

한국과 러시아의 수학교과서 비교분석 연구 II

- 고등학교 대수영역을 중심으로 -

한 인 기 (모스크바국립사범대학교)

신 현 용 (한국교원대학교)

서 보 역 (한국교원대학교)

I. 서 론

A. 연구의 필요성 및 목적

오늘날 세계는 각종 과학, 기술의 발전으로 인하여 하나의 개방된 생활공간이 되어가고 있다. 학문 분야에서도 국제적인 학술교류가 증대되고 있다. 우리나라는 분단이라는 현실 때문에 학술 교류등이 서방 세계에 편중되어 왔다. 그러나, 1990년 러시아와 국교수립 이후 많은 교류가 진행되고 있지만 러시아의 교육제도 등에 대한 연구는 빈약한 상태이다. 러시아는 1957년에 세계 최초로 인공위성을 우주에 발사했고, 그 후 동·서 냉전 체제 하에서 동구권의 맹주로서 수학, 과학, 기술 공학적인 발전을 이룩해 왔을 뿐만 아니라 1950년 부터 열린 국제 수학 올림피아드에 29회 동안 참가하여 1위 13회, 2위 7회 한 것을 비롯하여 계속 10위 안에 머무는 우수한 실력을 과시하였다. 그러므로, 우리나라의 수학교육을 조명하는 데 있어서, 러시아의 수학교육을 살펴보는 것은 상당히 의미있을 것이다.

한국과 러시아의 수학교육 비교연구는 중학교 기하 부분의 수학교과서 비교·분석 연구(이용곤, 신현용, 서보역, 1995)만이 발표되어져 있다. 따라서, 기하영역외에서도 러시아 수학교육에 대한 후속연구가 요구되고 있다.

특히, 대수는 수학에서 의사소통을 하는 데 주로 사용되는 언어이며, 추상적인 단계에서 개

념을 조작하고 적용하는 수단이다(NCTM,1989). 현재 중·고등학교에서 지도되는 수학의 내용은 구체물의 조작보다는 기호를 이용한 개념과 수식의 조작이 대부분이다. 그러므로, 중·고등학교 수학의 교수-학습에 있어서 개념을 획득하고 식을 조작하는 수단으로서 혹은 수학적인 의사소통의 언어로서 대수는 중요하며, 또한 수학교육에서 대수의 효율적인 교수-학습이 요청된다. 이를 위해서는 대수의 학습내용, 대수의 교수-학습방법, 대수에서 학생들이 느끼는 어려움 등등의 학습내용에 대한 연구 중의 하나로 러시아의 10-11학년 수학교과서 중 「대수와 기초해석」과 한국의 고등학교 수학 교과서인 「일반수학」과 「수학II」의 대수 영역을 중심으로 두 나라의 학습내용을 비교해 보는 것은 매우 의미있는 연구라 하겠다.

또한 교과서의 외적체제와 내적 체제에 대한 국내의 연구에서 책의 판면은 학생들의 신체적인 조건과 관련시켜 초·중·고등학생에 따라 그 크기를 달리하는 것이 바람직하며(전영표, 1982; 이종익, 1981), 활자의 크기, 글자의 간격이나 행 사이의 간격 등이 가독률에 영향을 미친다는 연구 결과가 있었고(한국교육개발원, 1982), 바람직한 여백의 크기나 비율, 교과서의 학습 내용 구성에 대한 연구도 있었다(임선숙, 1988). 따라서, 본 연구에서는 한국과 러시아의 교과서에 제시된 학습 내용 뿐만 아니라 두 나라 교과서의 내적·외적 체제에 대한 비교 연구도 수행하였다.

본 연구의 목적은 러시아의 교과서를 번역하

여 한국의 교과서와 외적·내적 체제, 학습내용의 범위, 배열, 제시 방법 등의 비교·분석을 통하여 한국 수학교육의 질적 향상을 위한 기초 자료를 제공하는 데 있다.

B. 연구문제

- 1) 한국과 러시아의 고등학교 수학교과서의 판면, 지질, 여백 등 교과서의 외형적인 체제의 차이는 무엇인가?
- 2) 한국과 러시아의 고등학교 수학교과서의 단원 체제, 학습내용 구성 등 교과서의 내적 체제의 차이는 무엇인가?
- 3) 한국과 러시아의 고등학교 수학교과서의 대수 영역에서 학습내용의 범위, 배열, 그리고 내용 제시 방법의 특성은 무엇인가?

C. 연구의 제한점

러시아에서는 방정식과 부등식, 함수, 지수함수와 로그함수, 삼각함수 등은 본 연구의 주요 비교 대상인 10 - 11학년 대수와 기초해석 교과서에 제시되어 있으나, 수와 식, 다항식의 계산, 유리식과 무리식, 수열과 순서도 등은 7 - 9학년 대수 과정에서 다루고 있다. 따라서, 10 - 11학년 교과서를 중심으로 비교·분석을 하되 10 - 11학년에서 다루어지고 있지 않은 영역은 7 - 9학년 교과서를 사용한다.

II. 연구의 방법 및 절차

A. 연구대상

한국은 제 5차 교육과정의 고등학교 8종 수학 교과서로 일반수학과 수학Ⅱ를 채택하였고 러시아는 10 - 11학년의 교과서 Bashmakof, M.I. (1991). *Algebra i Analiza*. Moscow : Frosbechenie 를 선택하였다.

B. 연구방법 및 절차

본 연구는 기술적인 방법을 사용한 내용분석 연구이다. 즉, 한국과 러시아의 교과서를 각 단원을 중심으로 유목으로 나누고 분석 단위를 결정하여 그 내용을 비교분석하는 것이다.

