韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
1995. 6. 제 34권, 제 1호, 107-117.

Journal of the Korea Society of Mathematical Education
Series A: Jun. 1995, Vol. 34, No. 1, 107-117.

한국과 러시아의 수학교과서 비교분석 연구 I

- 중학교 기하영역을 중심으로 -

이 용 곤(전남과학고등학교)
신 현 용(한국교원대학교)
서 보 억(한국교원대학교)

I. 서 론

A. 연구의 필요성 및 목적

전 세계가 국제화의 추세 속에서 학문 분야에서의 교류가 급속하게 증가되어져 가고 있다. 탈냉전의 이데올로기의 해빙기 속에서 폐쇄적인 학문 풍토는 사라지고 타국에 대한 관심과 연구가 활성화되어져 가고 있는 것이다. 이러한 상황에서 우리나라에서 러시아 및 동구권의 학교교육 특히 수학교육에 대한 연구는 미국과 일본에 대한 연구에 비하면 매우 빈약한 상태이다.

수학교육에 있어서 최대의 역사적인 전환점을 이루었던 수학교육 현대화운동의 직접적인 동기는 1957년 러시아에서 있었던 사상 최초의 인공위성 발사의 성공이었다(박한식, 1982). 러시아의 인공위성 Sputnik를 발사할 수 있었던 능력과 냉전시대의 국제적인 무기경쟁에서 러시아의 과학적 · 기술공학적인 진보들은 러시아의 매우 유능한 인적자원의 수학 · 과학 학문 연마에 힘 입은 바 컸다 (Szekely, 1983). 미국에서도 이 사건의 충격으로 수학 · 과학교육의 개혁에 착수하였다. 역설적으로 러시아에서도 미국의 개선에 영향으로 초등, 중등학교의 모든 수준에서 대대적인 교육과정 개혁을 단행하였는데 이것이 60년대 러시아의 교육개혁이었다.

1970년대에 접어들자 새수학운동은 강력한 비판을 받게 되었다. 교과내용이 실생활의 응용을 무시한 채 순수수학적인 측면의 구조적인 면에 치중하였던 것이다. 그래서, Back to basic의 새로운 수학운동이 일어났다.

1980년대에 들어서면서 문제해결력 신장을 위한 지도를 강조하는 경향을 보였고, 1990년대에는 수학적 힘을 기르는 데 수학교육의 목적을 두고 있다(NCTM, 1980, 1991).

위와 같은 국제적인 동향에 편승하여 러시아에서도 1960년대에 수학교육 개혁운동이 일어났으나 큰 성공을 거두지는 못했다. 1978년에 이르러 그러한 상황은 매우 심각하게 되어서 당시의 수학교육을 대체할 새로운 수학 프로그램에 대한 요구가 대두되게 되었는데 이것이 1980년 러시아의 수학교육 개혁이다(Szekely, 1983).

러시아의 수학교육에 대한 강조는 매우 특별하여 교육과정 개정의 모든 시기에서 가장 많은 주당 시간을 수학에 배정하였다.

이처럼 수학과 과학등의 기초학문에 치중하게 된 것은 러시아의 경제와 과학기술이 2000년대를 향하여 크게 도약할 준비를 계획한 결과라고 추리할 수 있을 것이다(김동규, 1984). 이와같은 교육여건에 비추어 볼 때 러시아의 IMO에서의 우수한 성적 「13회의 최다우승」(박한식, 최영한, 1989)은 어쩌면 당연한 귀결이었다.

본 연구는 중등학교 러시아와 한국의 수학교과서 기하영역에서 어떤 학습내용을 다루고 있는지를 밝혀보고자 하는 것이다. 교과서는 한국과 러시아의 중학교 수학수업에 있어서 주된 교수도구이다. 교수활동의 내용이나 범위, 순서에 대한 결정 뿐만 아니라 교육과정의 계획도 거의

전적으로 교과서에 기초하고 있다. 교과서는 수업과정에서 교사와 학생의 교수 및 학습활동의 직접적인 대상이 된다(한국교육개발원, 1985).

교과서가 교수학습활동에서 중요한 도구이고 시험들이 교과서에 기초하는 한 교과서는 계속해서 수학학습에 있어서 중요한 요소가 될 것이다. 따라서 교과서가 어떤 학습내용을 담고 있고 어떤 것을 다루고 있지 않느냐 하는 문제는 매우 중요한 것이다.

그리고, 중학교 교육과정에서 기하영역에 관한 문제점들은 끊임없는 논쟁점이 되어 왔다. 수학교육에 있어서 기하는 매우 중요한 영역이며 실제 수업에서 다루는 양을 보아도 큰 비중을 차지한다.

그러나, 기하영역만큼 지도내용과 지도방법이 나라마다 다양한 부분은 없다. 또한, 기하교육에 대한 다양한 이견이 기하영역의 체계적이고 일관성있는 구성을 이루지 못하게 하고 있다.

그럼에도 불구하고 면밀히 조사해 보면 Dieudonne가 지적한 바와 같이 기하학적 idea와 용어는 수학의 각 분야에 깊숙히 침투해 있다. 공간개념, 공리적 방법 등은 기하에서 출발하여 수학을 정복했고, 기하적 사고는 현대 수학적 사고를 지배하고 있다. Fletcher도 "수학자들이 기하에 대해 관심을 갖지 않는다는 것은 외형적인 것이지 실제로는 그렇지 않다. 그리고, 많은 수학분야에서는 기하학적 언어와 심상을 이용하고 있다. 또 알맞게 훈련된 기하학적 상상력은 수학자에게 큰 자산이다 " 라고 말하고 있다(문교부, 1988).

