韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
1995. 6. 제 34권, 제 1호, 73-81.

Journal of the Korea Society of Mathematical Education
Series A: Jun. 1995, Vol. 34, No. 1, 73-81.

수학교육에 있어서 탐구적인 어프로치의 실천적 연구

柳 時 珪 (동국대)

Ⅰ. 서론

주지하는 바와 같이 평가가 교수-학습에 심대한 영향을 미치는 현상은 전통적인 학교교육하에서 상급학교 입학시험과 관련하여 나타난다. 평가란 결과가 목적과 일치하는 정도, 곧 특정한 상황에서의 실제적인 행동이 그와 같은 혹은 그와 유사한 특정한 상황에서의 원하는 행동과 일치하는 정도를 결정하는 과정이며, 또한 평가문항의 유형에는 크게 객관식과 주관식으로 나누어진다(김웅태 · 박한식 · 우정호, 1984). 잘 알려진 바와 같이 주관식과 객관식으로 나누는 근거는 평가결과를 산출할 경우 채점자의 임의적 또는 주관적 판단이 작용하느냐 하지 않느냐에 따라서 분류된다.

수험생이 대량이면 빠른 시간 내에 결과를 얻어내야 하며, 보다 신뢰롭고, 공정성과 객관성을 담보로 하는 평가방법으로는 객관식보다 좋은 방법이 없다. 그러나, 평가방식이 단편적인 지식의 암기만을 평가하는 쪽으로 치우치고 추측의 요인을 제거할 수 없으며 특히 문제를 해결하는 과정에서의 부분적인 성과를 인정받지 못하는 등, 학교교육에서 학생들의 표현력과 창조력의 육성에 많은 제한을 받는다는 단점이 있다. 주관식은 평가대상의 학생수가 적고 또한 같은 평가문항지를 다시 활용할 필요가 없으며 글의 구성이나 표현력, 창의력 등을 동시에 평가할 경우, 학생들의 태도나 의견에 더 많은 관심을 가질 경우, 채점자가 답안을 비판적으로 더 자신이 있다고 생각되는 경우 등에 이용된다. 따라서 객관식은 결과 중심적이지만 주관식은 문제해결과정의 중심이라고 할 수 있다.

현행 대학 입시제도의 문제점은 주지하는 바와 같이 수학능력시험이 객관식과 주관식을 일정한 비율로 하여 출제되고 있으며 대학 본고사는 각 소속대학의 주관에 의하여 주관식 위주로 출제되고 있다. 이들의 평가방법은 현저하게 다르다. 1994년 11월 23일에 실시한 95학년도 대학 수학 능력시험에서 저득점자 중 상당수의 수험생이 본고사를 실시한 모든 대학에서 좋은 성적으로 합격한 사실이 보도되었다. 반면에 서울의 S대학교는 당연히 합격권내에 있어야 할 170점 이상의 고득점자들 중 약 30%가 탈락하였다고 한다.

대학 수학능력시험과 대학 본고사의 평가결과에 따라 각각의 고사에서 취득한 점수가 합격을 결정하는 일련의 순위를 정하는 비율과 일치한다면 문제가 없겠지만 금년도와 같이 다르게 나타난다면 사회적인 신뢰도의 실추는 물론이거니와 이로 인하여 학교교육이 혼미에 빠져드는 것은 당연한 이치이다. 예를 들면, 94학년도에 대한 수학능력시험을 같은 방식의 평가방법으로 2차에 걸쳐 실시하였지만 일회성으로 제도를 폐지한 것은 수험생 편의 위주라고 하기보다는 평가방법 측면에 있었던 것 아닌가 하는 의구심을 불러오고 있으며, 그 중에도 평가문항의 제작기술이 아닌가 한다.

수십만의 수험생 등을 대상으로 같은 문항출제 연구위원들에 의하여 출제되었으며, 객관도·신뢰도가 충분히 반영될 수 있다는 지필 검사에 따른 객관식위주의 1차 · 2차 평가의 결과가 다른 결과가 나타나는 데, 대학 수학능력시험과 대학 본고사의 평가방식이 다른 것은 물론이거니와 문항 출제위원이 다른데 어떻게 같은 효과를 기대할 수 있겠는가? 시행 절차상의 오류를 가급적 줄이고 학생들의 불필요한 학습부담을 경

감시키기 위하여 대학 수학능력시험과 대학 본고사의 이원체제 대학입시 제도는 하루 빨리 개선되어야 할 것이다.

