韓國數學教育學會誌 시리즈 A <數學教育>
1995. 12. 제 34권, 제 2호, 265-283.

Journal of the Korea Society of Mathematical Education
Series A: Dec. 1995, Vol. 34, No. 2, 265-283.

한・소 수학교육과정 비교 연구[1)]

- 중학교 대수 영역을 중심으로 -

서 보 억 (한국교원대학교)
신 현 용 (한국교원대학교)
전 평 국 (한국교원대학교)

I. 서 론

1. 연구의 필요성 및 목적

본 연구에서는 중학교 대수영역을 중심으로 한국과 러시아의 대수영역의 교육과정이 가장 잘 나타나 있는 양국의 교과서를 중심으로 비교분석을 수행하고자 한다.

대수학은 수학에 있어서 의사소통과 같이 사용되는 중요한 부분을 차지하고 있을뿐 아니라, 추상적인 단계에서 개념을 조작하고 적용하는 수단과 원상황을 넘어서는 일반화와 통찰을 가능하게 하는 방법을 제공해 주고 있기에 수학교육에 있어서 대수의 학습은 필수적이고 기본적인 영역을 차지하고 있다. (1989, NCTM) 또한, 최근 자연과학기술과 공학기술의 발달로 고도로 발달한 산업사회에서 기존의 전통적인 대수 학습방법을 고수할 것인가 하는 부분에 있어서도 많은 문제가 제시되고 있는 현 시점에서 다른 나라의 대수 교육과정을 알아보고 우리의 교육과정에 비추어 볼 수 있는 있는 것은 의미있는 일이다.

이러한 비교연구를 통해서 우리는 대수의 학습수준과 학습방향, 내용전개를 알아볼 수 있고, 대수학습의 새로운 추세를 탐색해 보는 것은 세계화를 부르짖고 있는 우리의 수학교육에 큰 시사점을 줄 수 있다는 면에서 본 연구의 필요성을 찾을 수 있다.

이 연구의 목적은 최근 많이 대두되고 있는 수학교육과정 개정에 있어서의 다양한 이론적인 근거를 제시하기 위한 기초자료로 사용하기 위한 것이다. 즉, 본 연구에서 러시아 중등 대수교과서를 분석하여 교과서의 내적체제, 내용전개, 수학적 수준, 범위 등을 알아보고 한국과의 차이를 비교함으로써 한국의 교육과정에 참고자료로 사용할 것이다.

2. 연구문제

(1) 한국과 러시아의 중학교 대수 교과서 단원 체제, 학습내용의 구성 등 교과서의 내적인 체제를 비교・분석한다.

(2) 한국과 러시아의 중학교 대수교과서의 학습 내용의 전개 및 내용 제시방법을 비교・분석 한다.

II. 연구방법

1. 연구대상

한국의 중학교에서 배우는 중학교 수학 1, 수학 2, 수학 3의 대수부분과 러시아의 중학교 대수교과서인 대수 7, 대수 8, 대수 9(아래의 교과서) 를 연구대상으로 삼았다.

МАКАРЫЧЕВ. Ю. Н ДР.(1988). АЛГЕБРА 7, МОСКВА
МАКАРЫЧЕВ. Ю. Н ДР.(1988). АЛГЕБРА 8, МОСКВА
МАКАРЫЧЕВ. Ю. Н ДР.(1988). АЛГЕБРА 9, МОСКВА

1) 이 논문은 1990년도 한국학술진흥재단의 공모과제 연구비에 의하여 연구되었음.

2. 연구 방법

본 연구는 비교에 의한 연구방법을 사용한다. 즉, 한국과 러시아에서 사용되고 있는 양국의 수학교과서중에서 대수교과서(또는 수학교과서에서 대수영역)만을 선택하여 내용체계, 구성, 범위, 전개순서 등을 비교·분석하여서 유사성과 상이성을 규명하도록 한다. 이러한 비교분석의 절차로는 다음 단계를 걸쳐 연구를 수행한다.

(1) 자료의 수집과 처리 : 러시아의 일반교육과정과 수학교육과정의 자료와 한국과 러시아의 대수교과서의 수집, 선행연구 자료의 고찰하는 단계

(2) 기술 : 러시아 중학교 대수교과서와 러시아 수학교육과 관련된 자료를 읽고 정리하고 문제를 제기하는 단계

(3) 설명 : 러시아 수학교과서와 관련된 여러가지 배경들 즉, 과거의 교육과정과 교육제도, 사회제도와 과학적 수준등을 바탕으로 검토하는 단계

(4) 병치 : 비교가능한 기준을 설정하고 균형있게 배합 또는 정리하는 단계로 비교분석을 위한 여러가지 가정을 세우고 수학교육과정을 열거하는 등 비교의 예비단계

(5) 비교 : 순차적비교와 혼합비교를 병행하여 사용한다. 대수영역을 집합과 명제, 수, 식, 방정식, 부등식, 함수로 세분화하여 내용을 순차적으로 제시하고 각 내용에 따른 두 나라의 비교를 혼합비교형식으로 실시하는 단계

(6) 결과의 해석

Ⅲ. 이론적 근거

1. 러시아의 수학교육과정

러시아에서 수학에 대한 정의를 살펴보면 그들이 수학에 대한 인식을 더욱 잘 알 수 있을 것이다. '수학이란 양적인 비율과 실제 지구상에 존재하고 있는 공간 도형을 연구하는 과학이다. 수학은 모든 공간의 도형물과 양적인 비율이 수학적 재료로 가질 수 있으므로 지구상의 모든 것이 실제로 수학적인 대상이 될 수 있는 것이다.' 러시아의 수학의 정의에서 볼 수 있듯이 러시아에서는 수학을 상당히 실제적인 면에서 강조하고 있음을 짐작할 수 있다.

이제 최근의 러시아에서 주장하고 있는 수학교육의 목적을 살펴보면, "학생들로 하여금 현대 사회의 모든 구성원들에게 일상생활을 하는데 필요한 그리고 중등학교의 다른 학과와 고등교육의 학습에 필요한 수학지식과 기술들을 완전히 습득하도록 한다." 라고 규정하고 있다. 이 목적으로 볼 때 수학교육에 있어서 첫째, 일상생활과의 연관성에 중점을 두고 있고, 둘째, 수학 그 자체로서의 가치를 존중하고 있음을 알 수 있다.

러시아에서의 학교수학교육을 간단히 살펴보면, 먼저 초등학교 1학년에서 4학년 동안은 주당 4시간씩 '수학'이라는 교과서를 학습하고, 중등학교에서는 5학년과 6학년은 초등수학교육과 중등수학교육의 중간매개체의 역할을 수행한다는 면에서 단일 교과서인 '수학' 교과서를 가지고 기초적인 수학개념을 학습하고 있다. 7학년부터 11학년 까지는 각 과목별로 대수, 기하, 해석으로 나누어져 학습을 하게 되는 데 우리가 여기서 다루게 되는 대수학의 경우는 7학년때는 '대수 7', 8학년에서 '대수 8', 9학년에서 '대수 9'를 학습하고 10학년과 11학년에서는 '대수와 기초해석'이라는 교과서로 학습을 하게 된다. 해석학의 경우는 10학년과 11학년에서만 '대수와 기초해석'이라는 제목으로 2년간 미적분학의 기초개념을 중심으로 학습을 하고 기하학의 경우는 7학년에서 11학년까지 '기하'라는 단일 교과서로 계속 학습을 한다. <표 1>에서는 이러한 수학수업의 시수를 나타내어 주고 있다.

<표 1> 학년별 주당 수학수업 시수

학년	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
시수	4	4	4	4	5	5	5	4	5	3	3

<표 2>에서는 수학학습을 전체 교과목에 대한 비율로 살펴본 표가 제시되어 있다. 이 표에서 특이한 점을 한가지 찾을 수 있는 데 수학에 대한 학습량이 학년이 올라갈수록 감소하고 과학에 대한 학습량을 학년이 올라갈수록 증가한다는 사실이다. 반면 우리나라의 경우는 중등학교의 경우 학년이 올라갈수록 수학교육의 비중이 증가하고 과학교육은 감소하고 있음을 알고 있다.

이것은 러시아의 경우는 앞의 수학교육의 정의에서 보듯이 수학을 과학기술의 기초개념으로 인식하고 있기에 저학년에서는 수학기초 개념에 대한 이해를 위해 수학교과에 많은 시간을 사용하고 있고 학년이 올라갈수록 이를 바탕으로 과학에 많은 시간을 할당하고 있는 듯하다.

