論文95-32B-6-2

퍼지 논리 제어기의 강인성에 대하여

(On the Robustness of a Fuzzy Logic Controller)

李 壽 榮 *, 鄭 明 振 **

(Soo-Yeong Yi, and Myung-Jin Chung)

요 약

비록 퍼지 논리 제어기가 여러 공학 분야에 점점 더 많이 적용되는 추세에 있지만, 명확한 이론적인 해석이 없기 때문에 그의 성능이 보장되지 못하는게 사실이다. 그러한 점이 우리가 퍼지 논리 제어기를 중요한 상황에 적용함에 있어서 주저하게 되는 주된 요인일 것이다. 본 논문에서는 퍼지 논리 제어기와 기존 강인 제어 방식의 하나인 가변 구조 제어기 사이의 제어 입력 형태의 유사성에 착안하여 퍼지 제어 시스템의 강인성을 Lyapunov 이론에 의거하여 해석한다.

Abstract

Although the fuzzy logic controller(FLC) has been adopted in many engineering applications, its performance is not guaranteed since there is no definite theoretic analysis. It may be the main factor that one hesitates to adopt the FLC in critical applications. In this paper, observing the similarity in the pattern of control input between the FLC and a conventional robust controller, i.e., the variable structure controller, we present theoretic analysis for robustness of a fuzzy control system based on the Lyapunov theory.

I. 서 론

퍼지 집합론에 기본을 두는 퍼지 논리 제어 방식은 단순한 계산 요소들로 이루어져 있으며, 인간의 제어 행동을 프로그래밍할 수 있는 제어 기법이므로 최근들어 여러 분야에 점점 더 많이 활용되는 추세에 있다. 특히 대상 시스템에 내재하는 불확실성에 대한 퍼지 제어의 강인성은 현대적 제어 이론이 추구하는 바의 목적에 잘 부합되므로 매우 복잡하거나 비선형성이 강해서 부정확한 시스템 모델만을 가지게 되는 제어 분야에 적합하다.

* 正會員, 韓國科學技術硏究院 機電硏究部

(KIST Division of Mechanical/Control System)

** 正會員, 韓國科學技術院 電氣 및 電子工學科

(Dept. EE KAIST)

接受日字: 1994年7月22日, 수정완료일: 1995년5월30일

그러나 퍼지 논리 제어기(Fuzzy Logic Controller : FLC)의 활용이 증가되는 추세에 있지만, 안정성이나 강인성 같은 제어 이론적인 시스템 해석이 상대적으로 적기 때문에, 우리는 FLC를 사용하는데 주저하게 되는게 사실이다. 그러므로 FLC의 기본적인 성질을 이해하고 성능을 명확히 보장할 수 있는 해석과 설계 방식이 있다면 도움이 될 수 있을 것이다.

한편 널리 사용되는 여러 FLC들을 살펴 보면, 공통적으로 FLC의 제어 규칙표가 한 정형적인 형태, 즉 대각항을 중심으로 윗 편은 음의 후건부(consequent part)를 갖는 제어 규칙들로, 그리고 아랫 편은 양의 후건부를 가지는 제어 규칙들로 이루어져 있음을 볼 수 있다[1][2][3][4][5]. 이러한 형태의 규칙 패턴을 UNLP 형태라고 부르겠다. 그러한 제어 규칙표의 예로서, 표 1에 여러 문헌들[1][2][3][4]에서 발췌한 제어 규칙들을 보인다. 표 1의 제어 규칙들을 오차 위상 평면에 따라서, 즉 오차와 오차의 미분값을 각각

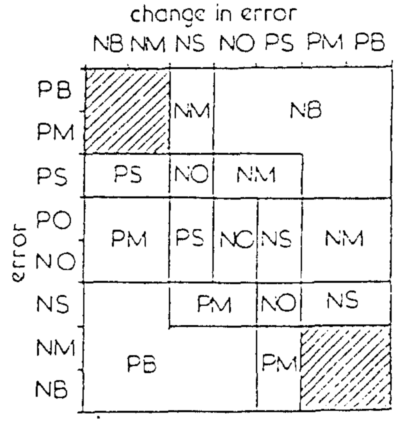
x, y축으로 하는 직교 좌표 공간에 따라서 재구성하면 그 제어 규칙들이 UNLP 형태를 가지고 있음을 쉽게 볼 수 있을 것이다.

그러한 형태의 FLC의 제어 규칙은 기존의 강인 제어기인 가변 구조 제어기와 유사한 점이 있다[6]. 가변 구조 제어기는 오차 위상 평면상에서 원하는 추종 오차의 특성을 의미하는 한 직선을 중심으로 서로 다른 구조를 가지는 제어기 사이를 스윗칭하는 것이다. 그러한 유사성에 착안하여 여기서는 잘 알려진 강인 제어 시스템 이론으로 부터 UNLP 형태의 제어 규칙을 가지는 FLC의 강인성을Lyapunov 의미에서 해석하고자 한다. 또한 어떠한 제어 이론이라도 그의 실제 구현시에는, 오차나 오차의 미분값등을 측정하는 엔코더등 센서의 제한된 동적 영역 때문에 어쩔 수 없이 오차 위상 평면상에서 그 제어기가 정의되는 영역도 제한될 수 밖에 없는데, 그러한 경우의 FLC에 대해서 Region of Attraction(RA)을 구할 것이다. 실제적으로 사용되는 PD 형태의 모든 FLC가 UNLP 형태의 제어 규칙을 가지고 있으므로 본 논문의 결과는 FLC의 강인성에 대한 구체적인 설명과 더불어 강인한 FLC 설계의 한 지침(guideline)이 될 수 있다.