현재 수학교육의 세계적인 새로운 방향을 고려할 때, 중학교 및 고등학교의 새로운 수학교육과정이 개선되어 지기를 바라고 있는 실정이다. 앞서에서도 언급한 것과 같이, 고등학교 입시제도가 어떤 것이냐에 따라서 중학교 교육의 방향과 그 질적 수준이 좌우되고, 대학 수학능력시험과 대학 본고사의 출제경향에 따라 고등학교의 교수-학습이론은 민감하게 반응할 것이다. 따라서 사회적 요구이기도 한 결과중심의 교육을 지향하고, 과정중심 즉 창의적인 문제해결 중심으로 교육의 전환을 시도하기 위하여 현행의 입시제도는 개선되어져야 한다. 학생은 문제해결의 주체이다. 류희찬(1994)도 지적하였듯이 새로운 수학교육관은 70년대 말까지 이끌어 온 교사중심의 전통적 교수·학습 이론과는 대비되어져 학생중심의 학습이 이루어져야 한다. 따라서 본 연구는 학습의 주체인 학생의 문제해결능력을 배양하는 교수·학습 이론에 대하여 고찰하여 보고자 한다.

Ⅱ. 문제해결 교수-학습 이론

현재의 사회는 하루하루가 다르게 변화하고 있으며, 이와 같은 변화의 사회에 있어서는 지식도 끊임없이 변화하며 발전하여 가고 있고 새로운 문제가 생겨나고 있다. 한 가지의 지식의 질을 완전하게 하기 위하여 일생의 시간을 소모하는 경우도 생겨난다. 이러한 미래의 사회에서 주체적으로 살아가는 데에는 자진하여 문제를 정확하고 확실하게 파악하고, 이것에 능동적으로 대처하여 나가야 한다. 기초적 지식·기능을 몸에 익히는 매일의 학습은 학생들에게 있어서는 새로운 문제에 직면하여, 이것을 해결하여 나가는 것과 같다.

문제해결능력은 학생이 매일 매일의 학습에 적절하고 새로운 문제 혹은 곤란한 문제에 직면하였을 때, 자신이 가지고 있는 지식이나 경험을 바탕으로 어떻게 대처하여 나가면 좋은가라는 대응의 방법을 그 장면에 따라 차츰차츰 익혀나가는 것에 의하여 육성되어지는 것이다. 그러므로 문제해결능력을 육성하기 위하여 매일 매일의 학습내용을 재검토하고 수업의 구조를 바꾸는 것은 당연히 필요하다.

특히 수학교과는 계통성을 중시하는 교과이다. 새로운 내용을 학습할 경우에 거기에 지금까지 습득한 지식으로는 해결할 수 없는 장면이 생겨난다. 이때야말로 문제해결능력을 높이는 교재가 있는 것인가, 무엇이 문제해결의 장애로 되는 것인가, 어떻게 대응하면 좋은 것인가, 무엇을 어떻게 처리하면 좋은 것인가등을 생각하게 하는 것이 문제해결능력을 높여 가는 것이라고 생각한다. 여기에 문제해결능력을 높여 가는 장을 다시 새로운 교재를 구하는 것이 아니고, 매일의 학습 내용 중에서 수학에 대한 흥미·관심을 지속적으로 유지시켜 나가며, 수학적인 지식과 기능을 활용하여, 합리적으로 문제를 해결하는 지도방법 중 문제설정에 의한 방법을 우선 검토하고, 탐구적인 어프로치의 도입에 대하여 언급하고자 한다.

1. 문제설정 교수-학습

앞서에도 언급한 것과 같이 학생의 주체적이고 자주적인 능력을 육성하기 위하여 단순히 지식, 기능을 흡수한다라고 하는 수동적인 학습이 아니고, 스스로 주체적으로 생각하여 나가는 행동양상을 중요시하는 학습이 필요한 것이다. 그것을 위하여 학생이 흥미를 갖고 적극적으로 몰두하여 주체적인 추구가 최후까지 지속하도록 하는 내용이 필요하다. 그러므로 학생 스스로 문제를 작성하고 이것을 해결하여 나가는 문제설정의 수업은 이러한 목적을 달성할 수 있다는 교수-학습 이론이다. 보다 간단히 언급하면 문제 만들기의 교수-학습을 의미한다. 물론 많은 수학적 발견 및 활동은 비수학적인 세계로부터

수학적인 세계로의 수학화로 개발과 발견이 이루어진다. 또한 국민학교와 같은 수준에서는 문제설정 교수-학습 이론이 학생들의 흥미를 촉발시키는 것에 따라 문제해결능력을 육성하는데 기여하리라고 생각한다.

그러나 중·고등학교에서 수학의 교과목표와 쉽게 벗어나기가 쉬우며 실생활 등을 이용하여 문제 만들기는 쉽지 않다. 정지호 외 4인(1993) 등에 의한 문제 만들기의 실례를 살펴보아도 알 수 있다.

① 실세계적인 상황의 예

<상황 1> 학교에 대하여 생각하고 여러 가지 문제를 자유롭게 많이 만들어 봅시다.

② 수학적인 임의의 상황의 예

<상황 2> 원을 적당한 크기로 그려 그것을 대상으로 여러 가지 수학의 문제를 만들어 봅시다.