<표 2> 수학과 과학의 학습비율(필수과목)

학 년	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
수학학습 비율	21	21	21	21	19.2	18.5	17.9	13.3	13.3	20	20
과학학습 비율	10.5	10.5	10.5	10.5	7.7	11.1	21.4	26.7	26.7	20	20

2. 대수교과서의 내적체제 비교

교과서의 내적체제란 내용조직에 관한 사항을 의미한다. 즉, 단원조직, 학습내용조직, 학습내용계열 등을 들 수 있는데, 여기에서는 대수 7, 대수 8, 대수 9(대수9의 경우는 우리나라 고등학교의 공통수학과 같은 수준이어서 대부분은 배제) 교과서의 단원조직에 대해서 살펴보도록 한다.

1) 학습량의 비교

여기에서는 대수학을 집합과 명제, 수, 식, 방정식, 부등식, 함수로 크게 나누어서 살펴보았다. 이 각각의 영역에 대한 학습량의 비율을 교과서의 내용지면의 비율로 보고 그 학습량을 비교해 보겠다.

<표 3> 대수영역의 학습량의 비교

대 상	한 국		러 시 아	
	페이지	학습비율	페이지	학습비율
집 합	16	4.1	5	1.5
수	119	30.4	53	16.0
식	70	17.9	134	40.4
방정식	69	17.7	69	20.8
부등식	22	5.6	34	10.2
함 수	95	24.3	37	11.1
계	391	100 %	332	100 %

<표 3>을 보면 러시아의 경우는 집합을 거의 다루지 않고 식의 개념에 중점을 두고 있음을 볼 수 있다. 수식, 문자식, 등식, 유리식 등에서 출발하여 자연스럽게 이들 각각의 분야에서 부등식, 방정식, 함수등을 다루고 있기 때문에 이러한 영역들이 상대적으로 낮은 비율로 나타나고 있다.

반면 한국의 경우는 수와 함수 영역에 큰 비중을 두고 가리치고 있음을 볼 수 있다. 이것에 대한 구체적인 내용은 내용비교에서 살펴보도록 하자.

2) 교과서 체제 구성

먼저 교과서의 체제구성을 보면 한국과 러시아의 수학교과서의 내적체제는 다음과 같다.

한 국		러 시 아
앞표지(중학교수학)		앞표지(하드카바)
앞면지(원색화보)	↓	앞면지(수학공식)
속표지(뒷면에 도형)		속표지
머리말	↓	판권
차례		본문
본문	↓	색인
부록(문제의 답지)		답
찾아보기	↓	차례
판권		뒷표지(하드카바)
뒷면지	↓	
뒷표지		

다음으로 본문의 체제를 보면 다음과 같다.

한 국

대단원명(중단원의 목차,단원의 배경,
　　학습의 목적, 단원의 준비학습)
　중단원명(학습목표)
　　소단원명(소제목,물음,내용,보기,예제,
　　　문제)
　　소단원명
　연습문제
종합기본문제
종합심화문제
더 넓은 수학의 세계로(수학이야기)

대단원명

러 시 아

대단원명(중단원명)
　중단원명
　　소단원명(물음,내용설명,예제,문제,지난
　　　소단원의 복습문제)
　　　수학자이야기
　　소단원명
　보충질문
단원보충문제(각 중단원별)

대단원명

수학사 이야기
어려운 문제

Ⅳ. 교과서 내용 비교·분석

한국의 수학교과서는 대수부분을 중학교 1학년에서는 집합과 자연수, 수와 식, 방정식, 함수로 나누고 중학교 2학년에서는 수와 식, 방정식과 부등식, 일차함수를 중학교 3학년에서는 실수와 그 계산, 다항식의 계산, 1차방정식, 함수의 단원으로 학습을 하고 있다. 러시아에서도 이와 비슷하게 구성되어져 있는데 비교·분석의 효율성을 높이기 위해서 대수영역을 아래의 6가지 영역으로 나누어서 분석하고자 한다: 집합과 명제, 수, 식, 방정식, 부등식, 함수.

또, 이들 각 영역별로 양국에서 다루고 있는 개념을 간단한 표를 통해서 살펴보고, 그 표에 나타난 양적인 측면을 설명한 후 양국에서 서로 비교되는 또는 특이한 부분을 더 집중적으로 제시하고자 한다.

러시아의 중학교는 7학년, 8학년, 9학년인데 대수교과서의 경우는 대수 9학년과 한국의 고등학교 공통수학과 내용이 동일한 것이 95%이상을 차지하고 있는 것으로 나타나 우리의 교육과정과 맞지 않아서 극히 일부분만을 이 연구의 대상으로 한다.

1. 집합과 명제

집합과 명제에 대한 두 나라의 지도 내용을 표로 정리하면 다음과 같다(<표 4>).

<표 4> 집합과 명제에 대한 내용 비교

	한국	러시아
집합	o	x
원소	o	x
집합의 표시법	o	x
원소의 개수	o	x
집합의 포함관계	o	o
교집합	o	x
합집합	o	x
차집합	o	x
여집합	o	x
명제	x	o
필요조건	x	o
필요충분조건	x	o

집합과 명제 단원은 새수학 운동이후 지속적으로 강조되어온 수학의 기초분야로서 한국에서는 다양한 개념들을 폭넓게 다루고 있는 반면 러시아에서는 집합에 대한 개념은 거의 다

루지 않고 있다.

한국은 집합과 원소의 개념, 집합의 표시방법으로 원소나열법과 조건제시법 등을 포함 집합의 연산에 이르기까지 현대수학의 바탕이 되는 집합개념을 학습하고 있다. 러시아에서 학습하고 있는 집합개념은 단 한개로 포함관계에 대한 정의밖에 보이지 않는다. 물론 교과서 전 영역에서 약간의 집합적인 요소는 발견할 수 있지만 구체적인 언급은 전혀없는 실정이다.

그런데, 집합과 명제의 영역에서 찾아볼 수 있는 특이한 사실을 러시아 교과서에서 찾을 수 있는데 그것은 명제의 정의와 충분조건과 필요충분조건의 도입이다. 한국에서는 공통수학(고등학교 1학년)에서 학습을 하게 되는 데 러시아에서는 7학년에서 학습을 하고 있다. 집합의 개념을 거의 다루고 있지 않은 상태에서 이러한 개념의 도입은 상당히 의외였다. 물론 이 개념을 도입하는 동기는 명제의 논리성이 아닌 방정식의 풀이에서 각 단계 단계는 서로 동치라는 사실을 설명하기 위해서 도입을 하였지만 작은 분량에 상당히 의미있는 내용을 싣고 있는 듯하다.

간단하게 그들이 어떻게 이 개념을 설명하고 있는지에 대해서 살펴보도록 한다.

첫째, 닮아간다(충분조건) 이다. 다음 명제를 보자. 명제 p는 '정수 x의 마지막 자리숫자가 0 이다.' 명제 q는 ' x는 5로 나누어진다.' 라고 하자. 이 경우 p는 q 를 닮아간다라고 하고, 다음과 같이 적는다. $p \Rightarrow q$. 즉, 이 경우는 앞의 명제는 뒤의 명제의 일부분에 속하므로 닮아간다는 용어로 설명을 하고 있다. 그리고 다음의 경우는 p는 q 를 닮아가지 않는다라고 한다. 명제 p는 'a는 짝수이다.' 명제 q는 'a는 4배수이다.' 이 경우는 앞의 명제의 일부분이 뒤의 명제가 되므로 닮아간다고 할 수 없다라고 한다. 그렇게 어려운 개념은 아니지만, 닮아간다라는 말로 우리가 고등학교에서 배우는 충분조건을 설명하고 있다.

둘째는 동치(필요충분조건)에 관한 것이다. 동치는 아래와 같이 정의를 내린다. p가 q를 닮아가고, q가 p를 닮아갈 때 p와 q는 서로 동치라고 하고 다음과 같이 적는다. $p \Leftrightarrow q$

2. 수

수 개념에 대한 두 나라의 지도 내용을 표로 정리하면 다음과 같다(<표 5>).

