韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
1995. 12. 제 34권, 제 2호, 203-205.

Journal of the Korea Society of Mathematical Education
Series A: Dec. 1995, Vol. 34, No. 2, 203-205.

구성적 수학에 관하여

전 재 석 (아주대학교)

1. 구성주의 수학의 배경

플라톤 이래로 보통 수학은 수학에 대한 인간의 지식과 독립적으로 존재해왔으며 또한 절대적 진리로 믿어져 왔다. 따라서 수학자가 할 일은 오직 그 진리를 발견하는 것 뿐이다. 그러나 모든 수학자가 다 신에 의해서 주어진 수학이란 믿음을 가진 것은 아니었다. 예를 들면 19세기 독일 수학자 크로넥커는 신은 정수를 만들고 나머지는 모두 인간이 만들었다고 주장했다. 크로넥커의 견해를 따르면 수학자는 수학을 발견하는 게 아니라 발명하는 것이 된다.

이렇게 수학은 인간에 의해 만들어진다는 믿음을 기초로 구성주의 수학이 형성된 것이다. 구성주의란 간단히 말해서 수학적 대상이 존재한다는 것을 증명하기 위해서는 반드시 그 대상이 구성되어야 한다는 것이다. 여기서 구성된다는 것은 유한회의 단계로 그 실체를 나타낼 수 있는 방법을 제시하거나, 또는 임의로 원하는 정도의 정확성으로 그들을 계산하는 방법을 제시함을 말한다. 예를 들면 π는 우리가 원하는 만큼의 소수점 아래자리까지 계산할 수 있으므로 구성적인 것이다. 그러면 구성주의 수학을 파생시킨 직관주의 철학을 간단히 살펴보자.

브라우워는 그의 박사학위 논문 "수학의 기초에 관하여" 에서 직관주의 철학을 제안했는데 수학에서의 직관주의적 입장은 바로 이 철학으로부터 나왔다. 브라우워에 의하면 수학이란 정신에서 시작하고 정신에 자리잡은 인간활동이며 인간의 정신의 외부에는 존재할 수 없다는 것이다. 따라서 그것은 실세계와 독립되어 있으며 또한 이런 것들은 감각적이거나 경험적인 것이 아니라 수학의 어떤 개념들에 대한 즉각적인 확신들이라는 것이다. 예를 들면 자연수가 바로 이런 것에 속한다는 것이다. 그리고 인간의 가장 기본적인 직관은 시간의 연속에서 일어나는 서로 다른 사건의 인식이라는 것이다. 이런 과정에서 어떤 주장이 정신에게 자명한 직관으로 받아 들여 질 수 있고 어떤 것이 그렇지 않은가는 사고의 숙고, 세련, 수련으로서만 가능하다면서 브라우워는 직관이 수학적 아이디어의 건전성과 수용가능성을 결정하는 것이지 경험이나 논리가 결정하는 것은 아니라고 주장하였다.

브라우워는 자연수 이외에도 덧셈, 곱셈, 수학적 귀납법을 직관적으로 분명하다고 주장하면서 임의로 주어진 원소의 유한집합에 다른 원소를 항상 추가할 수 있는 잠재적 무한의 가능성은 인정했지만 모든 원소가 동시에 나타나는 칸토르의 무한집합은 반대했다. 따라서 초한수의 이론, 체르멜르의 선출공리 등을 배격했다.