본 논문은 FLC와 대상 시스템으로 구성되는 폐루프 시스템의 강인성에 대해서 해석하고, 연결되는 다음의 논문[10]에서 이러한 해석에 근거한 FLC의 체계적인 설계 절차를 제안하기로 하겠다.

표 1. 여러 문헌들에서 나타나는 UNLP 형태의 제어 규칙들
Table1. The UNLP pattern of fuzzy control rules appeared in the literatures.

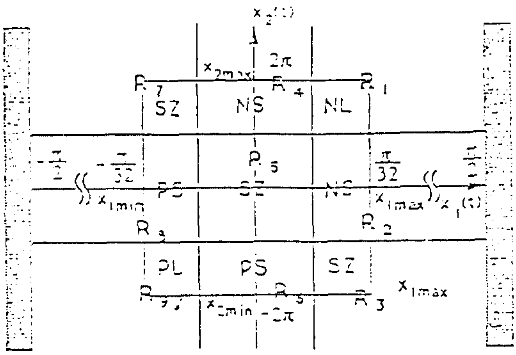
(a) Kickert와 Mamdani의 제어 규칙
(a) Kickert and Mamdani's[1]



(b) Pedrycz의 제어 규칙표[3]
(b) Pedrycz's[3]

Error	Change of Error						
	NB	NM	NX	Z	PS	PM	PB
PB	-	—	NM	NB	NB	NB	NB
PM	-	-	NM	NB	NB	NB	NB
PS	PS	PS	NO	NB	NB	NB	NB
PO	PM	PM	PS	NO	NS	MN	MN
NO	PM	PM	PS	NO	NS	NM	NM
NS	PB	PB	PM	PM	NO	NS	NS
NM	PB	PB	PB	PB	PM	-	-
NB	PB	PB	PB	PB	PM	-	-

(c) H. Kang의 제어 규칙표[2]
(c) H. Kang's[2]



(d) Brian Feeny의 제어 규칙표[4]
(d) B. Feeny's[4]

e					
PL	Z	NS	NL	NL	NL
PL	PS	Z	NS	NS	NL
Z	PL	PS	Z	NS	NL
NS	PL	PS	PS	Z	NS
NL	PL	PL	PL	PS	Z
	NL	NS	Z	PS	PL

Ⅱ. 퍼지 논리 제어기

본 논문의 착안점에 주로 촛점을 맞추기 위하여 다음과 같은 2차의 단일 입력 동적 시스템을 생각해 보자.

$$\ddot{x} = f(\mathbf{x}) + \Delta'(\mathbf{x}) + u$$

여기서 $\Delta'(\mathbf{x})$는 비구조적(unstructured) 불확실성을 나타내고, $\mathbf{x} = [x, \dot{x}]^T$로 정의한다. 우리가 이미 알고있는 시스템에 대한 지식, 즉 공칭 동력학 $f_n(\mathbf{x})$를 이용하여 이를 다시 쓰면 다음과 같다:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= f(\mathbf{x}) + \Delta'(\mathbf{x}) + u \\ &= f_n(\mathbf{x}) + f(\mathbf{x}) - f_n(\mathbf{x}) + \Delta'(\mathbf{x}) + u \\ &= f_n(\mathbf{x}) + \Delta(\mathbf{x}) + u \end{aligned} \quad (1)$$

여기서 새로운 일괄적인(lumped) 불확실성 $\Delta(\mathbf{x})$를 수학적으로 표현하기 어려운 비구조적 불확실성 $\Delta'(\mathbf{x})$와 구조적 불확실성인 공칭 동력학 모델 오차 $f(\mathbf{x}) - f_n(\mathbf{x})$의 합, 즉 $\Delta(\mathbf{x}) = \Delta'(\mathbf{x}) + (f(\mathbf{x}) - f_n(\mathbf{x}))$으로 정의하였고, 이의 최대 크기는 알려져 있다고 가정한다. 즉 모든 $\mathbf{x}$에 대하여 $|\Delta(\mathbf{x})| \le \Delta_{\max}$이다. 또한 $f_n(\mathbf{x})$와 $\Delta(\mathbf{x})$는 $\mathbf{x}$에 대해서 연속이라고 가정한다. 다관절형의 로봇 시스템등 많은 기계류의 동역학이 식 (1)과 같은 형태로 표현될 수 있으며, 3차 이상의 고차 시스템에 대한 적용 가능성은 뒤에서 다시 설명하겠다. 앞으로는 식 (1)을 제어기설계의 대상 시스템으로 다루겠다. 그리고 $e = x - x_d$를 제어 시스템의 추종 오차라고 하고, 주어진 원하는 추종 궤적(desired trajectory) x_d는 bounded이고 smooth하다고 하자. 'Smooth'라는 용어는 주어진 함수가 고계 미분이 가능함을 의미한다.