<표 5> 수에 대한 내용 비교

	한국	러시아
약수와 배수	o	x
소인수 분해	o	x
거듭제곱	o	o
공약수·공배수	o	x
최대공약수·최소공배수	o	x
기수법과 그 연산	o	x
정수의 도입	o	o
유리수의 도입	o	o
절대값	o	o
유리수의 대소관계	o	o
정수와 유리수의 연산	o	o
유리수의 소수표현	o	x
순환소수·무한소수	o	x
근사값	o	o
오차의 한계	o	o
제곱근과 그 성질	o	o
완전제곱수	o	x
무리수의 정의	o	o
실수의 정의	o	o
제곱근의 계산	o	o
제곱근표	o	o
제곱근의 근사값	o	o
분모의 유리화	o	o
실수의 대소관계	o	o
상대오차	x	o
근사값의 사칙연산	o	o
$\sqrt{x}$의 값의 수열로 구하기	x	o
제곱표	x	o

러시아에서는 약수와 배수, 2, 3, 4, 5, 9의 배수의 판정법, 소인수 분해, 공약수와 공배수의 개념을 모두 5 - 6학년의 수학에서 모두 학습하기 때문에 중학교에서는 학습을 하고 있지 않는 것으로 나타났다. 전반적으로 볼 때 한국에서 수의 부분에 상당히 많은 시간(전체의 30%) 을 할당하고 있는 것으로 보아 상당히 강조하고 있는 부분으로 보여진다. 대체로 한국이 학습하고 있는 영역을 요약하면, 자연수의 영역에서는 약수와 배수, 소인수 분해, 거듭제곱, 기수법 등을 학습을 하고 있고, 정수의 분야에서는 먼저 자연수의 개념에서 음의 개념을 도입하여 정수의 개념을 유도하는 단계를 다루고 있다. 그리고, 정수의 사칙연산과 대수관계등을 강조하고 있다. 이제 정수의 개념을 확대하여 유리수를 정의하고 유리수의 소수표현과 근사값 등을 학습하도록 하고 있다. 이제 중학교 3학년이 되면 최초로 무리수라는 생소한 수를 도입하게 되는데 이 개념을 기초로 실수의 정의를 내리고 있다.

러시아에서도 우리와 비슷한 순서에 의해서 수영역을 전개시켜 나가고 있는데 우리가 학습하고 있지 않는 부분과 상이한 점을 중심으로 살펴보도록 하자.

러시아에서만 다루고 있는 개념으로 상대오차와 $\sqrt{x}$ 의 값의 수열에 의한 근사값 계산, 제곱표가 있다.

첫째, 상대오차에 대해서 살펴보자.

오차란 참값과 근사값의 차를 근사값의 오차라고 한다. 즉, 근사값의 오차=참값−근사값(따라서, 오차는 양수, 음수 모두 가질 수 있다.) 인 것이다. 이 오차의 개념을 조금 수정하여 절대오차를 도입하는 데, 절대오차란 근사값의 오차에 대한 절대값으로 정의를 내리고 있다.

즉, 절대오차 =| 참값 − 근사값 |(항상 양수만을 취한다.) 이 되는 것이다. 하지만 이 개념만으로는 불충분한 것이 있는데 다음과 같은 이유 때문이다. b와 l 의 값은 다음과 같은 범위에 존재한다고 하자. $b=6\pm0.5$이고 $l=200\pm0.5$

이 두 값의 오차의 한계는 서로 0.5로 같다. 하지만 그 의미는 상당한 차이가 있다. 따라서, 이것을 보완하여 주기 위해서 상대오차라는 개념을 도입하고 있는 것이다. 즉, 상대오차란 다음과 같이 정의를 내린다.

$$\text{상대오차} = \frac{|x-a|}{|a|} = \frac{|\ \text{참값} - \text{근사값}\ |}{|\ \text{참값}\ |}$$

$$\left(\text{일반적으로}\quad \varepsilon = \frac{h}{|a|}\right)$$

예를들면, b ≈ 0.4 정확한계 0.1 이면 이것의 상대오차는

$$\frac{0.1}{0.4}\times100=25\%$$

이고, b ≈ 100 정확한계 0.1이면 이것의 상대오차는

$$\frac{0.1}{100}\times100=0.1\%$$

되는 것이다.

둘째는 $\sqrt{x}$ 의 계산에 대한 식의 유도이다. 한국에서도 과거에는 $\sqrt{x}$ 의 값을 계산하는 방법을 배웠지만 이와같은 방법이 아니었다. 러시아는 이 값의 계산을 위해 수열의 방법을 도입하였다.

$\sqrt{x}$ 의 근사값의 계산을 위한 순차적인 공식의 유도과정을 싣고 있다. 그 과정은 간단히 정리하면, $\sqrt{2}=y_1+a_1$ 이라 적을 수 있다. 이때, 부
분이다. 그러면,

$$a_1 \doteqdot \frac{2-y_1^2}{2y_1}$$

이다. 그리고, y_2를 제2근사값이라고 하고 a_2를 그것의 나머지 부분이라고 하면, $\sqrt{2}=y_2+a_2$ 이고,

$$y_2=y_1+\frac{2-y_1^2}{2y_1}=\frac{y_1^2+2}{2y_1}$$

같은 방법으로 계속하여 가면,

$$y_n = \frac{1}{2}\left(y_{n-1} + \frac{x}{y_{n-1}}\right)$$

을 유도할 수 있고, y_n의 값은 $\sqrt{x}$ 의 값에 근사한다.

예를 들어서, $\sqrt{5}$ 의 값을 구하여 보자. 위의 공식에 의해서

$$y_n = \frac{1}{2}\left(y_{n-1} + \frac{5}{y_{n-1}}\right)$$

즉, $y_1 = 2$이고,

$$y_2 = \frac{1}{2}\left(2 + \frac{5}{2}\right) = 2.25$$

$$y_3 = \frac{1}{2}\left(2.25 + \frac{5}{2.25}\right) \fallingdotseq 2.2361$$

$$y_4 = \frac{1}{2}\left(2.2361 + \frac{5}{2.2361}\right) \fallingdotseq 2.23605$$

와 같은 방법으로 $\sqrt{5}$의 값을 계산할 수 있다.

세째는 제곱표이다. 이 표는 11에서 99까지의 수의 제곱이 나타나 있는 표로 이 표의 이용은 근사값의 계산에 있다. 즉, 이 표를 이용하여 모든 수의 제곱의 값을 구하고자 하는 것이다. 예를 들면, 230의 제곱의 값은 23의 제곱을 제곱표에서 찾아서 100을 곱하여 주는 식의 방법으로 다른 모든 수의 제곱도 근사적으로 구할 수 있다.

이제는 한국과 러시아에서 공통적으로 다루어지고 있는 내용중에서 한국과 차이를 보이고 있는 영역에 대해서 서로 비교하면서 살펴보기로 하자.

(1) 십의 거듭제곱의 사용

이 개념에 있어서 양국은 약간의 의견의 차이를 보이고 있다.

한국에서는 근사값의 단원에서 근사값을 간단하게 표현하는 하나의 형식으로 다루고 있다. 그 표현방법은 근사값이 자연수인 경우에 자리잡기를 위한 0과 유효숫자인 0을 구별하기 위하여 근사값의 유효숫자들로 이루어진 부분을 정수부분이 한자리만 차지하도록 나타내고 여기에 10의 거듭제곱을 곱한 꼴로 나타내는 것이다. 즉, (소수점 위가 한 자리인 수) × (10의 거듭제곱) 예를들면 $2.45 \times 10^5 = 245000$이 된다.

반면, 러시아에서는 이것을 독립된 하나의 소주제로 다루면서 '수의 표준형'이라는 용어를 사용하고 있다. 즉, 이 개념을 설명하기 위해서 아주 작은 수와 아주 큰 수의 예인 분자의 지름과 태양의 지름을 각각

0.00000003cm, 1390600000m

로 제시하고 이 수를 표현하기 위한 방법으로

$$a \times 10^n (1 \leq a < 10)$$

꼴로 나타낼 수 있는데 이것을 수의 표준형이라고 정의내리고 있다. 즉, 분자의 지름은 3×10^{-8}cm 으로, 태양의 지름은 1.3906×10^9 m으로 나타낸다.

(2) 무리수의 도입

한국에서는 다음과 같은 단계로 무리수를 도입하고 있다.

① 도입단계 : 다음 빈칸에 알맞는 수를 채워라.

x	-4	-3	0	1	3
x^2	16				

② 제곱근의 정의: 0 또는 양수인 a 에 대하여 $x^2 = a$인 수 x 를 a 의 제곱근이라고 한다. 이 때, 음의 제곱근과 양의 제곱근이 존재한다.

③ $\sqrt{0} = 0$ 으로 정의를 내린다.