브라우워는 특별히 논리주의에 대해서 강한 반감을 가졌다. 논리는 언어에 속하며 그것은 진리를 전달하려는 의도인 또 다른 말들의 결합의 연역을 허용하는 규칙들의 체계를 제공했지만 이렇게 전달된 진리는 이전에 직관적으로 포착하는 것과 같지 않고 그렇게 포착할 수 있도록 허용된 것도 아니라는 것이다. 논리란 진리를 아는데 믿을 수 있는 도구가 아니며 언어에서 후천적으로 관찰된 규칙성일 뿐이라는 것이다. 수학의 중요한 발전들은 논리적 형식을 완비화함으로서가 아니라 기본 이론 자체를 변경하므로서 얻어진 것이라는 것이다. 결국 브라

우워는 어떤 선험적으로 지켜야 할 논리의 원리들을 인정하지 않았기 때문에 공리로부터 결론을 연역해 내는 공리론도 배격했다. 브라우워가 특별히 배격한 논리의 원리로 배중률이 있다. 이 원리는 모든 의미 있는 진술은 참이거나 거짓이다라고 주장하는 것인데 역사적으로 유한집합의 추론에 적용되는 데서 나타났으면 그 뒤 추상화되었다. 그런 뒤에 이것은 선험적인 원리로 받아들여 무한집합에까지 정당성 없이 적용되었다는 것이다.

이리하여 칸토르의 초월수의 존재 증명과 같은 배중률을 사용한 존재 증명은 직관주의자들에겐 받아들여지지 않았다. 아무튼 직관주의자들은 그들의 기준에 따라 수학의 기초를 확립하려고 노력했지만 그리 큰 성과를 거두지 못했다.

2. 비숍의 구성주의

1967년 에레트 비숍은 "구성주의 수학의 기초"라는 책을 발간했는데 여기서 비숍은 이전의 어떤 구성주의보다도 세련되고 강력한 구성주의 수학의 가능성을 보여주었다. 브라우워는 직관주의를 통해서 수학의 기초를 확립하려고 노력한데 비해서 비숍은 수학의 기초보다는 수학을 구성적으로 어떻게 수행하느냐 하는데 관심을 두었다.

비숍은 직관주의자들과 마찬가지로 배중률은 배격했지만 직관주의자들이 거부한 공리나 개념을 적절히 보완하므로서 새로운 구성주의를 제시한 것이다.

수학에서 가장 논쟁적인 공리중 하나인 선출공리를 통해서 비숍의 보완책을 살펴보자.

선출공리에 따르면 공집합이 아닌 집합들이 모임에 각 집합에서 한 원소씩 뽑아내서 만든 집합이 존재한다.

이 공리의 문제점을 러셀이 제시한 예를 통해서 살펴보자. 무한 켤레의 구두들이 있을 때 각 켤레에서 왼쪽 구두를 뽑아라 라는 규칙은 선출공리를 만족한다. 그러나 무한 켤레의 양말들이라면 어떤 규칙을 적용해도 선출공리를 만족 시킬 수 없는 것이다.

이 경우 유한 켤레의 양말들이라면 각 켤레에서 한 짝에다 표시를 해서 표시된 양말만을 선택할 수 있을 것이다. 그러나 일반적으로 집합들의 유한개 모임이라도 다음의 예에서 보듯이 선출공리가 만족되는 것은 아니다.

만약에 페르마 정리가 참이면 집합 A는 {0, 1}로 정의하고 만약에 페르마 정리가 거짓이면 집합 A는 {2, 3}으로 정의 했을 때 페르마 정리가 증명되기 전에는 집합 A에서 한 원소를 뽑아내는 규칙은 있을 수 없는 것이다. 그러나 비숍의 집합론에서는 선출공리는 자연스럽게 인정된다. 비숍은 한 집합이 공집합이 아니기 위해서는 그 집합에 속하는 특정한 한 원소를 구성적으로 정의할 것을 규정하기 때문에 우리는 바로 그 특정한 원소를 각 집합에서 선출하므로서 선출공리를 언제나 만족시킬 수 있다.