본 연구에서는 George Z. Bereday 가 *Comparative Method in Education* 에서 제시한 비교모형을 기본으로 하여, 본 연구에 적합하도록 이 모형을 수정하여 다음과 같은 4단계의 과정을 거쳐 비교·분석 연구를 수행하였다: 1) 자료의 선정 및 수집, 2) 기술, 3) 병치, 4) 비교.

III. 교과서의 비교·분석

교과서의 체제는 외적 체제와 내적 체제로 나누어 살펴볼 수 있는데, 외적 체제는 활자·지질의 선택과 가독성(可讀性)에 관한 사항(활자, 행간, 여백, 판면율, 지질), 장정에 관한 사항(표지, 면지, 속표지, 체본, 판형)등이고 내적체제는 내용에 관한 사항(문제의 제기, 단원 조직) 등을 들 수 있다.

A. 수학교과서의 외적체제 분석

외적체제란 학습내용 조직 이외의 외양에 관한 사항들을 말하는 것으로 본 연구에서는 판형, 표지, 면지, 속표지, 화보, 내용지질, 활자의 크기, 행간, 여백 등의 내용들을 살펴보기로 한다.

- 1) 한국의 모든 교과서의 판형은 국판(가로 148mm, 세로 210mm)이고 러시아의 교과서는 국판보다 가로는 좀 좁고 세로의 길이가 더 긴 판형(가로 148mm, 세로 222mm)이었다. 표지는 한국이 모조코팅 용지를 사용한 소프트 카바인데 반해 러시아는 하드카바를 사용했고, 교과서에 사용된 종이의 지질을 보면, 한국과 러시아 모두 교과서용 중질지인데 한국의 교과서에 사용된 종이의 질이 러시아의 것보다 더 좋았다.

2) 교과서에 사용된 활자의 크기는 한국의 교과서는 10 point(활자의 크기가 3.514 mm)의 글자를 사용하고 있으며, 본문 내의 문제, 연습 문제, 기본 확인 문제, 종합 문제 등의 문제를 제시할 때는 좀 더 작은 크기의 글자를 사용하고 있고, 표지, 목차, 단원의 첫머리 등에서는 장식적 의도로 좀 더 크고 진한 글자를 사용하고 있다. 러시아 교과서의 글자 크기는 6 point(활자의 크기가 2.108 mm)였다.

3) 한 페이지에 제시된 행의 수는 한국은 22 - 26행이고 러시아는 38행 - 48행이었으며, 행간격도 한국은 2.77mm 이지만 러시아의 교과서는 2mm였다(최정화, 1994). 즉, 러시아의 교과서는 한국의 교과서보다 활자의 크기가 작고, 행의 수는 많았고, 행 사이의 간격은 좁았다.

4) 한국의 수학교과서는 위 여백 28mm, 아래 여백 22mm, 바깥쪽 여백 20mm, 안쪽 여백 18mm로 전체 판면에 대한 학습 내용이 제시된 판면의 비율이 53%인 반면에 러시아의 교과서는 위, 아래, 안쪽, 바깥쪽 모두 14mm로 전체 판면에 대한 학습 내용이 제시된 판면의 비율이 66.6 % 이다.

B. 수학교과서의 내적체제 분석

교과서의 내적 체제란 내용 조직에 관한 사항을 말한다. 즉, 표지, 화보, 머리말, 차례, 본문, 색인 그리고 삽화 등이 그 조직의 요소가 된다. 가장 핵심인 본문 체제를 구성하는 중요한 요건은 단원의 학습목표 제시, 학습 내용 진술, 정리 또는 문제 등의 제시이다.

(1) 교과서 체제 구성

한국의 수학교과서의 내적 체제 구성을 보면, '표지 → 앞면지 → 원색 화보 → 속표지 → 머리말 → 차례 → 단원 표지 → 단원 개관 → 본문 → 부록 → 판권면 → 뒷면지 → 뒷표지'로 이루어져 있다.

러시아의 수학교과서는, '표지 → 앞면지 → 속표지 → 머리말 → 본문 → 부록 → 차례 → 판권면 → 뒷면지 → 뒷표지'로 이루어져 있다.

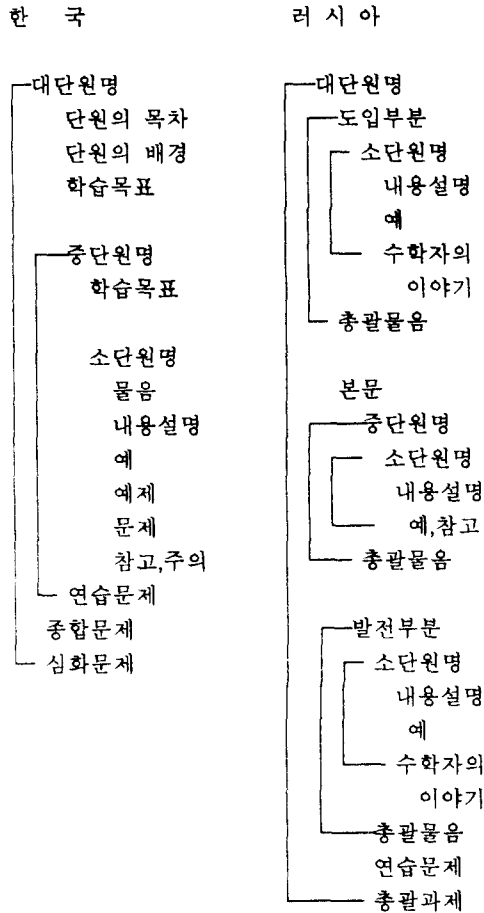
(2) 본문의 체제 구성

한국과 러시아 교과서의 단원 구성과 학습 내용의 체제를 비교하여 보자. 한국의 경우는 각 학년마다 8종의 교과서를 사용하기 때문에 통일된 본문구성을 파악할 수 없기에 이 교과서를 모두 비교하여 그 공통된 구성을 한국의 교과서로 취급하였다.

