韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
1995. 6. 제 34권, 제 1호, 69-72.

Journal of the Korea Society of Mathematical Education
Series A: Jun. 1995, Vol. 34, No. 1, 69-72.

ZENON의 逆理에 대한 小考

李 道 源(蔚山大學校)

I. 序 論

고대 Greece의 Elea 철학파[1]의 首長인 Zenon (B.C. 495-435)[2]은 당시의 수학자 Anaxagoras (B.C. 500-428)가 제창한 無限可分論[3]에 반대하는 입장에서 4가지 逆理를 내놓았다. Greece의 초기수학이 有限的이었으므로 命題의 증명이나 論理의 전개에 있어서 微小, 無限小라든가 無限大라는 개념이 불확실한 상황에서 無限可分論이 나오게 되니 이에 심한 반론이 제기되면서 위의 逆理가 출현한 것이다.

본문은 Greece의 초기수학의 有限性의 배경과 그 반성, 無限可分論의 의의, 逆理가 가져온 결과를 음미하며 Greece 數學史를 고찰하고, 고등학교 무한개념 교육에 도움을 주고자 한다.

II. Greece 數學의 有限的 性格

Greece의 수학 특히 幾何學은 눈부시게 발달하였다. 그러나 Greece 초기에는 數論이 먼저 철학적 입장에서 위세를 잡고 있었다. 이 시기의 哲學思想중 一元論의 주창자의 한사람인 Pythagoras(B.C. 580-500)[4]는 "모든 것은 數이다"라고 하였다. 그 앞에 幾何學의 창시자 Thales(B.C. 640-546)[5]는 "만물은 물로 되어 있다"라고 하였던 것이다.

Pythagoras 학파의 사람들은 "자연은 수학적 원리에 의해서 구성 되었다"라고 하여 우주 만물의 원리를 설명하고 있다. 그리하여 크기가 있는 점의 단위가 모여서 직선이 이루어진다고 생각하였으며 이 개념을 數量으로 표시하고자 했기 때문에 수량은 자연수와 그 比로써 표시되는 有理數만이 그 대상이 되었던 것이다.

그러나 이 논거는 곧 모순에 봉착하였다. 즉 그 유명한 Pythagoras의 정리를 발견하고 결과적으로 직삼각형의 빗변이 유리수로 표현할 수 없는 것이 나타나자 당황하고 이의 발설을 엄금하고 비밀에 부쳐두기도 하였다. 이는 절대권위의 자기 붕괴의 고뇌를 가져왔으며 결국 數論으로의 발전의 한계를 느끼고 완전무결한 수학을 모색하면서 자연적으로 기하학으로 집중되며 그 논리정연한 演繹과 歸納法으로 학문을 발전시킨 것이다. 이 결과 Euclid 幾何學原本이 B.C. 300 년 경에 출판되어 Greece 수학의 절정을 이뤘으며 이 原本은 19세기까지 별 수정없이 그대로 서양에서 교과서로 썼던 것이

1) Elea는 Italia 남부에 있었던 지명으로 이곳에 철학자들이 모여 학문을 발전시켰는데 이들을 Elea 철학파라 한다.

2) Zenon이 사형당할 때 왕에게만 말할 비밀이 있다고 하고 왕의 구에 소근거리는 척하고 귀를 물었는데 참수가 된 후에도 머리는 왕의 귀를 물고 늘어져 있었다고 한다.

3) 線分을 계속해서 分割할 수 있다는 논리.

4) Pythagoras는 Aege해의 Samos 섬에서 태어나 Egypt와 Babilonia에 오랫동안 유학하고 돌아와 학교를 세웠는데 정치적으로 압박을 받아 성공하지 못했다. 그는 Italia 남부의 Crotona으로 피난와서 학교를 세웠으며 성공하여 많은 제자를 두었는데 이는 학교라기 보다 敎團의 성격을 가졌다. 이들의 발견은 모두 그들의 스승 Pythagoras의 발견이라 하고, 그 내용을 마음대로 밖으로 누설하면 큰 벌을 주었다.