이처럼 기하학적 방법, 기하학적 언어등의 중요성이 강조된다면 기하교육의 중요성을 제언할 필요가 없을 것이다. 이런 의미에서 러시아와 한국의 중학교 수학교과서의 기하영역 분석 비교 연구는 의의를 가진다고 하겠다.

B. 연구문제

1) 기하영역에서 학습내용의 조직 및 계열성의 차이는 무엇인가 ?

2) 기하영역에서 학습내용의 범위 및 지도내용의 유사점과 상이점은 무엇인가 ?

C. 용어의 정의

1) 중학교 : 한국의 중학교 1, 2, 3학년(이하 7, 8, 9학년), 러시아에서의 7, 8, 9학년을 지칭한다.

2) 수학교과서 : 이 연구에서 분석되어진 러시아와 한국의 교과서

D. 연구의 제한점

1) 이 연구는 러시아에서 1993년에 발행한 7 - 11학년 기하교과서와 한국의 5차 교육과정상의 중학교 수학교과서로 한정되어 있다.

2) 본 연구는 추출된 한국과 러시아의 교과서 본문에만 한정되어 있다.

3) 본 연구를 위해서 러시아 기하교과서를 번역하여 사용하였는데 한국에 없는 몇가지의 용어에 대한 명칭이 바뀌어 질 수 있다.

II. 연구의 이론적 기초

A. 러시아의 학교제도

러시아의 교육제도는 중앙집권화되어 있어 정부에 의해서 운영되고 있다. 러시아 아동들은 출생후 2 - 3개월부터 6세가 될 때 까지는 보육원이나 유치원에서 교육을 받게 되고 만 6세가 되면 국민학교 4년을 포함하는 9년제 학교(불완전중등학교)에 입학하여 11년제 학교의 10학년과 11학년을 거쳐 고등교육기관으로 진학하거나, 또는 9년제 학교를 이수한 후에 3년 과정의 직업학교나 5년 과정의 특수학교에 진학할 수도 있다. 또한 11년제 학교 졸업생이 직업학교나 특수학교의 3학년으로 편입할 수도 있다. 그리고, 러시아의 초등과 중등교육은 총 11년인데 전 과정이 의무 · 무상교육으로 행하여 지고 있다.

러시아의 경우 특수학교가 발달되어 있는데, 예·체능계 특수학교, 자연과학계 특수학교, 군사학교 등이 있다. 특히 자연계 특수학교인 수학·물리학교가 발달되어 있는데 이들 학교가 러시아 자연과학 발달의 산실이 되고 있다. 그 대표적인 학교로 모스크바대학 부설 꼴모그로브 학교, 레닌그라드대학 부설 학교, 노보시비르스크 부설 수학·물리학교가 있다.

러시아의 기본학제를 살펴보면 <표 1>과 같다.

<표 1> 러시아의 학교제도

<table>
<tr><td rowspan="2">18 세 -</td><td>대 학 원</td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2">고등
교육</td></tr>
<tr><td rowspan="2">대 학 교</td></tr>
<tr><td>17 세</td><td rowspan="3">중등직업기술학교, 전문학교 (10-11학년)</td><td rowspan="8">중등
교육</td></tr>
<tr><td>16 세</td><td rowspan="2">일반중등학교 (10- 11학년)</td></tr>
<tr><td>15 세</td></tr>
<tr><td>14 세</td><td colspan="2" rowspan="5">전기중등학교(5-9 학년)</td></tr>
<tr><td>13 세</td></tr>
<tr><td>12 세</td></tr>
<tr><td>11 세</td></tr>
<tr><td>10 세</td></tr>
<tr><td>9 세</td><td colspan="2" rowspan="4">초등학교(1 - 4 학년)
: 1984년 4년으로 연장
: 6세에 초등학교 입학</td><td rowspan="4">초등
교육</td></tr>
<tr><td>8 세</td></tr>
<tr><td>7 세</td></tr>
<tr><td>6 세</td></tr>
<tr><td rowspan="2">- 6 세</td><td colspan="2">유치원 (3-5세) 진학율 58 %</td><td rowspan="2">취학
전
교육</td></tr>
<tr><td colspan="2">보육원 (1-3세)</td></tr>
</table>

B. 러시아의 수학과 교육과정

러시아의 일반 중등학교 수학교육의 목적은 학생들로 하여금 현대사회의 모든 구성원들에게 일상생활과 활동에서 필요한 그리고 중학교의 다른 학과와 고등교육의 학습에 충분한 수학적 지식과 기능을 완전히 정복하도록 하는 것이다.

러시아의 수학교육의 편제를 보면 산수, 대수, 기하, 삼각법의 과목을 1 - 6학년에서는 수학 한 과목으로 배우고 있고, 7 - 9학년에서는 대수 과목, 기하 과목으로 두개의 교과서로 교과서도 서로 다르다. 10 - 11학년의 수학은 기하 과목, 대수와 기초해석 과목으로 모두 두개의 교과서로 구성되어져 있다.

III. 연구방법 및 절차

A. 연구대상

한국의 중학교(5차교육과정) 수학교과서 기하 부분과 러시아의 7 - 9학년의 교과서 Pogorelov, A.V. Geometriia " Uchebnik dilya 7 - 11 klasep sleai skolly. Moscow: Prosveshchenie " Pub. 1993.