④ 무리수의 도입: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ 은 정수는 아니고, 이 수를 제곱하면 정수가 되므로 유리수도 아니다. 따라서, 이러한 수를 무리수라고 정의를 내린다.

⑤ 실수의 정의: 무리수와 유리수의 합집합

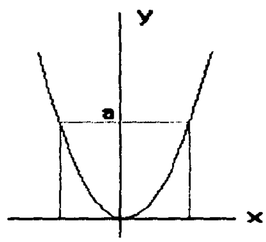
은 실수의 집합이다. 반면에 러시아에서는 실제적인 예와 엄밀한 증명을 통해서 무리수를 도입하고 있는데 다음과 같은 순서에 의해서, 무리수의 개념을 도입하고 있다.

① 도입: 정사각형 모양의 땅의 넓이를 생각하여 보자. 넓이가 64가 되는 정사각형의 땅의 한 변의 길이는 얼마가 되겠는가 ?

② 넓이의 계산: $x^2=64$ 이므로 실제로 $x=\pm 8$과 같다.

③ 제곱근의 정의: 제곱하여 a 가 되는 수를 a 의 제곱근이라고 한다.

④ 이차그래프를 이용하여 제곱근의 값의 제시



<그림 1>

⑤ $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ 의 유리수가 아님의 증명. 그래프를 통해서 근사값을 추정하여 본다.

⑥ 무리수의 정의: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ 와 같은 수를 위의 증명을 근거로 무리수라고 정의를 내림.

⑦ 실수의 정의: 무리수와 유리수의 합집합으로 정의내린다.

(3) 유리수의 정의의 차이에 대해서 살펴보자.

한국에서는 유리수의 정의를 양의 유리수(즉, $\frac{\text{자연수}}{\text{자연수}}$), 양의 유리수에 (-) 부호를 붙인 음의 유리수, 그리고 0을 통틀어서 유리수라고 정의를 내리고 있다. 하지만, 러시아에서는 조금 다르다.

유리수의 정의를 집합의 개념을 이용하여 도입하고 있다. 즉, 자연수의 집합을 N 이라고 하고, 정수의 집합을 Z 라고 하면 다음의 관계가 성립한다.

$$N \subset Z$$

그리고, 정수의 집합은 다른 더 큰 집합 Q 에 포함된다는 것을 알 수 있다. 즉, $Z \subset Q$ 가 성립을 한다. 즉, 위의 관계가 성립하는 Q 가 존재하는 데 이 집합을 다음과 같이 정의를 하고 유리수라고 부른다.

유리수는 분수의 형태를 취하고 있어야 한다. 물론, 유리수는 위에서 보듯이 정수, 자연수를 모두 포함해야 한다. 즉, $\frac{m}{n}$ $(m \in Z,$ $n \in N)$ 로 나타낼 수 있는 수을 유리수라고 정의를 내린다. 예를 들면,

$$\frac{1}{2}=\frac{40}{80}, \qquad -\frac{3}{4}=\frac{-3}{4}=\frac{-6}{8}$$

$$-1.8=\frac{1.9}{5}=\frac{-18}{10}, \qquad 0=\frac{0}{1}=\frac{0}{8}=\frac{0}{20}$$

가 있다.

3. 식

식에 대한 두 나라의 지도 내용을 표로 정리하면 <표 5>과 같다.

한국의 경우에 식의 영역에서는 문자의 도입에서 출발하여 문자식을 정의하고 단항식과 다항식의 정의를 내린뒤 0이들의 사칙연산을 도입시켰다. 이러한 과정에서 곱셈공식 5가지를 제시하고 있다. 곱셈공식의 역으로 인수분해 공식을 그대로 유도하고 있고 문자식의 다양한 계산활용을 위해서 문자의 거듭제곱을 자연수 범위에서 정의를 내리고 있다.

식의 영역중에서 러시아에서만 다루어지고 있는 내용은 유리식과 정식의 개념, 지수법칙의

<표 6> 수에 대한 내용 비교

	한국	러시아
문자의 사용	o	o
식의 값	o	o
다항식과 단항식	o	o
일차식과 그 연산	o	o
동류항과 식의 간단화	o	o
단항식끼리의 연산	o	o
지수법칙	o	o
지수법칙의 확장(정수)	x	o
다항식과 다항식의 연산	o	o
단항식과 다항식의 연산	o	o
$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$	o	o
$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$	o	o
$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$	o	x
$(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$	o	x
$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$	x	o
수식의 정의	o	o
식의 값의 대소관계	o	o
등식	o	o
절대값을 포함한 식	x	o
수의 표준형	x	o
항등식	o	o
유리식	x	o
정식	x	o
$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$	x	o

정수로의 확장, $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$과 $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$, 여러가지 부등식의 증명, 절대값을 포함한 식의 계산이 있다.

첫째, 유리식과 정식의 개념의 도입이다. 먼저 유리식이란 사칙연산 기호 (+, -, ×, ÷) 을 사용하여 괄호나 숫자, 문자, 거듭제곱 등을 사용하여 구성할 수 있는 식을 가리킨다. 예를 들면,

$$a^2-3a+5,\ 2k-p(k+p),\ \frac{a+b}{a-2b},\ 13.2\div 12$$

은 모두 유리식이 된다. 즉, 유리식의 개념은 상당히 포괄적인 개념으로 러시아의 교과서에서 정의 내리고 있다. 따라서, 임의의 유리식은 다음과 같은 꼴로 나타낼 수 있다 : $\frac{\text{다항식}}{\text{다항식}}$

다음으로 정식이란 문자식으로 나누는 것이 없는 유리식을 가르킨다. 다시말하면, 분모에 문자를 가지지 않는 유리식을 정식이라고 한다. 예를들면,

$$\frac{5x}{4},\ x+\frac{y-2}{5}$$

이다.

둘째는 지수법칙의 정수로의 확장이다. 지수법칙이 자연수뿐아니라 정수에서도 모두 만족함을 설명하여 주고 있다.

셋째, $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$과 $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$의 사용이다. 이 공식을 이용하여 여러가지 유리식의 간단화에 이용되고 있다.

네째, 여러가지 부등식의 증명이 있다. 한국에서는 고등학교에서만 다루고 있는데 러시아에서는 다음과 같은 증명과 함께 다루고 있다. 대표적인 예를 들어보자: $a\geq 0$, $b\geq 0$ 일때,

$$\sqrt{a+b}\leq\sqrt{a}+\sqrt{b}$$

임을 증명하라.

증명) $\sqrt{a+b}$와 $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 는 일반적으로 유리수가 아니므로 두 수를 제곱하여 보도록 하자. 두 수를 제곱하면, $(\sqrt{a+b})^2=a+b$ 이고,

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=(\sqrt{a})^2+2\sqrt{a}\sqrt{b}+(\sqrt{b})^2$$
$$=a+b+2\sqrt{a}\sqrt{b}$$

가 된다. 여기서 $2\sqrt{a}\sqrt{b}\geq 0$ 이므로

$$(\sqrt{a+b})^2 \le (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$$

이다. 따라서,

$$\sqrt{a+b} \le \sqrt{a}+\sqrt{b}$$

이다. 증명 끝)

네째는 절대값을 포함하고 있는 식의 계산이다. 그 대표적인 예를 한가지 들도록 한다: $\sqrt{x^2}=|x|$가 성립을 한다는 것을 보여 주고 있다. 즉, $i)$ $x\ge 0$ 일 때, $\sqrt{x^2}=x$임을 알고 있다. $ii)$ $x<0$ 일 때, $\sqrt{x^2}=-x$가 된다. 결국 $i)$과 $ii)$에 의해서 $\sqrt{x^2}=|x|$ 이다. 이것을 이용한 다양한 문제를 제시하여 주고 있다.

한국과 러시아가 식의 영역에서 서로 상이하게 다루고 있는 부분에 대해서 살펴보도록 하자.

(1) 식의 값과 문자의 사용

한국에서는 중학교 1학년의 '수와 식' 단원에서 문자와 식에서 이 내용을 다루고 있는데 먼저 자연수 계수를 가지는 $50\times x$ 라는 식을 이용하여 최초로 문자를 숫자 대신 사용하기 시작한다. 두번째는 곱셈기호를 생략할 수 있음을 언급을 하고 문자식의 정의를 내린다. 세번째는 문자식에서 변수의 값에 따른 식의 값을 정의한다.