한국 교과서의 단원구성은 다음과 같다: 대단원명 → 단원의 목차 → 단원의 배경 → 학습목표 → 중단원명 → 학습목표 → 소단원명 → 물음 → 내용 설명 → 예 → 예제 → 문제 → 연습문제 → 종합문제 → 심화문제

러시아 교과서의 단원구성은 다음과 같다: 대단원명 → 도입부분 → 소단원명 → 내용설명 → 예 → 수학자에 대한 이야기 → 총괄물음 → 본문 → 중단원명 → 소단원명 → 내용설명 → 예 → 참고 → 총괄물음 → 발전부분 → 소단원명 → 내용설명 → 예 → 수학자에 대한 이야기 → 총괄물음 → 연습문제 → 총괄과제

한국과 러시아 수학교과서의 단원구성 및 학습내용 구성의 체제를 분석해 보면 한국은 모든 교과서가 대단원 - 중단원 - 소단원으로 구성되어 있는데 실제적인 학습내용의 제시는 모두 소단원에서 이루어지며 중단원별로 학습목표와 연습문제가, 대단원별로 단원의 목차, 단원의 배경, 학습목표, 종합문제, 심화문제가 제시되어 있다. 반면 러시아는 대단원이 도입부분, 본문, 발전부분으로 구성되어 있으며, 각 부분마다 학습 내용과 예가 제시되어 있다. 그리고, 도입부분과 발전부분은 학습 주제에 따라 소단원으로 구성되고, 각 부분의 끝에는 총괄물음이 제시되며, 본문은 중단원 - 소단원으로 이루어 지는데 소단원 별로 학습 내용이 제시되고 중단원마다 총괄물음이 제시된다.



<표 1>

1) 단원 구성 체제 비교

한국은 학습내용의 개괄을 위해 대단원, 중단원 별로 학습 목표를 제시했을 뿐 소단원, 중단원 간의 연결성이나 관계를 설명하는 내용을 제시하지 못했다. 즉, 소단원을 중심으로 모든 학습 내용의 제시가 이루어지는데 이러한 구성에서는 기본 요소의 제시 기능은 명확하게 할 수 있다. 한편, 러시아의 교과서는 학습목표가 단원 별로 전혀 제시되지 않고, 도입부분과 발전부분을 통해서 소단원들에 대한 개괄과 통합을 시도하고 있어 발전학습 유도에 상당히 바람직했

다.

Bruner 가 수학 학습의 일반적인 이론으로 제시한 것 중의 하나가 연결이론인데 수학적 개념이나 원리들은 서로 연결되어 있으며, 이러한 요소들의 구조화된 연결을 통해 분석적이고 통합적인 수학적 추론이 가능해진다. 이러한 견지에서 볼 때, 한국의 교과서는 중단원 소단원들 간의 연결, 통합을 나타낼 수 있는 단원 구성이 필요하다.

러시아 중학교 기하교과서의 수학교육과정이 단원이 연속적으로 배열된 단선형 교육과정(이용곤, 신현용, 서보역, 1995) 인 것처럼 고등학교 대수교과서의 단원구성이 한국과는 다른 단선형 교육과정을 취하고 있었다.

2) 학습내용의 구성 체제

한국에서는 소단원에서 학습내용이 제시된 후에 예, 예제가 주어지고, 다시 문제가 주어져 학습내용에 대한 충분한 반복이 이루어진 후에, 다시 새로운 내용이 제시되는 반면, 러시아의 교과서는 학습내용이 제시되고, 한 두개의 예가 제시되고, 다시 새로운 학습내용이 주어지며, 중단원이 끝난 후에 중단원에 대한 간단한 물음이 제시되고, 문제들은 대단원이 끝난 후에 한꺼번에 모두 제시된다.

양적인 측면에서 한국의 모든 수학교과서는 학습내용의 양에 관계없이 중단원이 끝나면 연습문제, 대단원이 끝나면 종합문제와 심화문제를 일괄적으로 제시하고 있지만 러시아의 교과서는 대단원의 끝, 단원의 끝에 연습문제가 소주제 별로 제시되어 있으며, 그 양은 대단원마다 일정한 쪽수가 할당된 것이 아니라 그 단원의 학습내용의 양에 따라 신축성있게 제시되고 있다.

발전학습에 있어서 한국은 모든 학생들이 필수적으로 알아야 할 내용을 제시하고 발전학습에서는 교육과정을 벗어난 내용이나 응용문제를 간단하게 언급하였고, 러시아는 필수적인 내용뿐만 아니라 수학에 더 흥미가 있는 학생들을 위한 부분도 제시되어 있다.

IV. 수학교과서 내용 비교·분석

한국과 러시아 교과서에서 학습내용의 범위와 학습지도 내용을 분석하기 위해서 한국의 교과서에서 대수영역으로 다루는 것과 러시아에서 대수로 다루는 영역을 모두 고려하여 다음 9가지 영역으로 나누어 살펴보고자 하겠다. 집합과 명제, 수와 식, 다항식, 유리식과 무리식, 방정식과 부등식, 함수, 지수함수와 로그함수, 삼각함수, 행렬, 수열과 순서도의 순서이다.