B. 방법 및 절차

양 교과서 사이의 내용과 조직에서의 차이점 규명을 위해 내용분석이 되어진다. 그리고, 학습내용의 조직 및 계열성을 분석하여 제한적이지만 학습경험의 효과적인 조직의 기준이 되는 반복성, 연계성, 통합성의 측면에서 살펴볼 것이다.

IV. 결과

A. 학습내용의 조직 및 계열성

학습내용의 조직, 계열성을 전체적으로 살펴보기 위해 두 교과서의 기하영역의 목차를 조사해 보면 러시아 교과서는 7학년에서 9학년까지는 평면기하학만을 (입체기하는 10 - 11학년) 다루는데 반해 한국교과서는 평면기하와 입체기하를 병행하여 취급하고 있다. 두 교과서 모두 첫 단원에서 기본도형에 대한 성질을 다루고 있다. 한국교과서는 국민학교에서 배웠던 것을 바탕으로 중학교 1학년에서 직관력과 구체적 조작활동을 통하여 점, 선, 면의 관계, 각, 수직, 맞꼭지각, 평행선에 관한 성질을 설명하였다.

한편, 러시아교과서는 기본도형에 대한 기본적인 성질을 도입하여 연이은 두번째 단원부터 정리를 진술하고 정리를 증명하는 데 기초로 삼아 기하학의 공리적 체계를 엄격히 확립하였다. 러시아 교과서가 첫 단원부터 공리를 도입하여 엄격한 증명을 통하여 기하학습을 하는 반면에 한국의 교과서는 7학년 과정에서는 조작적 활동이나 직관적 활동으로 도형에 대한 직관적 통찰능력을 키우고, 8, 9학년에서는 수학적 추론의 의의와 방법을 이해하고 논리적 표현 능력을 키우는 데 치중하였다.

한국의 교과서가 나선형 교육과정인데 반해 러시아의 수학교과서는 14개의 단원이 직선적으로 배열된 단선형 교육과정이다.

B. 학습 내용의 범위와 학습지도 내용

(1) 기본도형의 성질 및 기초개념

앞에서 서술한 바와 같이 공리적체계를 바탕으로 하였기에 한국이 기초성질이라는 용어를 사용하여 취급한 데 비해 러시아 교과서는 9가지 공리라는 용어로 기초개념을 형성하고 있다.

<러시아 교과서의 아홉가지 공리>

1) 평면위의 점과 직선에 속한 기본적인 성질

ㅇ 어떤 직선일지라도 이 직선에 속하는 점과 이 직선에 속하지 않는 점이 존재한다.

ㅇ 임의의 두 점을 지나는 직선은 오직 하나 그을 수 있다.

2) 직선 위에 있는 세 점에서 오직 한 점만이 다른 두 점 사이에 존재한다.

3) 모든 선분은 0보다 큰 일정한 길이를 가지*고 있다. 선분의 길이는 선분이 임의의 선분의 점에 의해서 나누어진 부분의 길이의 합과 같다.

4) 직선은 평면을 두 개의 반평면으로 나눈다.

5) 모든 각은 0보다 큰 일정한 도(°)의 도량형을 갖는다. 평각은 180° 이다. 각의 크기는 각이 각의 변 사이를 지나는 임의의 사선에 의해서+ 나누어진 각의 크기의 합과 같다.

6) 임의의 반직선위에서 주어진 길이의 선분은 반직선의 시작점으로부터 유일하게 연장될 수 있다.

7) 임의의 반직선으로부터 주어진 반평면에서 180° 보다 작은 주어진 각이 유일하게 연장될 수 있다.

8) 어떤 삼각형일지라도 주어진 반직선에 대해서 미리 정해진 위치에 합동인 삼각형이 존재한다.

9) 평면에서 주어진 직선위에 있지 않는 점을 지나서 그 직선에 평행한 직선은 하나보다 많게 그을 수 있다.

<한국 교과서의 기초성질>

1) 맞꼭지각의 크기는 같다.

2) 평행선의 성질

ㅇ 평행선에 한 직선이 만나서 되는 동위각의 크기는 서로 같다.

ㅇ 두 직선이 만나서 되는 동위각의 크기가 같으면 두 직선은 평행하다.

3) 한 직선에 평행한 두 직선은 서로 평행하다.

4) 삼각형의 세 내각의 크기의 합은 180° 이다.

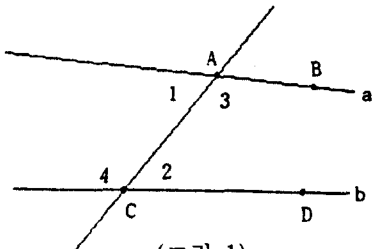
5) 삼각형의 한 외각의 크기는 이웃하지 않은 두 내각의 크기의 합과 같다.

6) 삼각형의 세가지 합동조건

각에 대한 학습전개 방법에서 다른 한가지 점을 살펴보면 한국교과서에서는 기초성질을 삼고 있는 평행선과 동위각, 평행선과 엇각에 관한 성질을 삼각자를 통한 직관력과 구체적 조작활동을 통해서 이해시키고 있다(박한식, 1989, 중학교 수학1, p.196).

한편 러시아교과서에서는 다음과 같이 전개시키고 있다.

[정리] 두 직선이 다른 한 직선과 서로 평행하면 두 직선은 서로 평행하다.