이 실세계적인 상황이든 수학적인 임의의 상황이든 모 중학교 3학년들에 의하여 문제 만들기에 응답한 결과를 통하여 살펴보면, 이 수행의 과정에서 중학교 3학년의 수학과 학습목표와는 전혀 무관한 문제 만들기가 많이 나타난다. 물론 지금까지의 일제 수업 하에서 교사의 주입식 교육과 입시교육에 익숙해진 학생들에게 좋은 효과를 기대하기란 어렵다. 자칫하면 수업이 산만하고 목적의식을 상실할 수도 있다. 그러므로 무엇보다도 문제상황을 제시할 경우 과거에 학습한 기초적인 지식, 기능을 토대로 단원 학습목표를 충분히 고려하여 관심과 흥미를 유발시킬 수 있으며 창의적인 문제해결능력을 키울 수 있는 보다 발전적인 교수·학습 이론을 요구하고 있다.

2. 탐구적인 어프로치 교수-학습

能田伸彦(1983)및 島田茂(1977) 등은 위에서 제시한 문제설정의 교수-학습 이론을 일보 전진하여, 탐구적인 어프로치(open-ended approach)라는 교수-학습 이론을 제창하였다. 종래의 학교수학에서 취급되어져 온 문제나 방법이 유일한 말하자면 닫혀진 문제나 방법이었다. 그것은 장점은 인정하지만 문제 해결력을 육성하는 데는 오히려 결점이 될 수도 있다. 예를 들면 닫혀져 있다라는 것은 수학의 논리성, 추상성, 그리고 형식성이라는 특징을 이해할 수 없는 학생들도 증가하는 것은 잘 알려진 사실이다. 따라서 해의 존재의 유일성이나 논리의 일관성의 장점 등은 인정하지만, 문제해결과정에서는 다양한 처리나 표현방식을 통하여, 또한 조건의 첨가 혹은 삭제 등에 따라 문제를 발전적으로 처리하여 수학이 본래 가지고 있는 자유성과 창조성을 학생들에게 보장하면서 주체적인 인간형성을 도모하는 교육이 탐구적인 어프로치에 의한 지도방법이다. 탐구적인 어프로치에 의한 지도는 문제해결자의 마음을 열어나가는 것을 목표로 하면서, 동시에 수학적인 정신고 함께 열어 나가려고 하는 지도방법이다.

이와 같은 탐구적인 어프로치의 교수-학습 이론을 실현하기 위하여 어떻게 수업을 전개하여 가는 것이 바람직한 것인가? 이것에 대하여 能田伸彦(1983)은 탐구적인 어프로치에 따른 수업 모형을 그의 논문에서 도표로 제시하고 있다. 탐구적인 어프로치의 교수-학습 이론의 목표는 학생의 창조적 사고의 육성인 동시에 수학적 활동을 육성하는 것이다. 특히 能田伸彦(1983)은 학교수학에서 생각할 수 있는 탐구적인 어프로치의 문제로 세 가지 유형을 들고 있다.

- 탐구적 문제에 의한 것
- 문제 장면에 의한 것
- 문제가 문제를 만드는 것

우선 탐구적인 어프로치에 의한 지도방법 중에 대표적인 것 중의 하나가 탐구적 문제를 들 수 있다. 탐구적인 문제는 유일한 해를 갖지만 여기에 도달하는 방법이 여러 가지 방법이 고려되어진다. 그것은 탐구적인 문제를 통하여 탐구적 어프로치의 지도가 목표하는 이념을 실현하려고 하는 지도방법의 하나이다. 즉 수학교육에서 고차목표의 평가방법을 생각하기 위하여 결

과가 하나로 결정되지 않는 문제상황을 제재로 하여 거기에 내재하는 결과의 다양성을 적극적으로 이용하는 것으로 수업을 전개하고 그 과정에서 이미 배운 지식과 기능, 수학적 사고방법을 여러 가지로 짜 맞추어 새로운 것을 발견하여 가는 경험을 학생에게 부여하는 학습활동이다.

여기에서 요구되는 학습활동은 문제상황에 직면하여 그 상황을 적절히 수학화하고 이미 배운 지식과 기능을 충분히 활용하고 내재하는 관계와 법칙 등을 발견하며 문제를 해결하고 그 결과를 확인하는 것이며 또한 다른 사람이 발견한 상황과 방법을 알고 그것을 비판하든지 그것을 받아들여서 자기의 생각을 수정·발전하여 나가게 하는 것이다. 그리고 학생의 다양한 반응으로부터 사고의 유연성, 사고의 풍부함, 반응의 질(수학적 관점의 깊이, 일반성, 추상성) 등의 관점을 바탕으로 평가할 수 있다.