5) Thales는 Ionia학파의 대표로서 서양철학의 시조, Greece수학의 아버지, Greece 七賢人의 한 사람으로 칭송되고 있다. 그는 처음 상인으로서 Egypt에 건너가 거기서 Egypt 승려로부터 실용적인 지식을 배우고, Greece에 돌아와서는 그 지식에 이론적 반성을 보태고, 거기에 논증을 주어 학문을 세웠다.그가 발견한 기하학적 내용은 맞꼭지각은 같다, 이등변삼각형의 두 밑각은 같다, 두 삼각형의 합동조건 등이다.

다. 서양출판사상 성경 다음으로 가장 많이 읽혔던 고전이 이 Euclid 幾何學原本이라 한다.

이 기하학에서 點, 線, 面의 정의는 이론적 존재에서 시작하였다. 즉 점은 크기가 없으며 위치만 있는 것이라고 하였는데 크기가 없는 것을 어떻게 인지할 수 있는가, 폭이 없는 선을 어떻게 나타낼 것인가. 그러나 Greece의 수학자는 점도 찍고 선도 그리고 하여 논리적 전개로 기하학을 구성하고 발전시켜 화려한 학문의 場을 열었던 것이다.

Greece 기하학에서 無限이라는 개념은 도입되지 않았다. 즉 무한히 많다든가 무한히 여러번 시행한다는 생각은 하지 않았다. 자연히 도형의 유한적인 성질에서 기하학적 도형 즉 원과 다각형의 관계를 정립하려고 노력했다. 당시 유행된 難問으로 세가지가 있었는데 이른바 圓積문제[6], 倍積문제[7], 角의 3등분 문제이다. 모두 자와 콤파스 만을 써도록 요구되는 作圖문제이다. 점과 점 사이의 거리가 有理量인가 無理量인가의 판단을 떠나서 유한번의 동작으로 목적을 달성시키기 위하여 노력했던 것이다.

Ⅲ. 圓積 문제의 연구

3대 난문의 해결은 2400여년 후에야 그 불가능함이 증명되었으며[8] 이는 작도할수 없는 無理量을 찾는 작업임이 밝혀져 대난문의 종지부를 찍었다. 그 동안 수없이 많은 유명 무명의 수학자들이 필생의 사업으로 연구하였으며 그 결과 수학에 많은 발전과 새로운 업적이 생겨났으며 가히 공헌이 많은 문제라고 생각된다.

이 중 하나인 원적문제는 원과 같은 넓이의 정사각형을 작도하는 것이다. Greece 인들은 일찌기 면적을 변하지 않고 다각형을 삼각형으로, 삼각형을 직사각형으로, 직사각형을 정사각형으로 작도할 수 있었다. 그래서 중심 O인 원위의 한 점 A에서 접선을 그어 그 길이가 원둘레와 같은 점 B를 잡을 수 있다면 $\triangle OAB$의 넓이는 원의 넓이와 같다. 문제는 원둘레의 길이 AB의 작도에 귀착된다. 다시 말하면 π(원주율)의 량을 작도할 수 있느냐 하는 것이다.

B.C. 1650경에 Egypt의 Papyrus[9]에 의하면 π의 값으로 $(16/9)^2$ 즉 3.1605 로 계산하였는데[10] 이는 놀라운 근사치이다. 그러나 수학을 엄밀한 학문의 모델로 보는 Greece인은 이런 안이한 처리를 용납하지 않았으며 엄밀히 원의 면적을 재기 위해서는 어떻게 해야 하는가를 고심하였으며 원적문제의 심오한 사고가 이루어지며 해결을 위한 노력이 기울여진 것이다.

Antiphone(B.C. 480-411)은 원에 내접하는 정삼각형 또는 정사각형의 변의 수를 두배로 늘려서 정다각형을 만들 때 계속해서 변의 수를 늘려 나가면 한 변의 길이가 대단히 작아지기 때문에 원둘레와 일치하는 때가 있게되며 따라서 이 다각형의 넓이는 원의 넓이와 같아지며 다각형과 같은 넓이의 정사각형이 작도되므로 원적문제가 해결된 것처럼 보였다(B.C. 430경).

