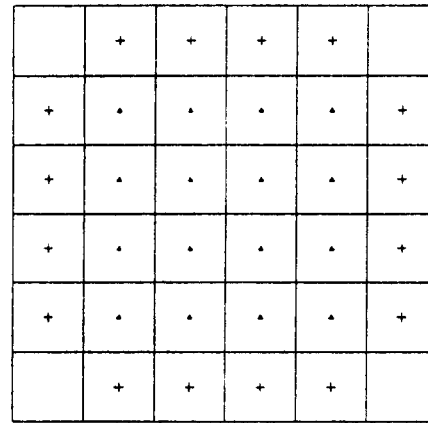
$$p = \sum \mu G_n + \sum \sum R G \tag{3.13}$$

압력의 미분값은 식 (3.12), (3.13)을  $x, y$  각 방향으로 미분하여 구할 수 있다.

$$(p_x, p_y) = \sum \sigma (G_x, G_y) + \sum \sum R (G_x, G_y) \tag{3.14}$$

$$(p_x, p_y) = \sum \mu (G_{nx}, G_{ny}) + \sum \sum R (G_x, G_y) \tag{3.15}$$

여기서  $\sigma$ 는 용출점의 세기를,  $\mu$ 는 더블렛의 세기를



+++++ boundary  
\*\*\*\*\* domain

Fig. 2 Singularity distribution

의미한다. Green 함수가 식 (3.10)의 이산화된 Poisson 방정식을 만족하므로 식 (3.12), (3.13)은 영역내에서 Poisson 방정식을 자동적으로 만족하게 되어, 주어진 문제는 경계조건을 만족시키는 용출점의 세기를 구하는 것으로 귀착된다. 한편 3.2 절에서와 같이 면적분

$$p_r(x, y) = \sum \sum R(\xi, \eta) G(x - \xi, y - \eta) \tag{3.16}$$

은 이산화된 convolution 형이므로 F.F.T를 이용하여 계산한다. 경계면에서 Dirichlet 경계조건이 주어진 경우에는  $\sigma, \mu$ 를 구하기 위하여 식 (3.12), (3.13)을 다음과 같이 변환하고 축차법을 이용한다.

$$G^{i=j} \sigma(x, y) = p(x, y) - \sum_{i \neq j} \sigma(\xi, \eta) G(x - \xi, y - \eta) - \sum \sum f(\xi, \eta) G(x - \xi, y - \eta) \tag{3.17}$$

$$G^{i=j} \sigma(x, y) = p(x, y) - \sum_{i \neq j} \sigma(\xi, \eta) G(x - \xi, y - \eta) - \sum \sum f(\xi, \eta) G(x - \xi, y - \eta) \tag{3.18}$$

즉 미지항인 특이점의 세기를 가정한다. 식 (3.17) 또는 (3.18)을 이용하여 새로운 특이점의 세기를 계산한다. 이 과정을 수렴해가 얻어질 때까지 반복한다. 여기서 위첨자  $i=j$ 는 자기자신에서의 Green 함수값을 의미한다. 식 (3.17)과 식 (3.18)은 경계면에 용출점 또는 더블렛과 같이 특이점의 분포에 차이가 있으며,