(1) 집합과 명제

한국의 교과서에서는 일반수학의 1단원에 집합과 명제라는 단원으로 제시되어 있어 이 단원을 통한 논리적 사고의 기초를 가지고 대수, 해석, 기하 학습이 되도록 구성되어 있다. 반면, 러시아에서는 집합을 다루지 않고 있다. 교육과정 개정전에는 4학년 「수학」에서 수를 원소로 하는 집합, 임의의 원소를 가지는 집합, { } 기호, \emptyset , \subset , \in , \notin 등의 내용을 직접 다루고 있다. 개정후에는 단지 8학년 대수교과서 1장 1절에서 위의 기호에 대한 개념만을 학습하고 있다.

(2) 수와 식

한국의 교과서는 유리수, 무리수, 실수의 성질, 복소수에 이르는 단원이 있다. 특히, 실수를 다룰 때 실수가 유리수와 무리수로 이루어져 있고, 덧셈과 뺄셈에 대해 닫혀있고, 결합법칙이 성립하고, 교환법칙이 성립하고, 항등원과 역원이 존재하고 분배법칙이 성립하는 것을 강조하고 있다. 즉 체의 대수적 구조를 모두 나열시키고 있는 것이다. 러시아의 교과서의 경우 정수, 유리수는 5, 6학년 수학에서 다루고 무리수와 실수의 체계는 8학년에 제시되어 있지만 복소수는 발전부분에서만 조금 다루고 있어 실제로 제시되어 있지는 않다.

(3) 다항식

한국은 단항식과 다항식만 구별하여 말하고

있는데, 러시아의 교과서에서는 다항식을 다시 이항식, 삼항식 등으로 나누어 제시하고 있었다. 예를 들면 $y = ax^2 + bx + c$ 를 한국은 이차식으로 부르지만 러시아에서는 이차삼항식이라고 부른다.

러시아 교과서에서는 인수분해 방법으로 공통인수를 괄호 밖으로 꺼내기, 항들을 적절히 묶기, 곱셈공식을 이용한 인수분해 등을 제시하고 있다. 예를들면, 한국은 $a^3 + 2a - 3$ 은 인수정리와 조립제법을 써서 인수분해하지만 러시아에서는 미정계수법, 나머지 정리, 인수정리와 조립제법이 제시되지 않고 있기 때문에,

$$\begin{aligned} a^3 + 2a - 3 &= a^3 - 1 + 2a - 2 \\ &= (a-1)(a^2 + a + 1) + 2(a-1) \\ &= (a-1)(a^2 + a + 3) \end{aligned}$$

와 같이 인수분해를 하고 있다.

(4) 유리식과 무리식

한국은 유리식과 유리식의 성질, 유리식의 약분과 통분, 사칙연산, 변분수식, 제곱근의 성질, 분모의 유리화, 무리식의 내용이 제시되어 있고 러시아의 경우는 유리식이라는 용어 대신 분수식을 사용하였고, 변분수식과 무리식의 조작, 분모의 유리화는 제시되어 있지 않았다.

(5) 방정식과 부등식

한국과 러시아의 학습내용과 설명방법을 비교해 보면 다음과 같은 차이가 있다.

1) 러시아에서는 무연근이라는 용어를 사용하지 않고 있다. 하지만 유리식이나 무리식을 풀 때 생기는 무연근을 제거하여 주었다. 한국은 분수방정식, 무리방정식에 무연근이라는 용어를 제시하여 분수식과 무리식의 성질을 이용하여 무연근을 찾았다.

2) 러시아에서는 한국과 달리 방정식의 상등, 방정식의 항등변환을 소단원으로 독립하여 상세히 다루고 있었다.

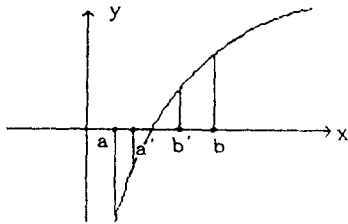
3) 한국에서는 연립부등식, 고차부등식, 무리

부등식 등을 다루고 있으나, 러시아에서는 이러한 내용에 대해서 다루고 있지 않았고 고차방정식도 특정한 형태의 방정식만을 다루고 있다.

4) 방정식을 푸는 방법으로써 한국에서는 인수분해, 근의 공식, 완전제곱법에 의한 방법이 제시되고 있으나 러시아에서는 인수분해, 근의 공식, 그래프에 의한 방법을 제시하고 있다.

여기서, 한국과 큰 차이를 보이고 있는 방정식의 근을 구하는 해법에서 그래프를 사용하여 근의 근사값을 구하는 방법에 대해서 자세히 살펴보기로 하자.

함수 $y=f(x)$ 가 주어져 있다. 이 함수의 근을 구하여 보자.



<그림 1>

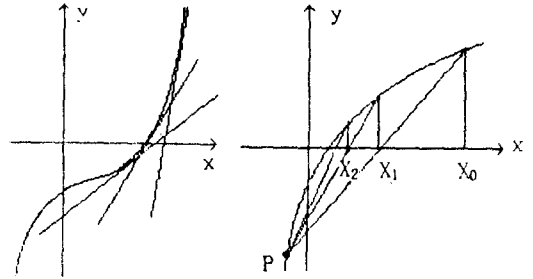
방법1. 함수값을 이용하여 푸는 방법(그림1)

함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 개략적으로 그려서 근의 위치가 구간 $[a, b]$ 에 있다는 것을 알아낸다. 다시 구간을 더 세분하게 나누어서 각 구간의 끝점에 대한 함수값이 서로 다른 부호가 되도록 새로운 구간 $[a', b']$ 을 취한다. 다음 새로운 구간 안에서 함수값의 부호를 서로 다르게 하는 새로운 구간을 정한다. 이렇게 계속 조작하여 가면 근의 근사값을 구할 수 있다.