(그림 1)

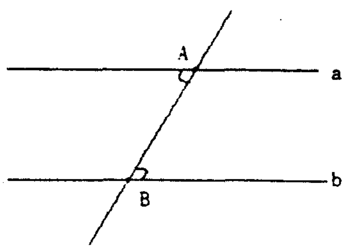
[정의] 그림 1에서 ∠1과 ∠2 (∠3과 ∠4)는 엇각, ∠3과 ∠2 (∠1과 ∠4)는 동측내각이라고 정의한다.

따라서 동측내각의 합이 180˚ 이면 엇각이 같고, 엇각이 같으면 동측내각의 합은 180˚ 이다.

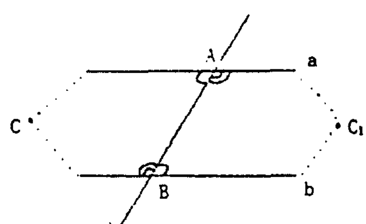
[정리](평행한 직선의 성질) 엇각이 같거나 동측내각의 합이 180˚ 이면 두 직선은 평행하다.

(증명) 평행한 두 직선 a, b와 이 두 직선을 지나는 선분 AB에 의해서 엇각이 서로 같게 된다(그림2).

두 직선 a, b가 서로 평행하지 않다고 하자. 그러면, 두 직선은 임의의 점 C에서 만나게 된다(그림3). 선분 AB는 평면을 두 반평면으로 나누게 된다(기본공리). 이 두 반평면 중에서 어느 한 반평면에 점 C가 포함되게 된다.



(그림 2)

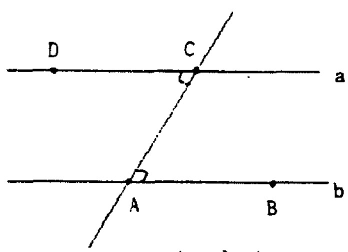


(그림 3)

따라서 $\triangle ABC$가 만들어지고, $\triangle ABC$처럼 다른 쪽 반평면에 $\triangle ABC_1$ 이 되도록 점 C_1 을 잡는다. 우리는 조건에서 엇각이 서로 같다는 것을 알고 있다. 따라서, $\angle A$와 $\angle B$는 서로 엇각이기 때문에 $\triangle ABC$와 $\triangle BAC_1$은 서로 합동이 된다. 여기서 선분 AC_1와 BC_1은 직선 a, b 위에 각각 포함이 된다는 것을 알고 있다. 결과적으로 직선 a와 b와는 다른 직선이 점 C와 C_1을 통과해야 한다. 그러나 이것은 불가능하다. 따라서, 가정에 모순이 생기게 된다. 즉, 직선 a와 b는 서로 평행하다.

만약, 직선 a와 b, 선분 AB에 의해 생기는 동측내각의 합이 180 °라면 우리가 앞에서 배운 것과 같이 엇각이 같게 되고, 따라서 직선a와 b는 서로 평행하게 된다(증명 끝).

[문제] 직선 AB와 이 직선위에 있지 않은 점 C가 주어졌다. 점 C를 지나서 직선 AB에 평행한 직선을 그을 수 있음을 증명하시오.



(그림 4)

(증명) 직선 AC는 평면을 두 반평면으로 나눈다(그림4). 이 두 평면 중에 한 쪽에 점 B가 놓여 진다. 사선 AB에 의해서 각각의 반평면에서 같은 각 $\angle ABD$와 $\angle CAB$가 나누어진다. 그럼, 이 두 새로운 직선 AC와 AB가 평행함을 보여주도록 하자.

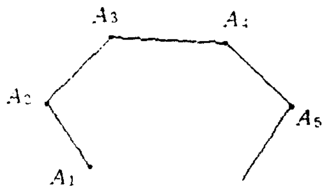
이 두 직선과 선분 AB에 의해서 생긴 $\angle BAC$와 $\angle DBA$는 그 자체가 서로 엇각이다. 따라서, 이들은 서로 같고, 직선 AC와 BD는 서로 평행하다.

(2) 평면도형(삼각형, 사각형, 다각형, 원)

1) 삼각형에서 한국의 교과서가 삼각형의 오심을 모두 다룬 반면 러시아에서는 단지 내심과 외심만을 취급하였고, 증명에 있어서도 러시아는 삼각형의 합동조건을 자세하게 다루고 있다.

2) 사각형에서는 러시아는 볼록사각형(각 변의 연장선이 그 사각형과 만나지 않는 사각형)의 개념을 도입하고, 사다리꼴의 개념에서 평행한 두 변을 저변, 다른 두변을 옆변이라고 정의하였다.

3) 다각형에서 특이한 것은 러시아교과서에서의 절선이라는 개념이다.



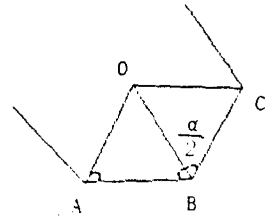
(그림 5)

A_1A_2, A_2A_3, · · ·, 각각을 절선(그림 5)이라 명명하고 교차하지 않는 단일 폐절선을 다각형으로 정의하였다.

4) 원의 경우 한국의 교과서는 약 20가지의 다양한 학습내용을 취급한 반면 러시아는 약 10가지의 학습내용만을 다루어 매우 제한적이다. 한국에서만 다루는 내용으로는 활꼴, 할선, 동심원, 중심선, 공통접선 등이 있으며 두 나라가 서로 다르게 정의하는 예로 원과 원주가 있는데, 러시아에서는 원은 주어진 점(중심)으로부터 일정한 거리보다 크지 않은 거리에 있는 평면위의 모든 점으로 이루어진 도형이라고 정의하고, 원주는 주어진 점으로부터 같은 거리에 있는 평면위의 모든 점으로 이루어진 도형으로 정의하고 있다.