그러면 탐구적 문제로서 바람직한 문제는 무엇인가? 그것은 물론 보는 관점에 따라 다르겠지만 다음과 같은 조건을 가지는 것이 바람직하다고 본다.

• 학생의 흥미·관심을 불러오는 문제(재미가 있어 해결해 보고자 하는 마음이 생기는 문제)

• 목표가 명확하게 나타나 있는 문제

• 해결방법이 다양한 문제(개인의 생각, 사고가 중요시 될 수 있고, 창조적인 능력을 몸에 익히는 문제)

• 이미 습득한 지식이나 경험을 살릴 수 있는 문제(문제해결책 가운데 수학적인 가치가 있는 것이 포함되며, 해결과정 중에 수학적인 사고를 배울 수 있도록 하는 문제)

둘째로는 문제장면에 의한 문제의 특징은, 장면에 포함되어 있는 몇 가지의 제재로부터 학생이 학력이나 흥미, 관심에 따라 선택한 제재를 기초로 하여 구성한 것이다. 여기에서의 문제는 주로 다음의 세 가지의 관점에서 생각되어진다.

• 일상의 구체적인 장명에서의 문제

• 교구 등에 의한 단순한 장면에서의 문제

• 추상적 이론의 구체적 장면을 적용하는 문제

셋째로는 문제가 문제를 야기하는 것은 본래 수학의 문제가 일상의 생활 등의 문제로부터 출발하였다고 할지라도 서서히 구체적인 것으로부터 벗어나 추상적으로 되어가며, 머지 않아 수학의 문제로부터 새로운 문제가 생겨난다.

島田茂(1977)는 탐구적 어프로치의 교수-학습방법을 탐구적 문제를 과제로서 그 과제에 있는 정답의 다양성을 적극적으로 이용하는 수업을 전개하여 그 과정에서 이미 얻어진 지식, 기능 및 사고를 여러 가지로 조합하여 새로운 것을 발견하여 가는 경험을 나타내려는 방법을 의미한다고 규정하고 있다.

Ⅲ. 탐구적 어프로치 실천

앞에서도 언급한 것과 같이 탐구적인 어프로치 교수-학습 이론에 의한 지도목표는 조건의 첨가나 제거하는 것 등에 따라 문제를 발전적으로 처리하여 수학자체가 갖는 자유성과 창조성을 학습자에게 보증하면서 주체적인 인간형성을 시도하여 나가는 것이다. 이와 같은 교수-학습 이론을 바탕으로 문제해결능력을 몸에 익혀 나가기 위하여 과제설정이 이루어지고, 과제설정에 따라 지도계획이 구체적으로 이루어져야 한다. 또한 과제설정 단계에서는 학생들에게 의문을 불러모으는 것이 중요하다. 이와 같은 의문을 해결하는 단계에서는 학생들의 다양한 반응을 기초로, 각각 비교·검토하여 보다 가치 있는 것, 보다 합리적인 것, 보다 아름다운 것 등을 추구하는 장면이 설정되어야 한다.

문제제기→의욕환기→의욕유지→의욕증폭→새로운 학습의욕

문제제기에서부터 새로운 학습의욕을 불러오기까지는 학생들 각자가 자연스럽게 예상할 수 있도록 분위기를 조성하여야 한다. 그러나 산수·수학교육에서는 가설이나 전망은 강조되지만,

예상은 그다지 강조되어지지 않았다. 수학교육에 있어서 우선 예상의 뜻을 정의하고, 수업에서의 예상의 자리 메김과 의의를 명백히 하여 보자. 일상 사고를 돌이켜 보더라도, "예상→확인"의 되풀이 과정에서 사고하며 판단하는 경우가 많다. 이와 같이 예상은 우리들의 사고를 촉진시키며 사고하는 의욕을 불러일으킨다고 할 수 있다.

탐구적인 어프로치의 교수-학습 이론에서도 직관적인 사고인 예상의 역할을 중요하게 다루는 것이 바람직하다고 본다. 예상하는 것 없이 주어진 내용을 사고하게 시키는 수업에서는 학생들의 창의적인 문제해결을 기대하는 것은 어렵다. 예상을 중시하는 것은 흥미 혹은 동기 유발시키는 방안으로 학생의 주체적이고 의욕적인 학습을 기대할 수 있을 것이다.

예상은 여러 가지의 재료에 따라 "아마 이렇게 될 것이다"라고 판단하는 것이며, 가설은 사실을 합리적으로 설명하기 위한 가정 혹은 전제를, 전망은 처음부터 끝까지를 통찰하는 것으로 비유된다. 우리들이 새로운 문제에 직면하였을 때 가설을 세우는 것은 반드시 용이한 것은 아니다. 수업에서도 학생에게 가설을 세우도록 지시하는 것은 어렵다. 할 수 없는 학생도 있을 것이다. 전망에 대하여도 마찬가지이다. 그러나 예상할 수는 있다. 수학의 수업에서 이와 같은 예상을 중시하고 싶다.