그 뒤 Archimedes(B.C. 287-212)[11]는 원에 내접하는 정96각형에 의해서 π의 값을 3과

---

6) 원적문제는 원과 같은 넓이를 갖는 정사각형을 작도하는 것으로 원주율 π를 작도하는 문제이다.

7) 배적문제는 세 모서리의 길이가 1인 정육면체의 부피는 1이지만, 이에 대하여, 부피가 2인 정육면체의 한모서리의 길이 즉 2의 세제곱근을 작도하는 문제이다.

8) 1837년에 Wantzel이 배적문제와 각의 3등분 문제가 작도불가능임을 증명하고, 1882년에 Lindeman이 원적문제도 불가능문제임을 증명하였다.

9) Papyrus는 옛날 Egypt에 자라난 水草로서 이것을 말려 일종의 종이로 활용하여 글씨를 쓴 것으로 Egypt의 古文書이다.

10) Egypt인은 Papyrus에 『원의 면적은 지름의 9분의 8의 길이를 한변으로 하는 정사각형의 면적과 같다』라고 기술 하였다.

11) Archimedes는 기하학자이고 또한 물리학자로서 목욕탕에서 목욕하다 浮力의 원리를 깨닫고 벌거벗은 채로 밖으로 뛰어나왔다고 하며, 불순물이 섞인 금왕관을 가려 냈다고 하는 일화가 있다. 또 圓, 球, 球面, 원기둥 등에 관한 넓이, 겉넓이, 부피 등의 관계를 밝혔다.

10/71 < π < 3과 1/7 (3.1408 < π < 3.1429)로 추정했으며 Antiphon의 방법을 쓴 것이다.

Antiphon의 생각의 기초는 "線은 有限個의 微小點으로 되어 있다"고 주장한 Pythagoras 학파에서 찾게되며 원적문제의 해결을 본 것으로 생각하였다. Antiphon의 주장에 대해서 Anaxagoras는 "線은 자꾸 分割할 수 있다". 즉 無限可分이기 때문에 최소의 미소점이 있을 수 없다고 생각하며 대립하였다. 더욱 無理量의 발견은 Antiphon의 견해가 정면으로 제동이 걸려 버린 것이다.

Anaxagoras의 무한가분의 원리는 "작은 것에 대해서 최소의 것이란 없으며, 언제든지 그것보다 더 작은 것이 있다. 즉 있는 것은 分割해서 없는 것으로 될 수는 없다"이다. 즉 무한가분의 논리로서는 변수를 무한히 늘리는 작업이 문제이고, 유한미소점의 집합으로 선분을 볼 때에는 無理量의 출현으로 설명이 막히기 때문이다.

Ⅳ. Zenon의 逆理

이 때 Zenon은 Anaxagoras의 無限可分論의 反論으로서 "만일 직선을 무한히 나눌 수 있다면 물체는 이동할 수 없으며, 아킬레스는 거북을 추월할 수 없다"라고 억지 論理를 내세웠다. 즉 A지점에서 B지점으로 물체를 이동시킨다 할 때 반드시 중간지점 C를 지나야 하며 C지점을 가기 위해서는 A와 C의 중간지점 D를 지나야 한다. 이렇게 무한히 많은 중간지점을 어떻게 전부 지날 수 있는가, 또 거북보다 훨씬 빨리 뛰는 아킬레스라도 거북이 있던 지점 A에 왔을때 거북은 얼마큼 앞의 지점 B에 있으며 아킬레스가 B지점에 오면 거북은 다시 앞의 C 지점으로 가게 되니 계속해서 무한히 많은 지점이 앞에 놓여 있어 추월할 수 없다는 것이다.

이 逆理(paradox)를 반박할 논리를 찾지 못하는 당시 수학자들의 고민은 컸던 것이다. Zenon은 위 두 개의 逆理 외에 "날으는 화살은 정지해 있다"와 "스타디움의 문제"[12]등을 내세워 거리나 시간을 무한히 나눌 수 있다는 것에 반론을 제기했다.