반면 러시아에서는 먼저 수식의 정의를 내린다. 그리고 수식의 값에 대한 정의를 내리게 된다. 두번째는 변수(문자)의 의미를 정의하고 변수식(문자식)을 정의한다. 그리고, 변수식의 값에 대한 정의를 새롭게 내려 준다. 세번째, 수식과 문자식을 합하여 식의 값의 대소비교와 변수식과 수식의 비교를 다루고 있다.

식의 값과 문자의 사용에 대한 부분에서 한국과 러시아는 큰 차이는 찾아볼 수 없으나 개념의 정의에서 조금 더 세밀하게 엄밀하게 또는 간략하게라는 차이를 가지고 있음을 알 수 있다.

(2) 지수법칙

한국에서는 다음의 경우에만 지수법칙으로 제시하고 있다. (m, n은 자연수)

$$a^m a^n = a^{m+n},\ (a^m)^n = a^{mn},\ \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$\begin{aligned} a^m \div a^n &= a^{m-n}\ (m>n) \\ &= 1\ (m=n) \\ &= \frac{1}{a^{n-m}}\ (m<n) \end{aligned}$$

$$(ab)^n = a^n b^n$$

여기서 특히 주목할 부분은 $a^m \div a^n$ 이다. 이제 러시아교과서에서 살펴보면, 먼저, 자연수에 국한된 것이 아니고 정수에 까지 확장되어 위의 식을 유도하고 있다는 것이다. 즉,(m, n은 정수)

$$a^m a^n = a^{m+n},\ a^m a^n a^k = a^{m+n+k}$$

$$a^m \div a^n = a^{m-n},\ (a^m)^n = a^{mn}$$

$$(ab)^n = a^n b^n,\ \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n},\ a^0 = 1$$

$$(abc)^n = a^n b^n c^n,\ (abcd)^n = a^n b^n c^n d^n$$

의 공식을 모두 다루고 있다. 여기서 주목할 수 있는 것은 정수의 확장뿐아니라 밑이 2개가 아닌 3개일 때도 성립한다는 사실을 보여 주고 있다는 것이다. 러시아에서는 이러한, 지수법칙의 예를 문자에 국한시키지 않고 수의 계산에서도 다양하고 폭넓은 예를 제시하여 학생들이 쉽게 이해할 수 있도록 하고 있다.

4. 방정식

방정식에 대한 두 나라의 지도 내용을 표로 정리하면 다음과 같다(<표 7>).

방정식 단원에서는 한국은 일차방정식과 이차방정식의 한도내에서 주로 개념을 전개해 나가고 있다. 방정식을 중학교 1학년에서 정의를 내리고 일차방정식과 이원일차방정식, 일차방정식의 그래프등을 전개시킨 후 이원일차연립방

<표 7> 방정식에 대한 내용 비교

	한국	러시아
방정식의 개념	o	o
방정식의 근과 해	o	o
등식의 성질	o	o
일차방정식과 그 해	o	o
일차방정식의 그래프	o	o
이원일차방정식과 해	o	o
이원일차연립방정식	o	o
가감법	o	o
대입법	o	o
그래프에 의한 해법	o	o
유리방정식과 그 해	x	o
일변수유리방정식의 그래프에 의한 근사적 풀이	x	o
이차방정식과 그 해	o	o
이차방정식의 일반꼴	o	o
이차방정식의 풀이법	o	o
인수분해방법	o	x
완전제곱의 이용	o	x
근의 공식의 사용	o	o
$(x+a)^2-b^2=0$의 이용	x	o
비에타의 공식	x	o
고차방정식의 특수한 꼴	x	o

정식의 해법으로 일차방정식을 마무리하게 된다. 그리고, 3학년에서는 이차방정식을 정의하고 그 풀이를 다루면서 근의 공식을 사용하는 부분이 핵심을 이루고 있다. 러시아의 경우도 한국의 내용에서 크게 벗어나지는 않았지만 이차방정식의 해법에 있어서는 한국에서 다루고 있는 방법을 사용하지 않고 다른 방법을 사용하고 있었다. 그것에 대해서는 뒤에서 자세히 다루도록 하겠다.

러시아에서 다루고 있는 영역중에서 우리의 교육과정에서 다루지 않는 제목으로는 유리방정식의 풀이에 있어서 그래프에 의한 근사해 찾기, 비에타의 공식, 고차방정식이 가장 핵심적인 것이다.

첫째, 유리방정식의 그래프에 의한 해를 찾는 다는 것은 대수적인 방정식의 식의 조작에 의해서 값을 찾는다는 것이 아니라 그래프를 보고 직관적인 근사값을 찾는것을 의미한다. 우리에게 있어서는 전혀 찾아 볼 수 없는 부분이지만 러시아에서는 다음과 같은 방법으로 그래프를 보고 직관적인 해를 구하고 있다. 예를 들어서 다음 두 문제를 제시할 수 있다.

문제1) $y=\dfrac{8}{x}$, $y=x^2$의 교점을 구하여라.

풀이) 단계 1: 위의 함수의 그래프를 모눈종이위에 그리도록 한다.

단계 2: 단계1에 의해서 그려진 그래프를 보면, 그 두 함수의 그래프가 만나는 점을 찾을수가 있을 것이다. 이것을 모눈종이위에서 찾아보면 $x=2$ 에서 만나게 된다. 따라서, 두 그래프의 교점의 x좌표는 2가 된다.

단계 3: 단계2번에 의해서 교점의 y 좌표는 4가 된다. 풀이 끝.

문제2) $y=\dfrac{12}{x}$, $y=x+2$의 교점을 찾아라.

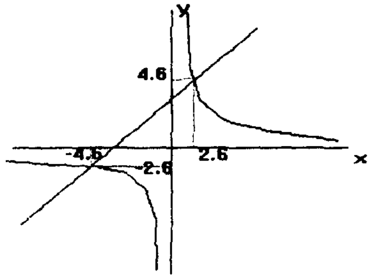
풀이) 단계 1: 위의 방정식을 그래프로 종이위에 그리도록 한다.

단계 2: 모눈종이위에 그려진 그래프를 보면 정확하게 정수의 값으로 해를 찾을 수가 없다. 그러나, 근사적으로 해를 찾을 수가 있는 그 값은 대략 다음과 같다. $x\fallingdotseq-4.6$과 $x\fallingdotseq2.6$임을 알 수 있다.

단계 3: 따라서, 교점의 y 좌표는 <그림 2>와 같다. $y\fallingdotseq-2.6$과 $y\fallingdotseq4.6$ 이 된다.

위에 제시한 이러한 방법은 최근 90년대의 수학교육에서 수학적인 힘을 기르기 위한 한가지 중요한 수단으로 어림셈을 강조하고 있다는 측면을 고려할 때 우리에게 큰 의미를 주는 부분이다.

둘째, 비에타의 공식은 우리나라의 고등학교에서 배우게 되는 근과 계수와의 관계를 의미



<그림 2>

한다. 여기서 간단히 언급을 한다면, 이차방정식의 일반꼴 $ax^2+bx+c=0$에서 이차방정식의 근은 다음과 같다.

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}\ ,\ x_2=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$$

가 된다. 이때, 두근의 합은 $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$, 두근의 곱은 $x_1x_2=\frac{c}{a}$ 이다. 이것이 비에타의 정리이다.

세째는 고차방정식의 특수한 꼴을 다루고 있다. 즉, 지금까지 학습한 수준에서 응용가능한 특수한 고차방정식을 다루고 있다. 그것은 다음과 같다.

① $x^3-9x=x(x^2-9)=x(x+3)(x-3)=0$

따라서, $x=0$, $x=\pm3$ 즉, $\{0,\ 3,\ -3\}$ 이다.

② $(x^2-5x)^2-30(x^2-5x)-216=0$ 을 풀기 위해서 $x^2-5x=t$로 치환을 하면, 쉽게 구할 수 있다. 답은 $\{2\ ,\ 3\ ,\ -4\ ,\ 9\}$

③ $4x^4-5x^2+1=0$을 풀기 위해서 $x^2=t$로 치환을 하면, 값을 쉽게 얻을 수 있다.

이제 양국이 서로 상이하게 다루고 있는 영역에 대해서 자세히 비교하면서 살펴보자.

(1) 방정식의 정의

한국은 방정식을 정의하기에 앞서 등식을 먼저 정의를 내리고 등식에 포함된 미지수의 값에 따라 그 등식이 참이 되기도 하고 거짓이 되기도 하는 등식을 방정식이라고 정의를 내린다. 일원일차방정식은 방정식을 정리했을 때 다음과 같은 꼴이 되는 방정식을 가르킨다.