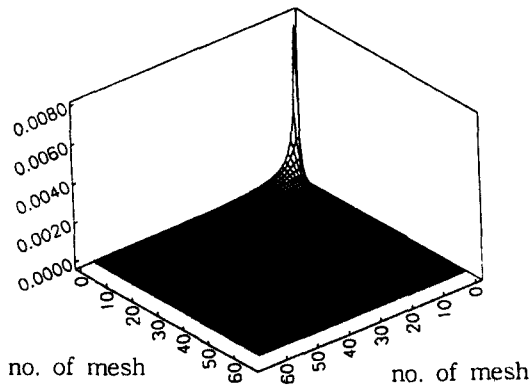


Fig. 3 Numeric dipole function

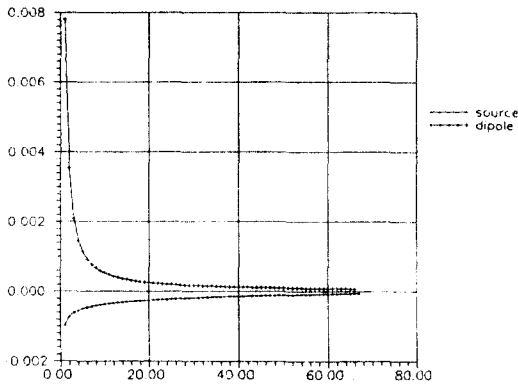


Fig. 4 Comparison of source and dipole

축차법을 적용하는 데에는 더블렛분포방법이 바람직하다. Fig.3에는 더블렛 값을 도시하였고 Fig.4에는 용출점과 더블렛 값을 비교하여 도시하였다. 이로부터 더블렛은 용출점에 비해 자기자신에 의한 영향이 크게 나타나므로 축차방법에 유리함을 알 수 있고 실제 수치해석시에도 특정경계조건이 아닌 경우, 용출점을 분포했을 때에는 접근해를 얻을 수가 없었다. 전체적인 계산시간은 분할수가  $(n, m)$  일 때, 축차횟수 \*  $O(n^2, m^2, nm)$ 으로 되어 계산시간은 축차횟수에 의존하게 된다. 한편 경계면에서 Neumann 경계조건이 주어진 경우에는 Dirichlet 경계조건시에 사용한 식 (3.17), (3.18) 대신에 식 (3.14), (3.15)를 변환하면 식 (3.17), (3.18)에 해당하는 축차식을 얻을 수 있고,

Table 2 Dirichlet boundary condition ( D-D-D-D )

$$e_g = 0.00001, e_p = 0.001$$

mesh size	iteration number	$\epsilon$
4 * 4	9	0.3240
8 * 8	10	0.1267
16 * 16	10	0.0361
32 * 32	10	0.0094
64 * 64	11	0.0026
128 * 128	11	0.0009

$$e_g = 0.00001, e_p = 0.0001$$

mesh size	iteration number	$\epsilon$
4 * 4	12	0.3240
8 * 8	13	0.1267
16 * 16	12	0.0360
32 * 32	13	0.0095
64 * 64	14	0.0025
128 * 128	15	0.0007

위에서와 같이 축차법을 이용하면 해를 구할 수 있다.

#### 4. 계산결과

직접법의 특성과 검증을 위하여 4.1 절에는 경계조건과 분할수가 축차횟수에 미치는 영향을 조사하였고 4.2 절에는 물체경계조건을 고려하였으며, 4.3 절에서는 정합방법에 대하여 설명하였다.

##### 4.1 경계조건 및 분할수 영향

경계조건과 분할수가 축차횟수에 미치는 영향과 해석방법의 검증을 위하여 다음과 같이 해석해를 알고 있는 경우에 대하여 경계조건 및 분할수변화에 따라 수치해석하였다.

$$\begin{aligned} \nabla^2 p &= R, \quad -1 < x, y < 1 \\ R &= -2\pi^2 \cos(\pi x) \cos(\pi y) \end{aligned} \quad (4.1)$$

$p = \cos(\pi x) \cos(\pi y)$  일 때이며, Table 2 에는 Dirichlet 경계조건일 때, 분할수에 따른 축차횟수와 해석해와의 오차를 나타내었다. 경계면에 더블렛을 분포하여 수치해석하였으며,  $e_g = 0.00001$  일 때이고  $e_p = 0.001, 0.0001$  인 경우이다. 여기서  $e_g$  는 3.3 절에서와 같이 이산화된 Poisson 방정식을 만족시키는 Green 함수의 최대오차를 의미하여,  $e_p$  는 경계면에서 경계조건과 수치해석해와의 오차를 의미하고  $\epsilon$  은 영역

내에서 해석해와의 최대오차를 의미한다. Table 2에서와 같이 분할수가 증가하여도 Dirichlet 경계조건시 축차횟수는 일정함을 알 수 있고, 3.1 절에서와 같이 계산시간은  $O(n^2 \log n)$  임을 알 수 있다.

Table 3 에는 Neumann 경계조건에 대한 수치해석결과를 보였다. 여기서  $e_n$ 은 경계면에서 Neumann 경계조건과 수치해와의 최대오차를 의미한다. Table 2 의 결과와 달리 분할수 증가에 따라 축차횟수도 증가하고 있음을 알 수 있다. 그 이유로서는 Neumann 경계조건을 만족시키기 위해서는 축차식에서 더블렛의 미분항이 사용되는데 이 영향이 더블렛의 영향과 다르기 때문이다. 그러나 이러한 경우에는 유한차분법에서와 같이 완화계수를 사용하면 축차횟수를 단축시킬 수 있음을 Table 3에서와 같이 알 수 있고 분할수가 증가할수록 축차횟수를 최소화하는 완화계수값이 증가함을 알 수 있다.