방법2. 접선을 이용하는 방법(그림 2)

우리는 곡선 상에서 접선과 x 절편을 구할 수 있다. 곡선상에서 접선을 긋고, 그 때의 x 절편이 감소하다가 증가하는 또는 증가하다가 감소하는

점을 구해 나가면 이 방정식의 해에 대한 근사값을 구할 수 있다.



<그림 2>

<그림 3>

방법3. 할선을 이용하는 방법(그림 3)

x 축위의 점 x_0 그래프 위에서 점 P 를 잡아서 $f(x_0)$ 과 P 를 연결한 직선의 x 절편을 x_1 이라고 잡고, 다시 $f(x_1)$ 과 점 P 를 연결하여 x 절편으로 x_2 를 잡는다. 이렇게 계속 반복하여 나가면 근사값을 구할 수 있다.

한국교과서가 방정식과 부등식 풀이를 인수분해에 의존한 데에 비해서, 일반적인 식이 인수분해되지 않는다는 사실을 바탕으로 근사적으로 근을 구하게 한 러시아 교과서에서는 상당한 융통성을 보여 특이했다.

(6) 함수

한국의 함수 단원에서는 함수의 정의, 합성함수, 역함수, 고차함수, 유리함수, 무리함수를 다루었고, 러시아도 거의 같았고, 일차함수를 10-11학년에서 심도있게 다루고 있었다.

함수에서 특이할만한 것은 러시아 교과서는 다음 8가지 기준을 제시하여 모든 함수를 이 기준에 비추어 설명하였다.

① 함수의 정의구역, ② 함수값이 0이 되는 점들(즉, 근), ③ 함수값의 부호가 불변인 구간,

④ 극점들, ⑤ 함수가 증가(감소)하는 구간, ⑥ 함수의 최대값, 최소값, ⑦ 함수의 치역, ⑧ 기함수성 또는 우함수성

위의 기준에 의해서, 함수를 설명하는 데 이러한 함수의 제시방법을 보면, ① 변수 x 에 대한 y 의 계산규칙에 의해서 제시되기도 하고, ② 도표에 의해서 제시되고, ③ 그래프에 의해서 각각 구분하여 제시되어지고 있다. 이 제시된 함수를 작도하는 방법으로 그래프의 평행이동, 팽창, 수축, 대칭 등을 이용하고 있다.

(예제) $y = |x^2 + x| - 2$ 의 그래프를 그려보자

(풀이) 단계 1. $y = x^2 + x$ 의 그래프를 그린다.

꼭지점 $x_0 = -\frac{1}{2}$, $y_0 = -\frac{1}{4}$, 근은 $x_1 = -1$, $x_2 = 0$ 이다.

단계 2. $y = |x^2 + x|$ 의 그래프를 그린다.

단계 1의 그래프의 음수부분을 x 축 위로 반사시킨다.

단계 3. $y = |x^2 + x|$ 의 그래프를 y 축으로 +2만큼 이동시킨다. (풀이 끝)

결과적으로, 함수단원에서 한국교과서는 내용 설명 중심 즉, 합성함수, 역함수, 이차함수, 삼각함수, 유리함수, 무리함수 등 다양한 함수들 자체의 설명이 중심이 되어 있어서 개념을 학습하기에 용이하도록 되어 있고, 러시아는 함수 탐구 방법 즉, 그래프중심의 탐구방법을 다루고 있어서 특별한 함수 자체의 개별적인 성질보다는 일반적인 함수라는 커다란 맥락에서 그 성질을 탐구하도록 내용이 제시되어 있다.

(7) 지수함수와 로그함수

한국에서는 로그의 계산을 위해서 지표와 가수, 보간법 등을 통하여 로그표를 이용해 계산하도록 되어 있으나 러시아에서는 계산기를 이용하도록 하고 있다.

지수의 예로써 방사능 붕괴에 의한 무게 변화식

$$m = m_0 2^{-\frac{t}{T}} \quad (m_0: \text{최초무게}, T: \text{반감기}, m: \text{시}$$

간 t 에서의 무게), 인구증가식, 기압의 공식 등 다양한 실생활의 예로 설명하였고, 발전부분에서 지수함수를 공리적으로 다음과 같이 정의를 내리고 있다.

지수함수 $y = f(x)$ 는 단조함수이고 모든 수 직선 상에서 정의 되고, $f(x_1) \cdot f(x_2) = f(x_1 + x_2)$ 를 만족시키는 함수이다.

한국과 러시아 교과서에서 같은 개념을 서로 다르게 설명하고 있는 것들 중에서 무리수 e 에 대해서 살펴보자.

한국에서는 $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$ 라고 정의를

내리고 있다. 러시아 교과서에서는 지수함수를 이용하여 다음과 같이 무리수 e 를 정의하고 있다. $y = a^x$ 에서, 점 $(0,1)$ 에서 접선을 그을 때, a 의 값이 커지면 접선의 기울기는 커진다. 즉, $a = 2$ 일 때 접선의 기울기는 약 0.693 이고, $a = 10$ 일 때 약 2.303 이다. a 가 연속적으로 2에서 10으로 변할 때 점 $(0,1)$ 에서의 기울기도 연속적으로 변하는데 이 기울기가 1이 되는 x 의 값을 찾을 수 있다.