(x 에 관한 일차식) = 0

이원일차방정식에 대한 정의는 아래와 같다.

(x, y 에 관한 일차식) = 0

한편, 러시아에서는 등식이 미지수에 따라서 참이 되거나 거짓이 될 수 있는 등식이라고 정의하여 한국과 거의 차이를 보이지 않았지만 방정식의 예를 다루는데 있어서는 한국과는 많은 차이를 보이고 있다. 한국은 방정식을 정의하고 그 예로써 모두 일차식만을 예로 제시하였지만, 러시아에서는 이차이상의 고차방정식도 자유롭게 예로 제시하여 주고 있다.

일원일차방정식의 정의에 있어서는 다음과 같이 정의를 내리고 있다:

$ax\ =\ b$(x : 변수, a, b : 상수)

의 형식으로 나타낼 수 있는 식이다.

이원일차방정식의 정의는 다음과 같다: $ax+by=c$ 의 꼴로 나타낼 수 있는 식이다.

(2) 방정식의 유도하는 과정

한국에서는 문자와 식이라는 중단원에서 먼저 단항식, 다항식, 일차식과 그 식의 값에 대해서 자세하게 언급을 한 후에 그 다음 단원에서 방정식을 정의를 내린 후에 차수에 따라서 일차방정식의 정의를 내린다. 그리고, 2학년에서 단항식의 곱셈과 나눗셈, 다항식의 곱셈과 나눗셈을 다루고 그 다음에 이원일차 방정식의 정의를 내리고 그 풀이를 다루고 있는 반면, 러시아에서는 식의 단원에서 수식을 정의하고 그 다음 문자식, 등식과 함께 방정식의 정의를 내려버린다. 그 다음에 다항식과 단항식의 사칙연산 , 곱셈공식, 간단한 인수분해 공식 등을 학습하면서 그 때 그 때 상황에 적절한 방정식의 문제를 다루면서 그 풀이 방법을 학습하도

록 하고 있다. 즉, 특정한 단원에서 일차방정식의 풀이를 다루는 것이 아니라 방정식을 단원 제일 앞부분에서 다루고 그 다음에 새로운 학습내용을 학습하면서 방정식에 적용될 수 있는 부분이 나오면(곱셈공식이나 다항식의 연산들) 그 때 그 때 적절한 예를 통해서 일차방정식의 풀이를 학습하고 있는 병렬식 학습 모형을 따르고 있다.

(3) 이차방정식의 정의와 풀이법

한국에서는 이차방정식에 대한 정의를 다음과 같이 내린다. (x에 대한 이차식) = 0 의 꼴로 나타나는 것을 x에 관한 이차 방정식이라고 한다. 그리고, 이러한 방정식의 풀이법으로 다음 세가지를 제시하고 있다.

① 인수분해에 의한 해법

예를 들면, $x^2-3x+2=0 \Rightarrow (x-1)(x-2)=0$

$\Rightarrow x=1,\ x=2$

② 일차항이 없는 경우에는 제곱근을 이용

예를 들면, $x^2-25=0 \Rightarrow x^2=25 \Rightarrow x=\pm 5$

③ 완전제곱식을 이용하는 방법

④ 근의 공식을 이용하는 방법

반면에 러시아에서는 이차방정식의 정의를 다음과 같이 내리고 있다. 이차방정식이란 최고차항이 이차이고, 일변수이고, 최고차항의 계수가 0이 아니면, 이차방정식이라고 한다. 즉, $ax^2+bx+c=0$ ($a\neq 0$, x : 변수, a, b, c : 계수)의 기본형태를 가지고 있는 방정식을 이차방정식이라고 한다.

특히, 이차방정식에서 이차항의 계수가 1이면 *pribedenie*[2]라고 이름을 붙이고 있었다.

이차방정식의 풀이는 우리와 같은 근의 공식과 단지 다음의 방법에 의해서만 풀이 하고 있었다. 이것에 대해 $x^2+6x+5=0$의 풀이를 통해서 살펴보도록 하자.

2) '인도되어진다'라는 뜻으로 모든 이차방정식이 이 형태로 만들 수 있다는 의미를 가지고 있다.

단계 1: x^2+6x+5의 방정식을 풀기 위해서 먼저 완전 제곱식으로 고쳐보자

$$x^2+6x+3^2-3^2+5=0$$
$$\Rightarrow x^2+6x+9-9+5=(x+3)^2-4=0$$

단계 2: 우리가 배웠던 전개공식 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$를 이용하여서 방정식을 풀고 있다.

즉, $(x+3)^2-2^2=(x+3-2)(x+3+2)=0$을 구하고 이것을 정리하면, $(x+1)(x+5)=0$이다.

단계 3: 답 $x=1$, $x=-5$를 얻는다.

(4) 근의 공식의 유도

한국에서는 다음과 같이 근의 공식을 유도하고 있다. 이차방정식의 일반꼴 $ax^2+bx+c=0$ 에서 근의 공식의 유도를 시작하여 보자.

$$ax^2+bx+c=0$$

에서 양변을 a로 나눈다.

$$x+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

에서 상수항을 이항하면,

$$x+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$$

이고, 좌변을 완전제곱으로 만들어주기 위해서 양변을 $(\frac{b}{2a})^2$ 을 더하여 주자.

$$x^2+\frac{b}{a}x+(\frac{b}{2a})^2=-\frac{c}{a}+(\frac{b}{2a})^2$$

를 정리하면,

$$(x+\frac{b}{2a})^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}.$$

따라서, 이차방정식의 근을 구하는 방법에 의해서, x 의 값은

$$x = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \quad x = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

가 된다.

러시아에서는 근의 공식을 유도할 때 이차방정식을 푸는 방법이 독특한 만큼 그 방식이 그대로 적용되어 유도되어지고 있고, 주목할 만한 것은 $D=b^2-4ac$를 도입하고 있다는 사실이다.

이제 근의 공식을 유도하여 보자. 이차방정식의 일반꼴 $ax^2+bx+c=0$에서, 양변을 a로 나누면,

$$x+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

을 얻는다. 이 식을 완전제곱식으로 만들어주기 위해서 좌변에 $(\frac{b}{2a})^2$을 더하고 빼준다. 그러면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$X^2+2x\cdot\frac{b}{2a}+(\frac{b}{2a})^2-(\frac{b}{2a})^2+\frac{c}{a}=0$$

이를 정리하면,

$$(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}=0$$

이다.

이때, $b^2-4ac=D$라고 두면,

$$(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{D}{4a^2}=0$$

에서 D의 값에 따라서, 풀이의 가부가 결정되어짐을 알 수 있다. 즉,

① $D<0$ 이면, 근이 없다. 왜냐하면,

$$(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{D}{4a^2}=0$$

$(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{D}{4a^2}$에서, $\frac{D}{4a^2}<0$ 이므로

위 식을 만족시키는 실근 x는 존재할 수 없다. 어떠한 실수의 제곱도 음수는 될 수 없다.

② $D=0$이면 근이 존재한다.

$$(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{D}{4a^2}=0$$

$$\therefore\ (x+\frac{b}{2a})^2=0$$

$\therefore$ 근은 $x=-\frac{b}{2a}$가 된다.

③ $D>0$ 이면 근이 존재한다.

$$(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{D}{4a^2}=0$$

$$(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{D}{4a^2}=0$$

$$(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{D}{4a^2}=(x+\frac{b}{2a})^2-(\frac{\sqrt{D}}{2a})^2$$

이므로, 전개공식 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$를 이용하면

$$(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{D}}{2a})(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{D}}{2a})=0$$

$\therefore\ x=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$ 또는 $x=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$

5. 부등식

부등식에 대한 두 나라의 지도 내용을 표로 정리하면 <표 8>과 같다.

<표 8> 부등식에 대한 내용 비교

	한국	러시아
부등식	o	o
부등식의 해	o	o
양변(좌변,우변)	o	x
부등식의 성질	o	o
일차부등식	o	o
일차부등식의 풀이법	o	o
일차연립부등식과 그 해	o	o
간단한 이차부등식	x	o
간단한 유리부등식	x	o
절대값을 가지는 부등식	x	o
값의 범위	x	o

한국에서는 부등식의 영역은 <표 3>에서 볼 수 있듯이 그렇게 많은 내용을 다루고 있는 것 같지는 않다. 부등식의 개념을 다루고 일차부등식과 연립부등식을 푸는 정도의 수준에서 중학교 2학년에서만 다루고 있는 것으로 나타났다.