러시아 교과서는 한국과는 다르게 내접,외접에 관한 정리와 정n각형의 내접원, 외접원의 반지름 구하는 문제를 다루는 데 간단하게 이에 대해 살펴보자

[정리] 모든 정다각형은 원에 내접 · 외접한다.



(그림 6)

(증명) A, B를 한 각의 크기가 α인 정다각형의 서로 이웃하는 꼭지점이라고 하자. 점 A, B에서 각의 이등분선을 긋고, 만나는 점을 O라고 하자.

그러면, $\triangle OAB$는 밑각의 크기가 $\alpha/2$인 이등변 삼각형이 된다. 점 O에서 점 B와 이웃하는 꼭지점 C와 선분을 잇는다. $\triangle ABO$와 $\triangle CBO$는 첫번째의 합동조건에 의해서 서로 합동이 된다(왜냐하면, OB는 공통, 변AB와 BC는 같고, $\angle OBA$와 $\angle OBC$와 같다). 삼각형의 합동에 의해서 $\triangle OBC$는 이등변삼각형이고 꼭지점에서 $\angle OCB$의 크기는 $\alpha/2$와 같다. 즉, 선분 CO는 다각형의 $\angle C$의 이등분선이다.

이제 점 C와 이웃하는 꼭지점 D와 점 O를 연결한다. 그러면, $\triangle COD$가 이등변삼각형이고, 선분 DO는 각 D의 이등분선임을 증명할 수 있다. 결국 다각형의 변을 한 변으로 하고, 그것의 마주보는 꼭지점을 점 O로 하는 모든 삼각형은 이등변삼각형이 된다. 모든 이 삼각형은 같은 옆변을 가진다.

따라서, 다각형의 모든 꼭지점은 중심을 점 O로 하고, 삼각형의 옆변을 반지름으로 하는 원주를 지난다. 그리고, 다각형의 모든 변은 중심을 점 O로 하고, 꼭지점 O에서 긋는 삼각형의 수선을 반지름으로 하는 원에 접한다.

[문제] 정 n각형의 외접원의 반지름을 R, 내접원의 반지름을 r 이라할때 정 n각형의 한 변의 길이 a_n을 구하여라.(단, n = 3, 4, 6일때)

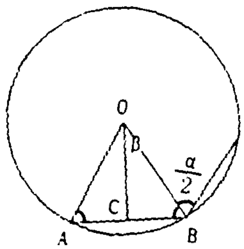
이 문제의 풀이를 위해서는 다음과 같은 공식을 유도하여 사용하고 있다.

* 외접원과 내접원의 반지름에 관한 공식

$$\beta = \frac{180°}{n}$$

$$R = OB = \frac{OB}{\sin\beta} = \frac{a_n}{2\sin\frac{180°}{n}}$$

$$r = OC = \frac{OB}{\tan\beta} = \frac{a_n}{2\tan\frac{180°}{n}}$$



(그림 7)

(풀이) 위의 공식에 의해서

$$a_n = R \cdot 2\sin\frac{180°}{n}$$

$$a_n = r \cdot 2\tan\frac{180°}{n}$$

따라서, 첫번째 공식에 의해서

$$a_3 = R\sqrt{3}$$

$$a_4 = R\sqrt{2}$$

$$a_3 = R$$

두번째 공식에 의해서

$$a_3 = 2r\sqrt{3}$$

$$a_4 = 2r$$

$$a_6 = \frac{2r}{\sqrt{3}}$$

(풀이 끝)

(3) 입체도형

러시아교과서는 중학교(7 - 9학년)에서는 입체도형을 다루지 않았다.

한국의 교과서에서는 국민학교 과정에서의 학습을 바탕으로 평면의 결정조건, 공간에서의 직선과 직선, 직선과 평면, 평면과 평면의 위치관계에 대하여 학습하도록 하였다. 입체도형에 관해서는 먼저 다면체의 뜻과 다면체에 관한 용어 및 다면체를 면의 개수에 따라 분류하는 방법 등에 관하여 학습하고 이를 다시 기둥, 뿔, 뿔대로 분류하여 이들 분류에 따른 각 입체도형의 성질을 다루었다.

또한 정다면체의 종류가 다섯가지 뿐임을 알게 하였고 겨냥도, 전개도를 관찰한 다음 면, 꼭지점의 수, 모서리의 수, 면의 수를 조사하도록 하고 있다.

회전체에서는 먼저 회전체의 뜻과 성질을 이해하게 하고 원뿔, 원뿔대의 성질을 알게 하고 회전체의 전개도를 학습하도록 하였다.

(4) 좌표기하

한국에서는 기하영역에 좌표를 도입하여 설명하고 있지는 않지만 다른 단원(즉, 함수) 에서 좌표를 도입하고 있다.

러시아교과서를 보면 먼저 평면위에 좌표를 도입하고, x축, y축, 원점, 사분면 등에 관한 용어를 설명한 다음 평면위의 선분의 중점의 좌표를 구하는 공식을 다루었다.

두 교과서 모두 피타고라스의 정리를 이용하여 두 점 사이의 거리를 구하였다. 러시아교과서에서는 도형의 방정식을 도형의 모든 점의 좌표를 만족시키고 반대로 이 방정식을 만족시키는 임의의 한 쌍의 해는 도형의 어떤 점의 좌표를 나타내는, 2개의 미지수 x, y를 갖는 방정식으로 정의한 다음 원주의 방정식과 직선의 방정식을 구하였다.