예상, 가설과 전망은 상반된 것이 아니다. 가설에 가까운 형태로 예상하는 학생도 있다. 최후까지 전망을 가지고 예상하는 학생도 있을 것이다. "어떻게 생각하여 예상하는가" 라고 하는 것은 학생의 개인차만이 아니고 문제의 질이나 예상시키려고 하는 장면 등에 따라 서로 다르다. 여러 가지의 형태의 예상이 있을 것이다. 따라서 실제의 수업에서는 예상을 가설이나 전망을 포함한 그리고 직관을 포함한 넓은 개념으로 규정한다. 이와 같이 예상을 가설이나 전망과 엄밀하게 구별하는 것은 중요한 것이 아니다. 중요한 것은 수업 중에 예상하는 장면을 설정하고, 학생들이 결과나 사고방식을 예상하게 하는 것이다.

1. 문제해결의 지도에서

교사가 설명하고 학생이 그것을 기억하기도 하고 연습을 반복하여 나가는 수업에서는 학생이 예상하는 장면은 아마 거의 생겨나지 않는다. 문제의 해결과정을 중시하여 처음에 문제를 제시하는 것으로부터 수업을 전개한다. 그의 문제의 해결과정에서 새로운 지식, 기능, 견해, 사고방식을 몸에 익히게 하는 것이다.

문제해결의 지도에 있어서 원칙으로서 다음과 같은 지도방식으로 수업을 진행하여 나간다. 다음의 각 단계에서 학생들이 돋보이려는 마음이 학생의 본연의 심리일 것이다.

교사의 지도과정	학생의 심리
① 문제제시	어?
② 예상의 성립	아마 … 이다.
③ 과제의 명확화	생각해보자 혹은 해보자
④ 과제의 해결	그렇군! 혹은 알았다.
⑤ 문제해결	풀었다 혹은 해냈다.

①의 단계가 예상에 해당된다. 문제의 결과나 사고방식에 대하여 짐작하는 것이다. 앞에서 논한 것과 같이 논리적으로 생각하여 가설이나 전망에 해당되는 학생도 있을 것이다. 직관적으로 예상하기도 하고 제멋대로 예상하는 학생도 있을 것이다. 수학의 수업에서는 이 단계를 중시하는 것이다. 예상을 통하여 "정말인가?", "왜 그런가?", "어느 쪽이 올바른가" 등의 감정이 우러러 나오는 것이다. 또한 새롭게 해결하여야 하는 과제도 생겨난다. 그것이 ③의 단계이다. 그리고 ④의 단계에서 지도목표와 이어지는 새로운 지식이나 기능, 견해나 사고방식이 획득되는 것이다. ⑤에서는 ④로 획득한 사항을 활용하여 처음의 문제를 해결하는 것이다. ②에서 예상한 사항이 논리적으로 확인되는 것이다.

이상과 같이 문제해결의 지도에 있어서 ②의 단계에 예상을 도입한다. 그러나 수학의 수업에

서 예상은 문제해결에 한정된 것은 아니다. ④의 과제해결의 단계나 연습문제 등 일상의 수업의 여러 가지의 장면에서도 예상되는 것이 있다. 그들의 예상도 조그만 문제해결에 있어서 예상으로 자리 메김하는 것으로 한다.

수업에서의 예상을 위의 ②의 단계로 위치를 부여하였지만 실제의 수업에서는 문제에 대하여 연상하게 하여 그것을 받아들이는 타이밍이 문제가 된다. 다음의 두 가지의 경우가 주로 생각되어진다.

바로 사고결과

문제 ——> 예상, 문제 ————> 예상

"어느 쪽이 좋다" 라고 하는 것은 없다. 지도목표나 문제의 질, 학생의 실태 등에 따라 선택하고 싶다. 어느 것이든 바람직한 것은 서로 다른 예상이 나타나는 것이다. 또한 서로 다른 예상이라고는 하더라도 예상이 많다면 좋다라고 하는 것은 없다. 최저 2개 정도 생겨난다면 좋다. 그것에 따라 "어느 쪽인가?" 라고 하는 꼴로 수업을 전개할 수 있다. 단 서로 다른 예상이 절대조건은 아니다. 전원의 예상이 같지 않더라도 좋다. 그 예상에 대하여 "정말인가?", "왜 그런가?" 라고 하는 꼴로 수업이 진행된다. 예상시키지 않는 수업과 비교하여, 학생은 목적의식을 가지고 수업에 임하는 것이다. 즉, 예상을 의도적으로 도입하여 수업의 개선이 이루어진다고 할 수 있다.

2. 수업 만들기의 시점

그러면, 예상을 중시한 수업을 어떻게 구상하여 나간다면 좋은 것인가? 다음의 (1), (2)가 중요한 시점으로 된다.