Table 4 . 5 에는 식 (4.2) 와 같이 강제항의 위상

Table 3 Neumann boundary condition(N-N-N-N )

$$e_g=0.00001, e_n=0.01$$

mesh size	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	$\epsilon$
4 * 4	5	4	5	7	12	24	0.2341
8 * 8	5	4	6	9	14	31	0.0908
16 * 16	7	6	6	10	15	33	0.0246
32 * 32	10	8	8	9	14	31	0.0079
64 * 64	17	11	10	11	14	28	0.0038
128 * 128	32	21	13	13	13	23	0.0015

$$e_g=0.00001, e_n=0.005$$

mesh size	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	$\epsilon$
4 * 4	5	4	5	8	13	27	0.2352
8 * 8	6	5	7	10	17	35	0.0909
16 * 16	7	6	8	10	18	36	0.0236
32 * 32	11	9	9	10	16	36	0.0071
64 * 64	19	12	11	11	14	29	0.0039
128 * 128	36	24	15	13	24	31	0.0012

이 다른 경우에 대하여 Table 3과 같이 수치해석하였는데, Table 3 에서와 같은 경향을 얻을 수 있었다.

$$\begin{aligned} \nabla^2 p &= R, \quad -1 < x, y < 1 \\ R &= -2\pi^2 \sin(\pi x) \sin(\pi y) \end{aligned} \quad (4.2)$$

국부적방법과 축차횟수를 비교하기 위하여 결과가 알려져 있는 사각형유동(Duct flow) 에 대하여 축차횟수를 비교해 보았다. Table 6 은 유한차분법을 이용

하여 해석한 경우로 오차를 일정한 값으로 하였을 때, 완화계수값과 축차횟수[4] 를 나타내었다. 축차횟수가  $O(n)$ 이므로 전체 계산시간은  $O(n^3)$ 임을 알 수 있다.

$$\begin{aligned} \nabla^2 p &= R, \quad -1 < x, y < 1 \\ R &= -1 \\ p(-1, y) &= p(1, y) = p(x, -1) = p(x, 1) = 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

Table 4 Dirchlet boundary condition(D-D-D-d)

$$e_g=0.00001, e_p=0.0001$$

mesh size	iteration number	$\epsilon$
4 * 4	12	0.2337
8 * 8	12	0.0530
16 * 16	13	0.0130
32 * 32	13	0.0035
64 * 64	12	0.0011
128 * 128	14	0.0003

Table 5 Neumann boundary condition(N-N-N-N)

mesh size	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	$\epsilon$
4 * 4	6	5	7	9	15	32	0.6666
8 * 8	7	7	7	11	16	35	0.1463
16 * 16	11	9	8	11	16	36	0.0355
32 * 32	23	12	11	12	16	34	0.0112
64 * 64	35	23	15	14	14	30	0.0049
128 * 128	67	46	30	18	16	27	0.0036

Table 6 Dirichlet problem (D-D-D-D) by F.D.M.

mesh size	iteration number	factor
6 * 6	12	1.30
11 * 11	23	1.55
21 * 21	41	1.74
41 * 41	79	1.86

Table 7 Dirichlet problem(D-D-D-D) by direct method

$$e_g=0.00001, e_p=0.001$$

mesh size	iteration number
4 * 4	11
8 * 8	11
16 * 16	10
32 * 32	11
64 * 64	11
128 * 128	11

그러나 직접법인 경우에는 Table 7에서와 같이  $O(n^2 \log n)$ 임을 알 수 있다.

Table 8에는 직접법이 일반적인 경계조건시에도 적용됨을 알기 위하여 해가  $p(x,y) = -(x^2+y^2)/4$  으로 주어진 (N-N-N-D)의 Dirichlet/Neumann 경계조건에 대한 수치해석결과를 도시하였다.