러시아에서는 한국에 비해서는 대체로 많은 내용을 다루고 있는데 한국에서 다루지 않는 내용 중에서 러시아에서 다루고 있는 내용으로는 이차부등식과 유리부등식, 절대값을 가지는 부등식, 값의 범위가 있다. 그 내용을 간단하게 소개하도록 한다.

첫째, 이차부등식과 유리부등식, 절대값을 포함하는 문제는 다음의 예와 같은 수준에서 제시되어져 있다. 물론 이 수준은 한국에서는 고등학교에서 배우는 수준이다.

$$(0.5x-1)(4-x)>0 \quad \frac{2x-3}{5-4x}<0$$

$$\frac{3x-2}{x-2}>3, \quad \frac{5x-4}{2-x}\geq 0, \quad |x-2|\leq 3$$

둘째, 값의 범위에 대한 문제는 다음과 같은 내용을 다루고 있다.

x, y 의 범위가 다음과 같을 때 $\frac{x}{y}$, xy, $x-y$, $x+y$ 의 범위를 구하여라.(단, $a<x<b$, $c<x<d$)

① $x+y$의 범위

$a+c < x+y$이고 $x+y < b+d$이므로

$$a+c < x+y < b+d$$

② $x-y$의 범위

$x-y=x+(-y)$이고, $-d < -y < -c$이므로 $a-d < x-y < b-c$

③ xy의 범위

$$ac < xy < bd$$

④ $\frac{x}{y}$ 의 범위

$\frac{x}{y}=x-\frac{1}{y}$, $\frac{1}{d}<\frac{1}{y}<\frac{1}{c}$ 이므로

$$\frac{a}{d}<\frac{x}{y}<\frac{b}{c}$$

6. 함수

함수에 대한 두 나라의 지도 내용을 표로 정리하면 <표 9>와 같다.

<표 9> 함수에 대한 내용 비교

	한국	러시아
대응	o	o
함수값	o	o
정의역	o	o
치역	o	o
공역	o	o
변수	o	o
함수의 표시방법	o	x
반비례함수의 예	o	o
순서쌍	o	x
함수의 그래프	o	o
쌍곡선	o	o
일차함수	o	o
일차함수의 그래프	o	o
x절편, y절편	o	x
그래프의 기울기	o	x
일차함수의 평행이동	o	x
이차함수	o	o
이차함수의 그래프	o	o
이차함수의 그래프의 이동	o	x
이차함수의 최대,최소값	o	x
이차함수와 이차방정식	o	o
삼차함수의 예	x	o
함수의 증가와 감소	x	o
무리함수의 예	x	o

함수의 단원은 한국에서는 전체 내용의 25% 정도를 차지할 만큼 중요시하는 단원이다. 사실 고등수학에서도 수학에서 함수가 차지하는 위

치가 절대적이라고 할 수 있으니 그 중요성을 강조하는 것은 당연한 귀결일 것이다. 한국에 함수 단원에서 주로 다루는 내용은 함수의 정의를 정의역, 공역, 치역의 개념을 도입하여 설명을 하고 순서쌍과 좌표를 도입하여 일차함수와 이차함수의 그래프를 학생들에게 자연스럽게 제시하여 주고 있다. 이러한 함수의 그래프가 주어지면 다양한 일차, 이차함수의 예를 제시하면서 평행이동과 그래프의 관계를 한 눈에 볼 수 있도록 세세히 설명을 하고 있다.

그리고, 함수의 응용으로 다양한 예를 많이 제시하여 주고 있으며 이차함수 단원에서는 최대와 최소문제를 완전제곱식으로 변형시켜 풀이하면서 함수와 방정식을 잘 연결시켜 주고 있다.

러시아는 함수단원의 비중은 11% 정도로 방정식과 식의 단원에 비해서 낮은 비중을 차지하고 있는 것처럼 보이지만 실제로는 그렇다고 말하기는 어렵다. 실제 러시아 교과서를 자세히 살펴보면 다른 단원(식이나 방정식) 에서 관련된 내용이 나오면 자연스럽게 함수의 개념을 사용하고 개념을 전개시키는 모습을 쉽게 찾아볼 수 있다. 즉, 방정식의 단원이지만 함수의 내용이 예제로 주어지고 있는 것이다.

러시아에서는 한국에 비해서 전반적인 분량은 적지만 삼차함수라든지 무리함수의 간단한 예를 제시하고 있고, 함수의 증가와 감소라는 용어를 자세히 제시하고 있는 면을 엿볼 수 있었다.

간단히 함수의 증가와 감소에 대해서 살펴보면, 다음과 같은 정의를 사용하여 제시하고 있다.

① 함수의 증가: 모든 x_1, x_2에서

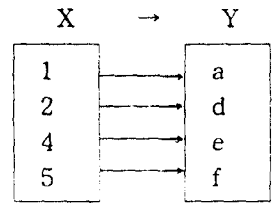
$$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$$

② 함수의 감소: 모든 x_1, x_2에서

$$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$$

그럼, 함수단원에서 본 양국 교과서의 큰 흐름의 차이를 자세히 살펴보도록 하자.

한국에서는 아래의 그림을 통해서 함수의 개념을 설명을 한다. 그리고, 아래의 그림으로 된 다양한 예를 제시하여 학생들이 함수의 개념을 습득하도록 요구하고 있다.



그리고, 대응관계를 명확하게 설명을 한 뒤 위의 그림을 자연스럽게 좌표평면위로 옮겨 놓는다. 그래서, 그래프 상에서 점들의 함수의 그래프로 정의를 내리고 있다. 물론, 그 점들이 자연스럽게 실선으로 연결되도록 학생들에게 설명을 한다.

그리고, 함수단원에서 우리가 강조하고 있는 것은 함수의 구별, 정의역과 공역, 치역의 판단, 함수값의 계산, 함수의 식을 주고 그 식에 대한 그래프의 작성과 변형들에 강조하는 조작활동을 통한 답을 구하는 데 중심을 두고 학습시키고 있다.

한편, 러시아에서 함수개념의 지도의 중심은 다음과 같다. 먼저, 함수의 개념을 종속변수와 독립변수라는 변수의 개념을 도입하여 대응관계로 함수의 개념을 설명을 한다. 그리고, 직접 함수의 그래프를 그려준다. 그리고, 그 그림을 보고 우리가 정의한 상황에 맞는 지를 직관적으로 설명을 한다. 물론 이 때 함수의 관계식은 제시되지 않는다.

함수의 그래프에 대한 정의는 독립변수인 x와 대응하는 종속변수에 속하는 함수값 y와 대응하는 모든 점들의 집합으로 정의를 내리고 있다. 이미 학생들은 함수의 정의에서 그래프 그림을 통한 시각적으로 정의를 내렸기에 함수의 관계식은 모르지만 자연스럽게 함수의 그래프를 수용하게 하고 있다. 즉, 러시아에서는 한국과는 달리 조작적인 활동을 거의 다루고 있

지 않고 단지 함수의 시각적인 이해, 즉, 그래프를 통한 직관적인 이해에 바탕을 두고 다양한 예를 제시하여 함수의 학습을 하고 있다.

V. 결론 및 요약

지금까지 한국과 러시아의 중학교 대수영역에 대해서 양국의 교육과정의 핵심인 교과서를 비교·분석하였다. 어떤 부분에서는 한국의 교과서가 더욱 자세히 내용을 다루고 있으면서 학습들의 학습효과를 높이기 위한 다양한 모양으로 설명하고 있었고, 다른 면에서는 러시아에서 더 수학적으로 엄밀한 증명을 바탕으로 학생들이 받아들이기 쉽게 직관적인 설명을 하고 있는 부분도 있었다. 양국의 교과서가 일장일단을 가지고 있음을 알 수 있다. 따라서, 러시아의 교육과정과 내용전개의 방법등을 타산지석으로 삼아 우리의 교육과정에 있어서 새로운 시사점으로 삼는 다면 우리의 새로운 교육과정에 시사점과 기초자료로 유용하게 사용되어질 수 있을 것이라고 본다.

한국과 러시아의 중학교 대수 교과서의 단원체제, 학습내용의 구성등 교과서의 내적인 체재면에서 한국은 지식의 구조에서 강조하는 나선형 교육과정을 그대로 적용한 것을 엿볼 수 있었고 러시아는 단선형 교육과정과 함께 연결성을 강조하면서 많은 부분에서 각각의 영역의 접합을 교육과정상에서 찾아볼 수 있었다.