접선의 기울기가 1일 때 함수 $y = a^x$ 에서 $a = e$ 라고 한다. 즉, 이 점에서 접선은 x 축과 45° 의 각을 이루게 되는데, 이 값이 $e \approx 2.718$ 이다.

(8) 삼각함수

한국과 러시아의 교과서 내용을 분석해 보면

① 러시아는 우리생활 주변에서 주기적인 현상(심장의 박동, 유기체의 활동에서의 주기, 바퀴의 회전)을 도입하여 독립된 소단원으로 제시하면서, 주기함수, 주기, 각 등과 연결시키고 있다.

② 러시아는 한국과 달리 기함수, 우함수라는 용어를 상세히 사용하여 삼각함수의 그래프를 작도하거나 덧셈공식의 유도, 삼각방정식의 해를

구하는 데 이용하고 있다.

③ 한국의 교과서들이 호도법을 이용해 부채꼴의 호의 길이와 넓이에 대해서 다루고 있으나, 러시아는 다루고 있지 않다.

④ 러시아는 삼각함수의 근사식 ($t \rightarrow 0$ 일 때, $\sin t \approx t$) 을 이용하여 t 가 0에 가까이 갈 때, $\sin t, \cos t$ 의 값을 구했고 더 정확한 근사값을 구하는 방법으로서 sine, cosine의 테일러 급수전개식을 제시하였으나 이것을 유도하지는 않았다.

예를들면, $t \rightarrow 0$ 일 때 $\sin t \approx t$ 를 통해서

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1 \text{을 제시하였고,}$$

$\sqrt{1 - \sin^2 t} \approx \sqrt{1 - t^2} \approx 1 - \frac{t^2}{2}$ 을 소개하였다.

⑤ 한국에서는 삼각방정식을 풀 때에 특수한 각 만을 다루고 있지만 러시아는 arcsine, arccosine, arctangent를 도입하여 특수각이 아닌 각의 값에 대한 삼각방정식을 풀었다. 예를 들면,

(문제) $5 \sin^2 x + 3 \sin x \cos x - 4 = 0$ 를 풀어라.

(풀이)

$$5 \sin^2 x + 3 \sin x \cos x - 4(\sin^2 x + \cos^2 x) = 0$$

$$\sin^2 x + 3 \sin x \cos x - 4 \cos^2 x = 0$$

$$\tan^2 x + 3 \tan x - 4 = 0$$

$$\tan x = 1, \quad \tan x = -4$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi n$$

$$x = -\arctan 4 + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

이제, 한국과 러시아의 교과서가 차이를 보이고 있는 중요한 몇가지의 내용에 대해서 구체적으로 살펴보자

1) 라디안 (radian)

한국에서는 다음과 같이 정의를 내리고 있다.
 $2\pi r : r = 360^\circ : \alpha^\circ$ (r :반지름, α :호의 중

심각)에서, $\alpha^\circ = \frac{180^\circ}{\pi}$, 따라서 중심각의

크기 α° 는 반지름의 길이에 관계없이 일정하다. 이때, 일정한 각의 크기를 1 라디안이다.

반면, 러시아에서는 다음과 정의하고 있다.

어느 한 점이 반지름이 r 인 원주를 회전하고 있다. 회전이동한 거리와 반지름 r 사이의 비는 r 과 관계없이 일정하므로, 이것을 하나의 척도로 사용할 수 있다. 이것은 반지름이 1인 원 위를 회전 이동한 거리와 같게 된다. 즉, 단위원에서 원주길이의 반이 π 이고 이것을 이용하여 다른 각들을 측정한다. 그러므로, 직각은 $\frac{\pi}{2}$ 이고, 정

삼각형의 한 각은 $\frac{\pi}{3}$ 이다. 수 1과 같은 각의

척도를 1 라디안이라고 부른다. 결국 각의 라디안 척도는 단위원에서 점이 이동한 거리와 수치적으로 같다.

2) 삼각함수의 그래프 정의

한국에서는 대부분의 교과서가 다음과 같이 정의를 내리고 있다.

단위원과 각 θ 가 나타내는 동경과의 교점 P의 좌표를 (x, y) 라 하면 $\sin \theta = y$, $\cos \theta = x$ 가 된다. 그러므로, 독립변수로 θ 값을 취하고 이것에 대해 점 P의 y 값과 x 값을 표시하면 $y = \sin \theta$, $x = \cos \theta$ 의 그래프를 얻는다. 그리고 $\sin(\theta + 2\pi) = \sin \theta$ 를 이용하여 나머지 θ 값에 대한 그래프를 정의하고 있다.

러시아는 구간 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 에서는 한국의 교과서와 같은 방법으로 $y = \sin \theta$ 의 그래프를 정의하였고, $\sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = \sin(\frac{\pi}{2} + \theta)$ 이므로, sine의 그래프는 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 에 대해서 대칭임

을 이용해 구간 $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ 에서 그래프를 정의하였다. 구간 $[-\pi, 0]$ 에서 sine의 그래프는 sine함수가 기함수라는 것을 이용하여 얻었다.

이와 같은 방법으로 구간 $[-\pi, \pi]$ 에서 sine함수의 그래프를 정의하였고, 구간 $[-\pi, \pi]$ 는 sine의 주기와 길이가 같으므로, 모든 θ 값에 대한 $y = \sin \theta$ 의 그래프는 작도한 곡선을 평행이동하여 얻어진다.