Table 8 Mixed boundary condition (N-N-N-D)

$$e_g = 0.00001, e_p = 0.0025, e_n = 0.025$$

mesh size	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	$\epsilon$
32 * 32	20	18	23	34	73	0.0362
64 * 64	36	30	30	30	47	0.0396
96 * 96	51	43	37	31	44	0.0432
128 * 128	66	55	46	39	41	0.0437

$$e_g = 0.00001, e_p = 0.0005, e_n = 0.005$$

mesh size	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	$\epsilon$
32 * 32	28	24	28	42	89	0.0069
64 * 64	54	45	37	36	56	0.0075
96 * 96	78	65	54	45	52	0.0077
128 * 128	102	85	71	59	50	0.0094

Table 8로 부터 일반경계조건을 적용하여도 수치해석이 가능함을 알 수 있으며, 축차횟수는 Neumann 경계조건시와 같이 완화계수를 적용하면 축차횟수는 감소함을 알 수 있고, 이 경우에도 분할수 증가에 따라 완화계수값은 증가함을 알 수 있다.

#### 4.2 물체경계조건

물체경계조건을 고려하기 위하여 Fig.5 에서와 같이 유체경계면에는 더블렛을 물체경계면에는 용출점을 분포하였는데, 더블렛은 특성상 유량을 만들지 못하므로 물체경계면에는 용출점을 분포하였다. 더블렛이 용출점에 비해 축차법에 유리함을 3.4 절에서 언급하였는데, 물체경계면에서는 Neumann 경계조건이 주어지므로 축차식에서는 항상 용출점의 미분값이 사용되므로 더블렛과 같은 효과를 주게 되어 축차법에 영향을 주지 않는다. 완화계수와 분할수에 따른 축차횟수를 Table 9에 도시하였는데, 물체경계조건을 고려한 경우에도 축차횟수는 앞에서의 결과와 같은 경향을 보이고 있다.

$$\nabla^2 p = R, \quad -4 < x, y < 4$$

$$R = -1$$

$$p_x(-0.5, y) = p_x(0.5, y) = p_y(x, -0.5) = p_y(x, 0.5) = 0$$

$$p(-4, y) = p(4, y) = p(x, -4) = p(x, 4) = 0 \quad (4.4)$$

Table 9 Dirichlet boundary condition (D-D-D-D)

$$e_g = 0.00001, e_p = 0.01$$

mesh size	iteration number
64 * 64	15
96 * 96	15
128 * 128	15

Table 10에는 식 (4.5)와 같은 Dirichlet/Neumann 경계조건 문제에 대한 수치해석 결과를 도시하였다.

$$p(-4, y) = p_x(4, y) = p_y(x, -4) = p_y(x, 4) = 0 \quad (4.5)$$

Table 10 Mixed boundary condition (D-N-N-N)

$$e_g = 0.00001, e_p = 0.01, e_n = 0.1$$

mesh size	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5
64 * 64	47	41	35	30	44	101
96 * 96	64	54	47	40	38	74
128 * 128	84	70	58	49	42	67

#### 4.3 정합방법

직접법의 단점은 복잡한 형상이나 일반적인 편미분 방정식에는 적용이 어렵다는 것이다. 이러한 단점을 극복하기 위하여 영역을 나누어 정합면에서 정합하는 방법 [5]을 이용하여 복잡한 형상에 직접법을 적용하고 있으며, 일반적인 편미분방정식인 경우에는 선형상수 계수 이외의 항을 강제항으로 취급하여 축차법으로 해를 구하는 방법이 시도되고 있다. 그러나 영역내 국부적현상이 지배적인 경우에는 점근해를 얻기가 어려울 것으로 판단되며, 이러한 경우에는 영역을 분리하고 직접법과 국부적방법을 도입하여 정합면에서 정합하는 방법이 효율적이라고 볼 수 있다. 본 연구에서 사용한 직접법은 해가 국부적방법의 해와 같은 결과를 주므로 이러한 정합에 용이하다는 장점을 갖고 있다. 정합방법의 검증을 위하여 다음과 같은 경우에 대해 영역을 등간격으로 4 등분하고 정합면에서 정합하여 수치해석하였다.