그리고, 원에서 언급했듯이 두 원의 위치 관계와 원과 직선의 위치관계를 방정식을 이용하여 풀이하였다.

(5) 벡터

한국교과서에서는 벡터의 내용을 중학교에서는 다루지 아니하고 고등학교 과정에서 취급하였다.

러시아교과서의 경우를 보면, 먼저 평행이동을 다루면서 변환을 정의하고 있다. 그리고 나서 벡터를 도입하여 벡터의 절대값의 정의와 계산, 벡터의 연산과 성질, 벡터의 상등, 벡터의 내적등을 도입하고 있다.

(6) 작도

작도에 있어서는 한국교과서가 러시아교과서에 비해서 폭넓은 학습내용을 다루었다. 러시아에서 다루지 아니하는 작도를 보면 - 한국에 비교하여서 - 선분의 연장, 주어진 선분을 현으로 하고 주어진 각을 현에 대한 원주각으로 하는 원의 작도, 공통외접선의 작도, 원 밖의 점에서 이 원의 접선 작도의 내용은 다루지 않고 있다.

(7) 변환

러시아 교과서에서는 변환에 대하여 폭넓고 다양하게 다룬 반면 한국은 위상변환을 취급하고 도형의 닮음을 강조하고 있다.

러시아을 보면 점 O에 대칭 변환, 점 O에 대한 중심대칭변환, 직선에 대한 대칭변환을 다루었다. 그리고, 도형 F와 점 O가 주어졌을 때 F의 임의의 점 X를 $OX' = k \cdot OK$ (k는 닮음계수 상수)가 되도록 X'을 옮기는 변환을 닮음변환으로 새롭게 정의하여 다루고 있는 반면 한국은 닮음변환이라는 용어를 사용하고 있지는 않지만 도형의 확대, 축소를 이용하여 도형의 닮음을 학습하도록 하였다.

그리고, 도형 F가 도형 F'으로 옮겨질 때 거리가 보존되는 변환을 이동으로 정의를 내리고, 회전이동을 다루고 있다.

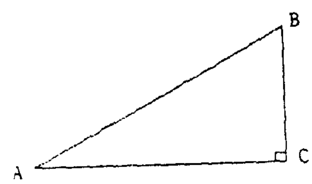
도형의 닮음에 대해서 러시아교과서는 두 도형 F와 F' 사이에 닮음변환이 존재할 때 두 도형이 닮았다 라고 정의하였고, 한국 교과서에서는 확대와 축소한 도형과 합동인 도형을 본래의 도형과 닮았다라고 정의하고 있다.

위상 변환에 있어서는 러시아교과서는 전혀 다루고 있지 아니한 반면 한국 교과서에서는 위상기하학적인 내용을 학습하도록 하여 학생들의 공간에 대한 수학적 이해에 보다 도움이 될 수 있도록 일관적이고 포괄적인 개념을 학생들에게 다양하게 제시하였다.

(8) 삼각함수

한국교과서가 피타고라스 정리를 독립단원으로 취급하여 피타고라스 정리에 관한 폭넓고 다양한 학습내용을 다루고 있는 반면 러시아교과서는 삼각함수에 관한 학습가운데에서 피타고라스의 정리를 다루고 있어 피타고라스의 정리에 관한 학습이 한국교과서에 비해 제한적이었다.

삼각비의 정의에서 한국교과서는 닮은꼴의 대응변의 비가 같음을 이용하여 정의하였고, 러시아교과서에서는 다음과 같은 정리의 증명을 이용하여 정의하고 있다.



(그림 8)

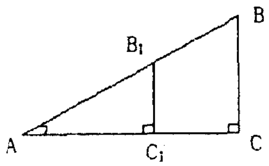
[정의] $\cos\alpha = \dfrac{AC}{AB}$

[정리] 각의 코사인 값은 위치와 크기에는 상관없이 단지 각의 크기에만 의존한다.

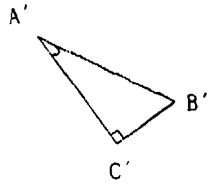
(증명) 꼭지점 A, A'의 각의 크기가 α로 같은 두 직각 $\triangle ABC$와 $\triangle A'B'C'$ 에서

$$\frac{A'C'}{A'B'} = \frac{AC}{AB}$$

임을 증명하자.



(그림 9)



(그림 10)

그림 10에 있는 $\triangle A'B'C'$ 과 같은 $\triangle AB_1C_1$을 $\triangle ABC$ 위에 그림 9처럼 만들 수 있다. 그러면, 선분 BC 와 B_1C_1 은 직선 AC에 서로 수직이다. 따라서, 두 선분은 서로 평행하다. 결국은 닮은 비에 대한 정리(선분의 비율에 대한 정리)에 의해서

$$\frac{AC_1}{AB_1} = \frac{AC}{AB}$$

가 성립한다.

$AC_1 = A'C'$ 이고 $AB_1 = A'B'$ 이기때문에

$$\frac{A'C'}{A'B'} = \frac{AC}{AB}$$

가 된다. (증명 끝)

마지막으로 한국교과서에서는 90 °까지의 삼각비를 학습하도록 하였으나 러시아교과서에서는 좌표기하를 도입한 후 180 °까지 삼각비를 확장하였고, 또한 radian 에 대한 학습을 실시하고 있다.