3) 삼각함수의 덧셈정리

한국의 덧셈정리는 cosine 제 2법칙을 사용하여 유도하거나 단위원에서 삼각형의 합동과 두 점사이의 거리공식을 이용하여 유도하고 있다. 러시아는 단위원에서 벡터의 내적을 이용하여 다음과 같이 유도하고 있다.

단위원 위에 x축과 이루는 각이 a와 b인 벡터 \vec{OP}_a 와 \vec{OP}_b 를 표시하자. 이때, 벡터 \vec{OP}_a 와 \vec{OP}_b 가 이루는 각은 $a-b$ 이다. 이 벡터들의 스칼라곱을 계산하면,

$$\vec{OP}_a \cdot \vec{OP}_b = |\vec{OP}_a| \cdot |\vec{OP}_b| \cos(a-b),$$

$$\vec{OP}_a \cdot \vec{OP}_b = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$$

이고, 계산결과를 비교하면

$$|\vec{OP}_a| = |\vec{OP}_b| = 1$$

이므로,

$$\cos(a-b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$$

이다.

(9) 행렬

최근 수학교육에서 이산수학을 강조해야 한다는 권고들이 있었다(류희찬, 1992; Dossey, 1991). 행렬은 이산수학의 한 분야로서 이산수학의 문제해결에 있어서 강력한 도구이며, 많은 실제적인 상황등을 수학적으로 모형화하고, 수학의 응용에서 문제해결을 위한 도구일 뿐만 아니라

자료를 저장하고, 일차변환을 나타내며, 일차연립방정식을 풀 때 사용되기 때문에 중요하다.

한국에서는 행렬과 그 응용에 대해서 폭넓게 다루고 있으나 러시아에서는 전혀 다루고 있지 않았다.

(10) 수열과 순서도

수열은 한국의 경우 II-상에서 지도하고 있고, 러시아는 9학년 대수에서 배우고 있다. 한국의 교과서가 \sum 기호를 사용하여 수열의 합, 무한등비급수의 합, 정적분을 정의하고 있는 반면 러시아는 Σ 기호를 사용하고 있지 않다. 러시아에서는 알고리즘을 9년 대수에서 다루고 있는데, 한국은 순서도와 연결시켜 가르치고 있고, 러시아는 독립적으로 알고리즘만 다루고 있었다. 예로써, 에라토스테네스의 체를 구하는 알고리즘과 계산 알고리즘이 소개되었다.

한편, 러시아에서는 수열부분에서 제차수열, 순서도를 다루지 않았는데 러시아 교과목 중 「정보과학과 컴퓨터 공학의 원리」라는 과목에서 배울 가능성이 크다.

V. 요약·결론 및 제언

A. 요약 및 결론

(1) 교과서의 외적 체제 비교

표지는 한국이 모조코팅 용지를 사용한 소프트카바인데 반해 러시아는 하드카바를 사용했고, 내용지질은 한국과 러시아 모두 교과서용 중질지로 사용하고 있다. 교과서의 여백을 보면, 한국 교과서가 여백이 차지하는 비중이 전체의 47%이고, 러시아의 교과서는 33.4%로서 러시아 교과서는 여백이 적어서 책을 읽을 때 답답한 느낌을 주는데, 한국의 교과서는 여백이 충분하여 교과서를 대할 때 여유로운 느낌을 주었다.

(2) 교과서의 내적체제 비교

1) 한국의 단원구성 방법은 대단원 - 중단원 - 소단원으로 되어 있고, 모든 내용들이 소단원에서 제시되어 있고, 러시아의 경우는 도입부분 - 본문 - 발전부분으로 구성되어 있어서 대단원 내용의 관련성을 발견하고, 발전학습을 제시하는 기능에서는 상당히 바람직했다.

2) 학습목표의 제시에 있어서는 대단원, 중단원별로 한국은 제시하고 있었지만, 러시아는 그렇지 않았다.

3) 연습문제의 양적인 측면에서 한국은 중단원과 대단원이 끝난 다음에 연습문제, 종합문제, 심화문제가 단원에 관계없이 일정한 양이 제시되어 있고, 러시아는 대단원의 내용에 따라 차등을 두어 연습문제를 제시하고 있다.

(3) 학습내용 및 지도방법

1) 집합과 명제 : 한국은 집합과 명제라는 단원에서 집합, 명제, 명제 상호간의 관계를 다루어 논리적 사고의 기초를 가지고, 대수, 기하, 해석 등의 내용을 학습하도록 구성되어 있고, 러시아는 몇몇 용어의 개념을 제외하고는 전혀 다루지 않고 있었다.

2) 수와 식 : 한국교과서는 유리수, 무리수, 실수, 허수, 복소수까지에 이르는 수 체계를 모두 다룬데 비해서 러시아는 실수의 범위에 한정되어 다루고 있다.

3) 다항식 : 러시아에서는 인수분해 방법으로 공통인수를 괄호밖으로 꺼내기, 항들을 적절하게 묶기, 곱셈공식을 이용한 인수분해 등을 제시하였고, 한국에서는 조립제법과 인수정리를 이용한 고차식의 인수분해를 다루고 있다.

4) 유리식과 무리식 : 한국은 유리식과 분수식이라는 용어를 사용하고 있는데 비해 러시아는 분수식이라는 용어를 사용하였다. 그리고, 번분수식과 무리식에서의 유리화와 이중근호를 다루지 않았다.

5) 방정식과 부등식 : 러시아는 함수 $y=f(x)$ 의 근을 구하는 데 있어서 그래프를 이용하여 근사적으로 근을 구하고 있다. 그러나,

한국은 인수분해 공식이나 인수정리를 사용하여 정확한 근을 구하고 있다.