$$\nabla^2 p = R, \quad -1 < x, y < 1$$

$$R = -2\pi^2 \cos(\pi x) \cos(\pi y) \quad (4.6)$$



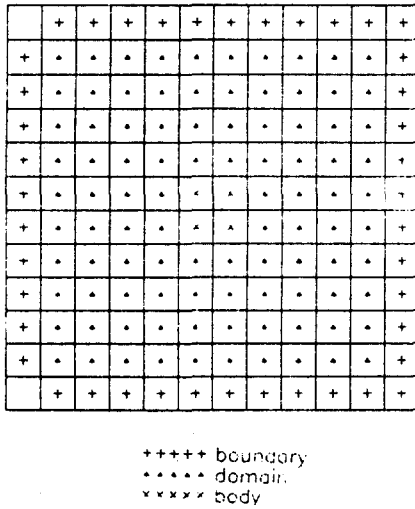


Fig. 5 Singularity distribution

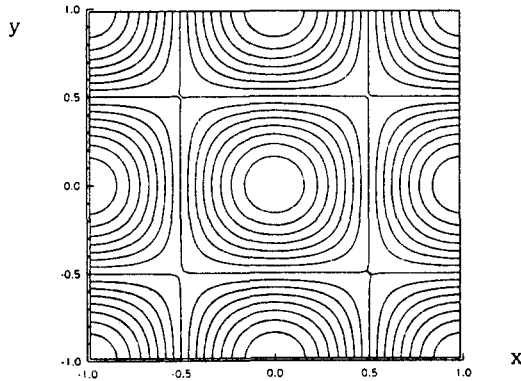


Fig. 6 Pressure contour

정합조건은 정합면에서  $p$ 의 값과 법선방향의 미분항이 같다는 조건을 사용하였다. Fig.6에는 이때의 해를 도시하였는데 정합면( 직선  $x=0, y=0$ ) 에서는 불일치없는 결과를 얻을 수 있었고 Table 11,12 에는 분할수에 따른 영역간 축차횟수, 즉 정합면에서  $p$ 의 값과 법선방향의 미분항이 주어진 오차 이내로 들어왔을 때의 축차횟수를 나타내었다. Table 11 에는 직접법을 이용하여 정합한 결과를, Table 12 에는 4등분중 3등분에는 직접법을 나머지 영역에서는 유한차분법을 이용하여 정합면에서 정합한 결과를 보였다.  $e_f$ 는 유한차분법에서의  $\nabla p - R$ 의 오차를 의미하며, 최대 1000 번으로 제한하여 계산하였다. Table 11,12 에서와 같

Table 11 Dirichlet boundary condition (D-D-D-D)

$$e_g=0.00001, e_p=0.0005, e_n=0.005$$

mesh size	iteration number	$\epsilon$
16 * 16	7	0.0362
32 * 32	6	0.0095
64 * 64	7	0.0038
128 * 128	9	0.0024

$$e_g=0.00001, e_p=0.0005, e_n=0.005, e_f=5 * 10^{-5}$$

mesh size	iteration number	$\epsilon$
16 * 16	18	0.0360
32 * 32	14	0.0095
64 * 64	11	0.0039
128 * 128	14	0.0026

이 해석방법에 따라 축차횟수의 차이는 있으나 접근된 값의 오차는 두 결과가 거의 일치함을 알 수 있다.

### 5. 결론

이상의 수치해석 결과를 통하여 다음과 같은 결론을 얻을 수 있다.

직접법의 계산시간은  $O(n^3)$ 미만임을 알 수 있고, 일반적인 경계조건시에도 적용가능하다. 물체경계조건 역시 용출점을 도입하여 해석할 수 있으며, 복잡한 형상이나 일반편미분 방정식일 때에는 국부적방법과의 정합을 통하여 전유동장을 효과적으로 수치해석 할 수 있다. 본 해석방법을 유체유동에 대하여 적용해 보는 단계가 남아 있으나 본 연구에서는 일차적으로 압력 Poisson 방정식 수치해석방법에 국한하였다.

### 참 고 문 헌

- [1] Hochney R.W. , "Rapid Elliptic solvers" Numerical Methods in Applied Fluid Dynamics, Academic Press , pp 1-48 , 1980
- [2] Davis R.W. , Moore E.F. & Purtell L.P. , "A numerical experimental study of confined flow around rectangular cylinders" , Phys. Fluid , Vol. 27 , pp 46-57 , 1984
- [3] Schwarztrauber, P.N. , "A direct method for the discrete solution of separable elliptic equations" , SIAM J. Numer. Anal. , Vol 11. , pp 1136-1150 . 1974

- [4] C.A.J. Fletcher , "Computational Techniques for Fluid Dynamics" , Springer Series in Computational Physics , 1991
- [5] Claudio Canuto, Alfio Quarteroni, M. Y-

ousuff Hussaini & Thomas A. Zang  
"Spectral method in Fluid Dynamics"  
Springer Series in Computational Physics  
1986