학습내용의 전개 및 내용 제시방법의 비교·분석에서는 대수의 영역을 집합과 명제, 수, 식, 방정식, 부등식, 함수로 6부분으로 나누어서 비교를 수행하였는데 각 영역의 비중을 살펴보면 한국이 수와 함수영역에 강조를 두고 전체적인 내용을 전개시키고 있었고, 러시아는 식과 방정식의 영역에 많은 시간을 할당하여 전체적인 내용을 전개시키고 있음을 엿볼 수 있다.

1) 집합과 명제

집합과 명제의 영역에서 찾아볼 수 있는 특이한 것은 명제에서의 충분조건과 필요충분조건이다. 러시아에서는 7학년에서 이 내용을 다루고 있는데 집합의 개념을 거의 다루고 있지 않은 상태에서 이러한 개념의 도입은 상당히 의외였다. 이 개념의 도입목적은 논리의 설명을 위해서가 아니라 방정식의 풀이에서 각 단계 단계는 서로 동치라는 사실을 설명하기 위해서 도입을 하였다.

2) 수

러시아에서도 우리와 비슷한 순서에 의해서 수영역을 전개시켜 나가고 있는데 우리가 학습하고 있지 않는 부분으로는 상대오차와 $\sqrt{x}$ 의 값의 수열에 의한 근사값 계산, 제곱표가 있다.

그리고, 십의 거듭제곱의 사용에 있어서 양국은 약간의 의견의 차이를 보이고 있었는데 한국에서는 근사값의 단원에서 근사값을 간단하게 표현하는 방법으로 자리잡기를 위한 0과 유효숫자인 0을 구별하기 위하여 (소수점 위가 한자리인 수) × (10의 거듭제곱)의 꼴로 나타내고 있었다. 러시아에서는 이 부분을 독립된 하나의 소주제로 다루면서 '수의 표준형'이라는 용어를 사용하고 있다. 즉, 이 개념을 설명하기 위해서 아주 작은 수와 아주 큰 수의 예인 분자와 태양의 지름을 각각 0.00000003㎝, 1390600000m 로 제시하고 이 수를 표현하기 위한 방법으로 $a\times10^n(1\le a<10)$ 꼴로 나타낼 수 있는데 이것을 수의 표준형이라고 정의 내리고 있다. 즉, 분자의 지름은 3×10^{-8}㎝ 으로, 태양의 지름은 1.3906×10^9m 으로 나타낸다.

유리수의 정의를 보면 한국에서는 유리수의 정의를 양의 유리수(즉, $\frac{\text{자연수}}{\text{자연수}}$), 양의 유리수에 (-) 부호를 붙인 음의 유리수, 그리고 0을 통틀어서 유리수라고 정의를 내리고 있다. 하지만, 러시아에서는, $\frac{m}{n}$ $(m\in Z,\ n\in N)$ 로 나타낼 수 있는 수를 유리수라고 정의를 내린다.

3) 식

식의 내용중에서 러시아에서만 다루어지고 있는 내용으로는 유리식과 정식의 개념, 지수법칙의 정수로의 확장, $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$과 $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$, 여러가지 부등식의 증명이 있다.

한국에서는 자연수범위에서 지수법칙으로 제시하고 있다. (m, n 은 자연수) 러시아교과서에서 자연수에 국한된 것이 아니고 정수에 까지 확장되어 아래의 식을 유도하고 있다는 것이다. 즉, (m, n 은 정수)

$$a^m a^n = a^{m+n},\ a^m a^n a^k = a^{m+n+k}$$

$$a^m \div a^n = a^{m-n},\ (a^m)^n = a^{mn}$$

$$(ab)^n = a^n b^n,\ \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}\ ,\ a^0 = 1$$

$$(abc)^n = a^n b^n c^n\ (abcd)^n = a^n b^n c^n d^n$$

의 공식을 모두 다루고 있다. 여기시 주목할 수 있는 것은 정수의 확장뿐아니라 밑이 2개가 아닌 3개일 때도 성립한다는 사실을 보여 주고 있다는 것이다. 러시아에서는 이러한, 지수법칙의 예를 문자에 국한시키지 않고 수의 계산에서도 다양하고 폭넓은 예를 제시하여 학생들이 알 수 있도록 제시하고 있다.

4) 방정식

러시아에서 다루고 있는 영역중에서 우리의 교육과정에서 다루지 않는 제목으로는 유리방정식의 풀이에 있어서 그래프에 의한 근사해 찾기, 비에타의 공식, 고차방정식등이 있다.

이차방정식의 정의와 풀이법에 있어서도 한국은 약간 차이를 나타내고 있는 데 한국은 인수분해에 의한 해법, 일차항이 없는 경우에는 제곱근을 이용하는 해법, 완전제곱식을 이용하는 방법, 근의 공식을 이용하는 방법을 제시하고 있는 반면. 러시아에서는 근의 공식과 다음 한가지 방법에 의해서만 풀이를 하고 있다. $x^2+6x+5=0$ 의 풀이를 통해서 살펴보면, 먼저 x^2+6x+5의 방정식을 풀기위해서 먼저 완전 제곱식으로 고치면, $(x+3)^2-4=0$이고, 다음은 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$를 이용하여 푼다. 즉, $(x+3)^2-2^2=(x+3-2)(x+3+2)=0$을 구하고 이것을 정리하면, $(x+1)(x+5)=0$ 이다. 따라서, 답은 $x=1$, $x=-5$를 얻는다.

근의 공식의 유도에서도 차이를 보이고 있는데 한국은 완전제곱식에 의한 근을 구하는 방법으로 근의 공식을 유도하고 있고, 러시아는 이차방정식을 푸는 방법을 그대로 도입하여 $D=b^2-4ac$를 사용하여 유도하고 있다.

5) 부등식

러시아에서는 한국에 비해서는 대체로 많은 내용을 다루고 있는데 한국에서 다루지 않는 내용중에서 러시아에서 다루고 있는 내용으로는 이차부등식과 유리부등식, 절대값을 가지는 부등식, 값의 범위가 있다.

6) 함수

함수단원에서 본 양국 교과서의 큰 흐름의 차이를 살펴보면 다음과 같다.

한국에서는 대응관계의 그림을 통해서 함수의 개념을 설명을 하고 있고, 대응관계를 명확하게 설명을 한 뒤 그 대응관계를 좌표평면위로 옮겨 놓는다. 그리고, 이러한 점들의 집합을 그래프로 정의를 내리고 있다. 우리가 강조하고 있는 개념은 함수의 구별, 정의역과 공역, 치역의 판단, 함수값의 계산, 함수의 식을 주고 그 식에 대한 그래프의 작성과 변형들에 강조하는 조작활동을 통한 답을 구하는 데 중심을 두고 학습시키고 있다.

한편, 러시아에서 함수개념의 지도중심을 직접 함수의 그래프를 눈으로 보고 그 그래프를 직관적으로 설명을 한다. 물론 식은 제시되지 않지만 그래프를 눈으로 확인하여 함수의 값을 구하는 등의 직관적인 활동과 어림셈의 활동에 많은 시간을 할당하고 있다.

참 고 문 헌

김도상 외 (1990). 수학교재론. 서울: 경문사.

김용태 외 (1995). 중학교 수학1. 서울: 한샘출판사

김용태 외 (1995). 중학교 수학2, 서울: 한샘출판사

김용태 외 (1995). 중학교 수학3, 서울: 한샘출판사

문교부 (1988). 제 5차 중학교 교육과정, 서울: 대한교과서주식회사.

박한식 외 (1989). 최신 수학사전, 서울: 한국사전연구원

이규환(1992). 선진국의 교육제도, 서울: 배영사.

МАКАРЫЧЕВ. Ю. Н ДР (1988). АЛГЕБРА 7, МОСКВА

МАКАРЫЧЕВ. Ю. Н ДР (1988). АЛГЕБРА 8, МОСКВА

МАКАРЫЧЕВ. Ю. Н ДР (1988). АЛГЕБРА 9, МОСКВА

М. И. БАШМАКОВ(1991). .АЛГЕВРА И АНАЛИЗА. МОСКВА ПРОСВЕНИЕ

NCTM (1989). Curriculum and evaluation standards for school mathematics, Reston, NCTM

UNESCO (1986). Soviet Education. 29(8).

Ю.В.Прохов (1988). Матемачесий энциклопедическ ий с роварь, Москва: Советская энциклопеди я