6) 함수 : 한국과 러시아의 함수의 학습은 거의 같았으나 특이할만한 것은 러시아 교과서에는 함수의 그래프를 이용하여 함수 탐구의 규준을 제시하였다는 것이다.

7) 지수함수와 로그함수 : 한국과 러시아의 차이는 계산기의 사용에 있다. 러시아는 로그함수의 값을 계산하는데 있어서 전적으로 계산기에 의존하고 있다.

8) 러시아 교과서는 생활주변에서 주기적인 현상들을 제시하여 주기함수, 주기, 각 등과 관련을 지어 삼각함수를 설명하고 있다. 또한 기함수, 우함수의 용어를 정의하였고, 삼각함수의 그래프를 작도하거나 덧셈공식의 유도, 삼각방정식의 해를 구할 때 이용하였다.

9) 행렬 : 한국교과서는 행렬이 최근 그 중요성이 증대되고 있는 내용이기 때문에 상당히 자세하게 다루고 있는 반면 러시아는 전혀 언급하고 있지 않다.

10) 수열과 순서도 : 수열과 순서도의 학습은 한국과 러시아가 서로 비슷하지만, 각 교과서에서 두드러진 특징이 몇 가지 있었다. 한국은 Σ 를 도입하여 무한등비급수, 정적분의 정의에서 사용하고 있지만, 러시아는 사용하고 있지 않았다. 한국에서는 순서도를 알고리즘과 같이 제시하였으나 러시아는 알고리즘만 학습할 뿐 순서도는 제시하고 있지 않았다.

B. 제언

러시아 수학교육 분야에 대한 연구는 이제 시작단계이다. 러시아는 수학분야에서 대단한 발전을 보이고 있기 때문에 수학교육분야에서도 발전을 보이리라 생각할 수 있다. 본 연구에서는 한국과 러시아의 고등학교 대수영역을 중심으로 교과서에 대한 비교 분석 연구를 수행하였다. 본 연구를 마무리 하면서 몇 가지 제언을 한다.

첫째, 수학교과서에 충분한 발전학습을 제공

해야 한다. 러시아의 교과서에서 발전학습 내용을 제시하고 있는 부분은 본문의 발전부분과 대단원 마지막에 있는 총괄과제 부분이다. 모든 학생을 위한 필수적인 내용 뿐만 아니라 수학에 더 관심이 있는 학생을 위한 발전된 내용도 교과서에 제시해 준다면 학생들에게 많은 도움이 될 것이다.

둘째, 근사값을 교과서에서 적절하게 활용하자. 러시아 교과서는 방정식 단원에서 함수 $y=f(x)$ 의 근을 구할 때(함수값을 이용하는 방법, 접선을 이용하는 방법, 활선을 이용하는 방법)와 삼각함수에서 $t \rightarrow 0$ 일 때 삼각함수의 값을 근사값으로 구하는 것을 제시하고 있었다. 근사값을 이용하면 학생들이 수학에서 구체적인 경험을 가질 수 있을 뿐만 아니라 어려운 수학적 관계들도 용이하게 도입할 수 있게 된다(예를들면, $t \rightarrow 0$ 일 때, $\sin t \approx t$ 이므로

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1).$$

셋째, 본 연구의 비교 결과, 한국과 러시아의 교과서는 지도하는 학습내용이나 그 내용 구성에 있어서 몇 가지 차이점이 있었다. 이러한 차이점들에 대해서는 교육현장에서의 실험 연구를 통해서 어떠한 지도방법이 더 바람직한가에 대한 앞으로의 연구가 필요하다.

넷째, 다른 수학영역의 수학교과서 비교연구 뿐만 아니라 러시아의 수학교육 전반에 걸친 비교, 분석 연구가 필요하다. 특히, 수학영재교육 측면에서 볼 때 러시아의 수학영재교육이 우리에게 주는 시사점이 크다고 볼 수 있다. 따라서, 러시아 영재교육에 대한 연구가 필요하다.

참 고 문 헌

- 고등학교 일반수학(1991). 검인정 8종류.
 고등학교 수학II(1991). 검인정 8종류.
 류회찬(1992). 수학교육과정의 새로운 내용 : 컴퓨터와 이산수학, 제 10회 수학교육학 세미나. 대한수학교육학회.
 이용근·신현용·서보억(1995). 한국과 러시아의 수학교과서 비교분석 연구I. 한국수학교육학회 논문집, 제 34권 제 1호.
 이종익(1981). 교과서의 체제와 품질, 교과서개선 연구 - 교과서 개선을 위한 세미나 종합 보고-. 대한출판문화협회 & 한국2종교과서 협회, 서울 : 교학사.
 임선숙(1988). 교과서 제도 및 내용 개선에 관한 연구. 숙명여자대학교 석사학위 논문.
 전영표(1982). 교과서 개발의 기술적 측면, 교과서 개발의 원리. 서울 : 한국교육개발원.
 최정화(1994). 한국과 러시아의 고등학교 수학교과서 비교연구. 한국교원대학교 석사학위 논문.
 한국교육개발원(1982). 중학교교과서 개선을 위한 연구, 서울 : 한국교육개발원.
 Bashmakof, M. I. (1991). Algebra i Analiza. Moscow : Frosbechenie.
 Dossey, J. A. (1991). Discrete mathematics : The math for our time. In the Discrete mathematics the curriculum, k-12 (NCTM, 1991 yearbook). Reston, V. A. : NCTM.
 NCTM(1989). Curriculum and evaluation standards for school mathematics. Reston, VA : NCTM.