이런 無限의 개념의 혼란은 학자 사이에 無限大, 無限小 그리고 連續性에 대한 견해차로 생겨난 것이다. 유한적 思考에서 엄밀한 증명을 내세운 학문의 영역에서 상식을 뛰어 넘는 思考가 무한집합에서 일어나게 되니 逆理가 생기게 마련이다. "전체는 부분보다 크다"라는 Euclid 원본의 공리[13]의 상식에서는 자연수 전체와 짝수 전체가 일대일 대응이 되어 過不足이 없다 즉 자연수(전체)와 짝수(부분)는 同數(?)이다 라는 그 당시로서는 상식 밖의 일이 벌어지니 논란이 일어날 수 밖에 없다.

無限小의 微小量을 無限히 많이 합한다는 사실의 설명이 어떠한 무한소와 어떠한 무한대이냐에 따라 결과가 달리 나오니 이것을 단순히 無限이라는 동일한 개념으로 즉 상식으로는 설명이 되지 않았던 것이다.

아킬레스가 거북의 2배의 속도로 간다고 가정하고, 뛰기 시작 전에 거북이 아킬레스보다 1의 거리 앞에 있었다 하면 아킬레스는

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$$

을 가는 동안은 거북을 따라 잡지 못할 것이다. 零이 아니것을 무한히 많이 합하면 무한히 커질 것이라는 생각에서 벗어 나지 못한다면 바로 逆理에 말려 든것이다. Greece인은 무한적 조작을 극단적으로 기피하고 증명은 모두 유한번의 과정으로 기술될 수 있는 것에 한정시켜 버린 것이다.

---

12) 스타디움의 문제는 두 열의 물체를 마주보고 이동시키므로서 어떤 시간과 그 절반의 시간이 같다라는 역리이다.

13) Euclid 원본의 공리는 다섯개가 있다.

① A=B, A=C ⇒ B=C

② A=B ⇒ A+C=B+C

③ A=B ⇒ A-C=B-C

④ 중첩되는 것은 서로 같다

⑤ 전체는 부분보다 크다.

Ⅴ. 逆理의 敎訓

無限可分論을 긍정해도 부정해도 중대한 곤란에 부딪친다. 無限이라는 魔物에서 피해갈 길은 없는 것인가? Eudoxos(B.C. 408-355)는 搾出法(착출법, 남김없이 차지하는 算法, method of exhaustion)을 고안하여 이 어려움을 개척해 갔는데 이 착출법이란 바로 區分求積法을 말하는 것이다.

Antiphon과 Anaxagoras의 생각은 積分과 微分의 싹이 보였던 것이고 실로 2000여년 뒤에는 한 형제가 될 것을 처음에는 몰라보고 싸운 결과라고 보여진다. 더우기 이 싸움판에 궤변가 Zenon이 등장하여 흥미를 가중시킨 것이라고 보아 무방하다.

반대를 위한 반대는 사회적 갈등에서 가끔 등장하는 논법이지만 억지를 부리는 부정적 의미를 지니고 있기 때문에 일반적으로 좋게 보지 않는 것이다. 그러나 학문적 입장에서 反論을 위한 反論은 그 오류를 지적하기 위해서 수학적이고 논리적인 판단이 요구되는 것이다. 그러기 때문에 Zenon의 逆理가 오늘에 있어서도 無限小라든가 無限大의 개념 설명에 많이 이용되는 有用한 내용이다.

Ⅵ. 結 論

수학과 철학 세계에서 無限의 개념은 상당히 매력적이고 의미심장하다. 수학은 유한한 존재에 지나지 않는 인간의 理性이 무한에 대해서 과학적으로 말할 수 있는 단 하나의 방법이다. 그래서 무한을 다루는 방법에 따라 각 시대의 수학은 고유의 특성을 지니고 있다. 그런 의미에서 無限論의 변천은 數學史 그 자체라 볼 수 있다. 고등학교 수학교육에 이런 史實을 들어가며 무한의 개념을 뚜렷이 세울 필요가 있다.

參 考 文 獻

現代數學社(日本)간행(1972). 現代數學 72-112.
Cajori저(鄭址鎬역)(1983). 數學의 歷史.
金容雲, 金容局저(1986). 數學史大全.
日本評論社 간행(1989). 100人の 數學者.
日本評論社 간행(1990). 數學セミナ 10-90.