(9) 측도

넓이에 관한 학습에 대하여 러시아교과서에서는 먼저 넓이의 개념을 설명하고 넓이에 관한 기본적인 성질을 언급한 다음 저학년에서 이미 사용하고 있는 직사각형의 넓이에 대한 공식을 증명하였고, 몇가지의 다각형에 대한 넓이 공식을 구하였다.

두 교과서 모두 삼각비를 이용한 삼각형의 넓이 공식($S=\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot \sin A$)을 다루었고, 러시아의 경우에는 헤론의 공식과

$$R=\frac{abc}{4S,} \qquad r=\frac{2S}{a+b+c}$$

(R : 삼각형의 외접원의 반지름, r : 내접원의 반지름, a, b, c: 삼각형의 변, S : 삼각형의 넓이) 을 다루었다.

V. 요약 · 결론 및 제언

A. 요약 및 결론

본 연구는 기하 영역을 중심으로 한국과 러시아의 중학교 수학교과서 비교분석을 통하여 한국교과서 편수업무에 참고자료를 제공해 보고자 하는 데에 그 목적이 있다.

본 연구를 위해서 한국과 러시아의 각각 1권의 교과서가 분석되어졌다. 한국에서는 5종의 교과서가 있는데 이 가운데서 박한식이 저술한 중학 교과서를, 러시아에서는 교육성이 발행한 단일 교과서인 A. V. Pogorelov저 Geometriia를 사용하였다. 기하의 내용분석을 위하여 9가지 분야별로 학습내용을 파악하여 양 교과서의 학습주제의 취급여부를 비교하였다.

학습내용의 조직과 계열성, 학습내용의 범위를 파악하기 위하여 9가지 총괄적인 분야별로 한국과 러시아 어느 한쪽에서만 독특하게 취급되어지고 있는 것을 제시하였고 증명방법을 달리하고 있는 몇가지를 소개하였다.

결론적으로 앞의 내용을 요약하여 말하면 몇가지로 나누어 생각할 수 있을 것이다.

첫째, 한국의 수학과목은 수학의 제 영역을 한데 묶어 단일 교과목 수학으로 되어 있다. 러시아에서도 학교 수학과정의 다양한 과목들을 점진적으로 통합하는 경향을 보이고 있다. 즉, 새로운 과정의 내용으로 전환하기 전에는 수학과정이 산수, 대수, 기하, 삼각법의 4과목으로 구성되어 있었는데 현재는 1학년에서 6학년까지는 단일 교과 수학으로 7학년에서 9학년은 대수, 기

하, 10 -11학년은 대수와 기초해석, 기하로 되어 있다.

둘째, 러시아의 교과서에서는 중학교에서 평면기하학만을 다루고 있는데 비하여 한국은 평면과 입체기하를 병행하여 취급하고 있다. 하지만, 러시아의 경우 9가지의 공리를 도입하여 공리에 기초한 엄밀한 증명을 통하여 정리를 체계화해 나가는 기하학습을 전개하여 기하의 공리적 체계를 매우 중요시하였다. 한편 한국교과서에서는 1학년 과정에서 조작적 활동이나 직관적 취급을 중심으로 하여 도형에 대한 직관적 통찰력을 키우고, 2, 3학년에서는 수학적 추론의 의의와 방법을 이해하고 논리적으로 표현하는 능력과 연역적 추론 능력을 키우는 데 치중하였다.

세째, 한국교과서는 나선형 교육과정의 성격이 강함을 볼 수 있다. 1학년에서 삼각형, 사각형의 기초적인 성질을 다루고 2학년에서 삼각형, 사각형의 중요한 성질을 다루고 있고 3학년에서 원에 관한 중요한 성질을 학습하도록 하였다. 한편 러시아 교과서는 14개의 단원이 직선적으로 배열되어 단선형 교육과정의 성격이 강하다.

네째, 한국의 모든 수학교과서에서는 수학의 모든 영역들을 통합적으로 구성하였다. 한편, 러시아에서도 초등에서는 대수영역의 내용과 기하영역의 내용을 통합하여 취급하므로 기하 학습제재를 포함함으로 해서 자연수에 관한 지식을 체계화하는 데 사실적 기초를 제공해 주었고 또한, 중학교에서도 기하영역에 좌표계, 벡터를 도입하는 등 현대적으로 개념을 일반화시킨 새로운 수학과정을 소개함으로써 대수와 기하 과정에서 다루고 있는 많은 문제들을 통합적 방법으로 접근할 수 있도록 하였으며 또한 방정식, 도함수, 적분, 미분방정식을 이용한 물리학습과의 통합 등 교과 내적, 외적 연결성을 꾀하였다. 결국 한국, 러시아 교과서 모두 학습내용의 통합성을 보여주고 있다고 할 수 있다.

다섯째, 두 평행선에서 엇각과 동측내각의 성질, 변환, 닮음 등은 양국이 매우 달리 정의와 증명을 도입하고 있다.

여섯째, 피타고라스의 정리에 관한 학습에서 러시아교과서는 먼저 직각삼각형의 예각의 코사인을 정의한 다음 예각의 코사인은 각에 의해서만 결정됨을 증명하고 있다. 이 예각의 코사인을 이용하여 피타고라스의 정리를 증명하였고 이를 삼각비의 학습에 활용하도록 하였다. 한편 한국교과서에서는 피타고라스의 정리를 독립단원으로 설정하여 도형의 조작 또는 삼각형의 닮음을 이용한 여러가지 방법으로 피타고라스의 정리를 증명하였고 이를 삼각비의 학습에 활용토록 하였다.