(1) 좋은 문제의 만들기

예상을 이끌어 내는 좋은 문제 만들기를 계획하는 것이 수업 만들기 중에 최초이며 최대의 포인트일 것이다. 문제 만들기의 출발점이라 하는 "목표와 문제의 어느 쪽을 먼저 결정할 것인가" 라고 하는 것에 대하여 다음의 (가), (나)와 같이 양쪽의 경우가 있다.

1) 목표로부터 문제를

이와 같은 절차로 문제를 만드는 것이 통례이다. 처음에 지도목표를 설정하고 난 후에, 그 목표가 달성할 수 있도록 문제를 만드는 것이다. 그 문제는 학생의 예상을 이끌어 내며, 더욱이 목표로 이어지는 과제가 생겨나도록 하는 문제이다. 그와 같은 "좋은 문제는 없는가?" 라고 생각하는 것이다.

2) 문제에서 목표로

문제가 먼저 있고 그것에 목표를 대응시키는 것이다. 교재연구나 일상의 수업을 통하여 눈에 띄는 여러 가지의 문제 가운데, "이 문제는 ○○의 수업에 이용할 수 있다." 라는 느낌을 갖는 문제와 만나는 경우가 있다. 이와 같은 좋은 문제를 수업에 활용하는 것이다.

그것을 위하여 평소에 좋은 문제를 감지하기 위한 안테나를 거미줄처럼 둘러쳐 놓고 싶은 것이다.

(2) 수업의 흐름 만들기

목표와 문제가 결정되면 수업의 흐름을 만드는 것으로 된다. 기본적으로는 문제 해결의 지도단계 ①~⑤의 흐름에 따라 지도안을 작성하고 특히 다음의 3가지 점에 유의한다.

1) 예상을 예상한다.

문제에 대하여, 학생들은 여러 가지 예상을 한다. 그 예상을 어떻게 받아 들여, 그리고 어떻게 과제를 이끌어 내는 가가 중요하다. 그것을 위하여, 학생들로부터 나올 것이라고 예측을 할 수 있는 범위에서 예상하여 놓는다.

또한, 학생이 뜻밖의 예상을 하는 경우도 있다. 예상외의 예상도 중요시하여, 수업에 활용한다라는 자세를 중요시하고 싶다.

2) 과제를 명확히 한다.

과제가 지도목표로 이어진다. 어떻게 과제를 설정할 것인가를 명확히 하여 놓는 것이 중요하다. 그리고, 그 과제를 판서하는 것에 따라, 학

생에게 해결하여야 하는 상황을 확실히 받아들이도록 할 수가 있다.

또한 지도안을 작성하는 단계에서는 과제와 함께 주요한 발문도 명확히 하여 놓는다. 발문의 중요성은 새삼스럽게 강조할 필요가 없을 것이다. 나의 경우, 과제와 마찬가지로, 주요한 발문도 판서하는 경우가 많았다.

3) 교과서의 활용을 생각한다.

과제가 명백하게 되었지만, 그 해결이 곤란한 경우도 있다. 그와 같은 경우, 교과서를 적극적으로 활용하는 것도 생각하고 싶다. 문제해결의 지도에 있어서, 교과서의 활용에는, 다음의 ①~⑥의 경우를 생각할 수 있다.

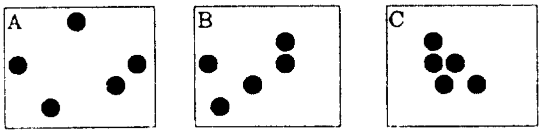
① 암시로 활용
② 별해로 활용
③ 예시로 활용
④ 정리로 활용
⑤ 연습으로 활용
⑥ 숙제로 활용

문제해결의 지도는 교과서를 사용하지 않는 지도가 아니다. 과제를 해결하는 과정에서 교과서를 열고, 예를 들면 암시나 예시로서 교과서의 설명이나 예제를 보는 경우도 있다. 예를 들면 한참동안 생각하였지만 증명할 수 없기 때문인데 "교과서에서는 어떻게 증명하고 있는가를 시험삼아 해 보아라" 라는 것으로 지시하는 것이다. 교과서의 증명을 이해하는 것에는 변함이 없지만, 예상시키는 것과 시키지 않는 것에서는 학생이 교과서를 보는 자세에는 상당한 차이가 있다. 예상을 확인하는 과정에서 생겨난 과제가 명확한 것으로부터 학생은 관심, 의욕, 필요성을 가지고 교과서를 보는 것이다.

별해나 정리로서 교과서를 활용하는 것도 많다. 연습이나 숙제를 포함하여 지도안을 작성하는 단계에서 교과서의 활용도 가능하다.