다음은 수학에서 가장 중요한 실수에 대한 비숍의 정의를 살펴보자. 우선 쉽게 생각할 수 있듯이 한 실수는 원하는 자리까지 소수점 전개가 가능한 방법이 있다면 구성되었다고 할 수 있을 것이다. 그러나 비숍은 어떤 수 a와 b는 정의되는데 $a + b$는 정의되지 않는 경우를 예를 통해서 제시해서 이 정의가 만족스럽지 못함을 보여 주었다. π의 소수점 전개에서 수열 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9가 나타나는지 아닌지 알려져 있지 않다. 더구나 π의 소수점 전개에서 k번째에서 처음으로 수열 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9가 나타난다 할 지라도 k가 홀수인지 짝수인지 모른다. 이때의 k를 임계수라 하자. 물론 어떤 수 n이 임계수 인지 아닌지는 π를 $n + 9$째 자리까지 전개해 보면 알 수 있다. 두 수 a와 b를 다음과 같이 정의한다:

홀수인 임계수 n이 존재하지 않으면 $a = 0.333\cdots$ 홀수인 임계수 n이 존재하면 위의 a에서 n번째 자리만 4로 정의하고 나머지 자리는 모두 3이다. 즉, $a = 0.333\cdots433\cdots$. 유사하게 짝

수인 임계수 n이 존재하면 위의 b에서 n번째 자리만 5로 정의하고 나머지 자리는 모두 6이다. 즉, $b = 0.66\cdots566\cdots$.

이 경우 π의 임계수가 존재하지 않으면 $a + b = 1$이다.

임계수가 존재하고 짝수이면 $a = \frac{1}{3}$, b는 $\frac{2}{3}$ 보다 작다. 그러므로 $a + b$는 1보다 크다.

임계수가 존재하더라도 짝수인지 홀수인지 알 수 없으므로 $a + b$의 소수점 전개는 불가능하다.

비숍은 어떤 실수 x는 유리수에 의해서 얼마든지 가깝게 조사시킬 수 있을 때 결정되는 것으로 정의했다.

즉 임의의 n에 대해서 유리수 r이 존재해서 $|x-r| < \frac{1}{10^n}$ 인 관계가 가능할 때 실수 x는 결정된다.

이 정의에 의해서 두 실수 x, y에 대해서 $x + y$, $x - y$ 등이 잘 정의되며 위의 예에서 나타난 $a + b$ 까지 잘 정의됨을 알 수 있다.

이와 같이 비숍은 비구성적 수학을 수정 보완했기 때문에 비구성적수학과 구성적 수학은 서로 일치하지 않는 면이 많다.

그러나 구성적 수학은 비구성적 수학보다 요구 조건이 강하므로 구성적으로 참인 모든 정리는 비구성적으로 참인 것은 사실이다. 그리고 비구성적 증명은 언제나 구성적으로 재해석하는 것이 가능하다. 예를 들어 a^b이 유리수가 되는 무리수 a, b가 존재한다는 정리를 생각해 보자.

이 정리의 비구성적 증명은 다음과 같다.

$\sqrt{2}$는 무리수다. 그러면 배중률에 의해서 $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$는 유리수이던가 무리수이다. 만약 $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$가 유리수라면 증명은 끝났다. 만약 $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$가 무리수라면 $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, $b = \sqrt{2}$로 놓으면 $(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = 2$ 가 되어 역시 정리가 성립한다.

이 증명은 구성적으로 무엇을 보여주는가 모든 무리수 a, b에 대해서 a^b은 반드시 무리수는 아니더라는 것을 구성적으로 알 수 있다. 왜냐하면 모든 무리수 a, b에 대해서 a^b가 무리수라면 $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$도 무리수 $(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = 2$ 도 무리수라는 모순이 생긴다.

아무튼 비숍의 구성주의는 아직 실험적인 단계이긴 하지만 해의 존재 증명보다는 해를 구하는 방법이 더 중요한 응용수학에서 상당히 위력을 발휘하고 있다.

참 고 문 헌

Calder, A. (1979). Constructive mathematics. Scientific American. 146-71.

Klein, M. (1980). Mathematics; The loss of certainty. 박세희 (역) (1984). 수학의 확실성. 민음사.