B. 제언

본 연구의 결과로부터 얻을 수 있는 몇 가지 시사점과 후속연구를 위한 과제에 대하여 다음과 같은 제언을 하고자 한다.

1) 한국에서는 수학과 교육과정의 특징이 학교별로, 세 부분(국민학교, 중학교, 고등학교)으로 나누어진 데 비하여 러시아에서는 좀 더 세분되어 네 부분(1-4학년, 5-6학년, 7-9학년, 10-11학년)으로 나누어져 있고 한국의 초등수학교육기간(6년)이 러시아의 초등수학교육기간(4년)에 비해 긴 편인데 수학교육에서 많은 문제점으로 지적되고 있는 학교별 연계성과 관련하여 러시아의 5 - 6학년의 교육과정의 특징이 중등교육의 준비단계 성격을 띄고 있다는 점은 우리에게 좋은 시사점을 줄 수 있을 것이다.

2) 한국의 중학교 3년간의 수학, 과학 교과목 배당시간을 살펴보면 학년마다 동일한 시간을 배당하였는데 수학교육이 과학교육의 필수여건으로 기초를 이루고 있고 중학교 과정이 기초과정임을 고려할 때 학년별, 학교별 상황에 맞추어 다양한 변화를 고려할 필요성이 있다고 여겨진다. 이 점에서 러시아에서는 과학과목에 대한 수학과목 배당시간 비율이 6학년에서는 매우 높다가 학년이 높아질수록 과학과목에 대한 수학과목 배당시간 비율이 수학교과목은 점점 낮아지고 과학과목은 점점 높아져서 11학년에 이르면

수학시간은 3시간으로 줄어든다. 반면 한국의 중학교에서는 학년별로 동일한 시간을 배당하였고 고등학교에서는 과학과목은 낮아졌다. 따라서 기초과정인 중학교에서는 과학과목에 대한 수학과목의 배당시간 비율을 높일 필요성이 있다고 사료되어진다.

3) 러시아에서는 중학교 수학과목을 대수, 기하로 나누고 각각 한 권의 교과서로 7학년에서 9학년까지 학습하도록 하였다. 한 권의 교과서로 3년간을 학습하므로 학년별 연계성과 기하교육의 체계성에 도움이 된다는 점에서 수학교과서 개발에 시사점을 줄 수 있을 것이다.

4) 러시아의 기하교육은 Euclid 원론의 체계에 충실하여 평면기하를 다룬 다음 입체기하를 취급한 반면 한국의 기하교육은 통합성을 중시하여 평면기하와 입체기하를 동일학년에서 병행하여 다루었다. 따라서 '연역적 추론과 통합성' 어디에 강조점을 두느냐에 따라 평면기하와 입체기하의 취급방법을 결정할 수 있으리라 생각되어진다.

5) 국민학교과정에서 실험관찰을 통해 근사값으로 파악하게 된 π에 대하여 중학교 과정에서는 지름에 대한 원주의 길이의 비율이 원에 의존하지 않음을 연역적 추론에 의해서 밝힐 필요성이 있을 것으로 생각되어지고 또한 조작적 활동을 통해 근사값으로 파악하게 된 원의 면적에 대해서도 연역적 추론을 통하여 확증할 필요성이 있지 않을까 사료되어진다.

6) 한국의 교과서는 변환에 관한 학습에서 닮음변환, 위상변환에 비해 합동변환이 소홀히 취급되어졌는데 중학교 과정에서 합동변환에 관한 체계적인 학습이 보충되어질 필요성이 있을 것이다.

7) 러시아 수학교육의 가장 큰 특징이라고 할 수 있는 공리에 기초한 엄격한 연역적 추론에 의한 기하학습에 대하여 지금까지 수많은 논란거리로 논의되어 오고 있는데 형식적조작에 막 접어 들고 있는 아동들에게 얼마만한 학습효과가 있을지, 수학적 사고력의 발달에 얼마나 기여할 수 있을지 앞으로 연구되어져야 할 문제라고 사료되어진다.

8) 본 연구는 중학교의 기하영역에 국한되어 졌는데 앞으로 저학년의 비교분석 연구와 중학교 대수영역의 비교 분석 및 연구가 필요할 것이다.

참 고 문 헌

김동규(1984). 소련의 학교교육. 서울 : 주류. 문교부(1988). 중학교 수학과 교육과정 해설. 서울 · 서울시 인쇄공업협동조합.

박한식(1982). 수학교육사. 서울 : 전파과학사.

박한식(1989). 중학교 수학1, 2, 3. 서울 : (주) 지학사.

박한식 · 최영한(1989). 1989년도 국제올림피아드. 수학교육, 한국수학교육학회, 28.

한국교육개발원(1985). 교과서 체재 개선 연구. KEDI.

NCTM(1980). An agenda for action : Recommendation for school mathematics of the 1980's. Reston, VA : NCTM.

NCTM(1991). Professional Standards for Teaching Mathematics. NCTM.

Pogorelov, A. V.(1993). Geometriia : Uchebnik dilya 7 - 11 klasep sleai skolly. Moscow : "Prosveshchenie".

Szekely, B. B.(1983). Criticism and revision of the Soviet school mathematics program. Soviet Education. February-M arch Vol.XXV, NO. 4-5. NY : M.E.Sharpe Inc. 3 - 5.

The USSR Ministry of Education(1982). O Programe po matematike dilya srednei obshcheobrazovatel'noi skolly na 1982/83 uchebnyi god. Matematika v skolle, No.1, Moscow, 6-24.