3. 실천적 예

<상황 3> (생활주변의 문제제시) A, B, C의 세 어린이가 공기돌 놀이를 하는 것을 연상하여 보자. 이 공기돌 놀이에서 떨어진 공깃돌의 흩어짐이 작은 쪽이 이기기로 되었다고 하자. 그런데 세 어린이가 공기돌을 던졌을 때 다음과 같은 분포를 이루어 졌다고 하자.



이 게임에서는 당연히 흩어짐 정도를 직관적으로 파악하여 C, B, A의 순서로 순위를 메길 수 있다고 생각한다. 여기에서 이전에 이미 획득한 기초지식이나 기능 등을 충분히 활용하여 흩어짐의 정도를 수치로 나타내는 방법을 생각하도록 과제를 부여하였다고 가정하여 보자. 즉, 이 예제는 흩어짐의 정도를 어떻게 수치화시킬 수 있을까 하는 문제이다. 2차원의 흩어짐을 측정하는 문제는 위의 그림에서도 보여지는 바와 같이, 유일하게 결정되어지지 않는다. 이것으로 인하여 어떤 관점을 결정하고 그것에 따라 수치화의 방법이 여러 가지로 궁리되어질 것이다.

이 문제의 상황을 비추어 보아 다음과 같은 방법으로 흩어짐의 정도를 수치화하는데 이용할 것이다.

① 공기돌이 이루어 놓은 다각형의 면적
② 공기돌이 이루어 놓은 다각형의 둘레
③ 공기돌 중에 가장 멀리 있는 두 점을 잇는 최대 선분
④ 모든 선분의 길이의 합
⑤ 임의의 점에서 각 점까지의 길이의 합
⑥ 원판 등으로 덮어씌울 때 최소 원의 반경
⑦ 좌표도입에 의한 평균편차, 표준편차 등에 의한 방법

이들 문제해결방법은 어느 것도 장점과 단점이 있다. 예를 들면 어떤 학생은 각각의 그림의

점을 이어서 다각형을 만들고 그 면적으로 흩어짐의 대소를 결정하려고 할 것이고, 또 다른 학생은 그 방법을 비판하며 두 점을 잇는 최대 선분의 길이를 구하는 공식을 유도하면서 해결과정을 나타낼 것이다. 과제자체도 주변의 일상 생활에서 일어나는 일들로 관심을 갖는 것은 물론이거니와 토론과정에서 나타나는 다른 학생의 문제해결과정의 진위는 물론이거니와 자기의 해결방법을 다른 학생에게 어떻게 의사를 관철할 수 있는가 등의 교육적인 효과는 자못 크다고 할 수 있겠다.

<상황 4> $x^2+5x+2=0$의 두 개의 근을 a, b라고 할 경우 $a^2+2ab+b^2$의 값을 구하라.

우선 학생의 반응은 해의 공식을 이용하여 $x^2+5x+2=0$의 두 개의 근을 구할 것이다.

$x=\frac{-5\pm\sqrt{25-8}}{2}$을 간단히 하여 $\frac{-5+\sqrt{17}}{2}$를 a, $\frac{-5-\sqrt{17}}{2}$를 b로 놓고 $a^2+2ab+b^2$에 대입하여 해를 구할 것이다.

또한 식의 꼴을 보아 $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$로 생각한다. 여기에서

$$(a+b)^2=(\frac{-5+\sqrt{17}}{2}+\frac{-5+\sqrt{17}}{2})^2=5^2=25$$

라고 하는 해가 얻어진다.

이 문제의 상황에서는 해가 25라는 것에는 큰 의미가 없다. 이 상황에서 방정식의 계수를 여러 가지로 변형시켜 생각하여 보게 한다.

$$x^2+5x+2=0 \rightarrow x^2-6x-1=0$$
$$\rightarrow 3x^2-2x-4=0 \rightarrow x^2-6x-1=0$$

에서도 앞의 문제와 마찬가지로 $x=3\pm\sqrt{10}$라고 풀어서, $a=3+\sqrt{10}$과 $b=3-\sqrt{10}$을 $(a+b)^2$에 대입하면 36으로 된다.

위의 두 가지의 해법을 관찰한 보다 발전적인 학생은 x의 계수 5와 -6의 제곱으로 결정된다는 것에 착안하여, 이렇게 귀찮은 계산을 하지 않더라도 무엇인가의 해결방법을 찾아내려고 노력하거나 교사는 분위기를 조성한다. 즉 이것으로 문제해결학습이 가능하게 된다. 셋째의 방정식 $3x^2-2x-4=0$에서는 x의 계수가 -2이므로 해가 4로 된다. 그런데 이와 같은 예상이 맞았는가를 실제로 계산하여 본 결과 4/9로 나타난다. 여기에서, 이 학생은 골똘히 생각하게 된다. "x의 제곱이 아니다." "그렇다면 4/9는 $3x^2-2x-4=0$의 계수와 무엇인가 관계가 있는 듯하다." "아! 그렇구나." "2/3의 제곱으로 나타나는 구나."

<상황 4>는 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 근을 α, β라고 할 경우에 근과 계수와의 관계

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\ \alpha\cdot\beta=\frac{c}{a}$$

를 교수-학습 이론에 적용한 예이다.

Ⅳ. 결론

형식적인 계산이나 공식의 적용 등의 기억 재생형의 문제 달성상황은 양호하면서도 판단을 요구하는 문제(응용문제)에는 아주 낮다. 이것은 학습지도가 해설(공식 등)이나 기교의 전달로 진행되어지고 있기 때문이다. 현행 학교교육에서는 생애학습의 기초를 기르는 것으로, 스스로 배우고자 하는 의욕과 사회의 변화에 주체적으로 대응할 수 있는 능력의 육성의 중시를 강조하고 있다. 기초적인 지식, 기능을 몸에 익히는 매일의 학습은 학생에게는 새로운 문제에 직면하여, 이것을 매일 매일 해결하여 나가는 것과 같다. 종래의 수학교육의 연구가 이론을 중시하는 경향이 강하였으나, 최근에는 이에 대한 반성으로 실천적인 연구가 성행하고 있다.

탐구적인 어프로치에 의한 교수·학습의 이론에 대한 연구는 종래의 학교수학에서 취급되어 온 문제의 해나 해결방법이 유일한, 말하자면 닫혀져 있는 것이었다. 스스로 생각하고 주체적으로 판단하여 행동하는 힘을 키우는 교육에의 질적 전환을 도모한다는 기본적인 취지이다.

문제해결능력을 높이는 교수-학습의 이론의 적용을 생각하는 경우 새로운 교재나 교구를 연구하여 보는 것도 가치가 있지만 오히려 매일

취급하는 교재를 재구성하여 학생 개개인의 문제해결 능력을 높여 가는 것도 바람직하다고 본다. 단순하게 교과서에 기재되어 있는 내용이나 문제를 그냥 지나치는 교수-학습 지도에서는 문제해결능력을 육성하여 나간다는 것은 불가능하다. 교과목표는 물론이거니와 각 단원의 목표를 충분히 연구, 검토하여 교재의 재구성을 도모할 필요가 있다.

또한 문제해결능력을 향상시키는 탐구적 어프로치의 교수-학습 이론을 진행하는데 있어서, 일제 수업하는 중에 취급하는 것은 교사와 학생의 공동사고, 공동작업을 기반으로 진행하는 것은 당연하지만, 자칫하면 교사가 결과를 구하는 것을 서두르는 나머지 안일하게 결론을 내리는 경향이 있다. 그러나 개개인의 능력차나 사고의 패턴의 다양성을 생각하여, 발문의 방법, 암시를 주는 순서와 시기를 충분히 유의하여 수업을 진행할 필요가 있다. 학생이 문제해결에 성공하였을 경우 해결한 사실을 인정하는 것만이 아니고, 해결에 이르는 사고의 과정을 교사는 파악하여 이후의 지도 자료에 이용할 필요가 있다. 그것을 위하여 학생 한 사람 한 사람의 발표를 충분히 경청하는 것도 중요하지만 한정된 시간내의 수업에서는 그것이 불가능한 경우가 생겨난다. 또한 문제 해결의 교수-학습 이론과정을 평가하는 많은 방법들의 연구가 필요하다고 본다.

참 고 문 헌

정지호외 4인(1993). 중학교 수학교과의 수업모형, 수업방법, 평가도구 및 평가도구 개발에 관한 연구. 한국교원대학교 교과교육공동연구소.

문교부(1988). 고등학교 교육과정. 문교부 고시 제 88-7호.

류회찬(1994). 수학교육 평가의 새로운 방향. 수학교육, 제33권, 제2호, 한국수학교육학회.

김응태 · 박한식 · 우정호(1984). 중보 수학교육학개론. 서울대학교 출판부.

허형(1994). 교육평가. 배영사.

相馬一彦(1994). 예상을 중시한 수학의 수업. 수학교육, No. 442. 85-92.

山本正明(1994). 문제 해결력과 문제 만들기의 수업. 수학교육, No. 437. 5-20.

仁平正一(1994). 관심 · 흥미를 끄는 수업을 목표로. 수학교육, No. 444. 95-101.

권오남(1994). 수학교육 평가의 새 동향. 수학교육, 제33권, 제2호, 한국수학교육학회. 297-303.

Skemp, R. R.(1971). The Psychology of learning mathematics. Allem Lane : Penguin Press Ltd.

能田伸彦(1983). 산수·수학과 탐구적 어프로치에 의한 지도의 연구. 동양관출판사.

島田茂(1977). 산수 · 수학과의 탐구적 어프로치. みすうみ書房.