지금 제어 입력을

$$u = k(e, \dot{e}) - f_n(\mathbf{x}) \quad (2)$$

로 한다고 하자. 여기서 $k(e, \dot{e})$는 연속성을 갖는 궤환(feedback) 제어기이다.

이제 그림 1에서 보이는 구조를 갖는 한 FLC를 생각하고, 이 제어기의 출력 이 식 (2)에서 $k(e, \dot{e})$의 역할을 한다고 하자. 다음에 간단히 FLC에 대해서 설명한다.

(i) 퍼지 집합: 모든 퍼지 집합은 정규화된(normalized) 입력 공간(space) $\mathbf{e}_n$, $\dot{\mathbf{e}}_n$, 그리고 역시 정규화된 출력 공간 $\mathbf{k}_n$에서 정의된다. 여기서 아래 첨자 n은 정규화를 의미한다. 즉, $\mathbf{e}_n = \{e_n | -1 \le e_n \le 1\}$, $\dot{\mathbf{e}}_n = \{\dot{e}_n | -1 \le \dot{e}_n \le 1\}$ 이고 $\mathbf{k}_n = \{k_n | -1 \le k_n \le 1\}$이다. 각 공간에서 퍼지 집합들을 정의하기 위하여 다음의 용어 집합을 사용한다:

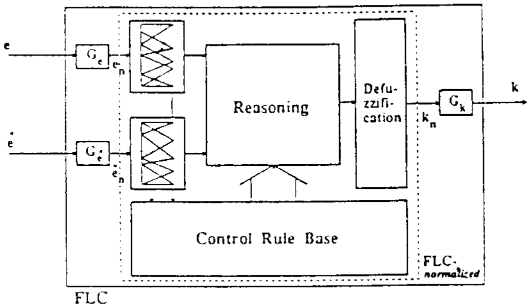


그림 1. FLC의 구조
Fig. 1. Structure of the FLC.

{NB(Negative Big), NS(Negative Small), ZR(ZeRo), PS(Positive Small), PB(Positive Big)}

각 공간에서의 퍼지 집합의 갯수는 몇 개라도 상관 없지만 여기서는 5개로 하였다. 예로서 NSE(NS Error), $ZRDE$(ZR Derivative of Error), 그리고 PBK(PB output K)등은 각각 대응되는 퍼지 집합의 언어적 표현을 나타낸다. 또한 간략히 표현하기 위해서 이 퍼지 집합들을 다음과 같이 첨자(index)로도 나타낼 것이다: 즉 {NBE, ..., PBE}들을 대표적으로 $\tilde{e}_i$로, 또 {$NBDE$, ..., $PBDE$}들에 대해서 $\widetilde{De}_i$로, 그리고 {NBK, ..., PBK}들에 대해서 $\tilde{k}_i$들로 나타낸다. 물론 여기서 $i = 1, \ldots, 5$이다.

한 퍼지 집합은 보통 소속 함수, 즉 $\mu_{\tilde{e}_i}(\cdot) | \mathbf{e}_n \to [0, 1]$인 함수에 의해서 정의될 수 있다. 일반적으로는 그의 인자(argument)에 대해서 연속적인 소속 함수가 사용된다. 그리고 정규화된 공간상에서 소속값이 1이 되는 점을 그 퍼지 집합의 중간값이라고 부른다. 즉, 중간값 $c_{\tilde{e}_i} \in \mathbf{e}_n$는 $\mu_{\tilde{e}_i}(c_{\tilde{e}_i}) = 1$이다. 퍼지 집합의 설계는 주로 제어 전문가의 직관에 의존한다. 퍼지 집합들의 중간값에 대한 한가지 선택 기준은, 정규화된 공간을 충분히 활용하기 위해서

$$\begin{aligned} &c_{NBE}(=-1) < c_{NSE} < c_{ZRE} < c_{PSE} < c_{PBE}(=1) \\ &c_{NBDE}(=-1) < c_{NSDE} < c_{ZRDE} < c_{PSDE} < c_{PBDE}(=1) \\ &c_{NBK}(=-1) < c_{NSK} < c_{ZRK} < c_{PSK} < c_{PBK}(=1) \end{aligned} \quad (3)$$

으로 하는 것이다.

(ii) 이득값 G_e, $G_{\dot{e}}$, 그리고 G_k: 양의 상수인 이들 이득값들은 시스템의 실공간 (real space)과 퍼지 집합들의 정규화된 공간 사이의 값을 변환해주는 비례 상수의 역할을 한다. 그러한 변환은

$$\begin{bmatrix} e_n \\ \dot{e}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_e & 0 \\ 0 & G_{\dot{e}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \boldsymbol{T}_g \cdot \begin{bmatrix} e \\ \dot{e} \end{bmatrix}, \quad \text{(a)}$$

$$k(e, \dot{e}) = G_k \cdot k_n(e_n, \dot{e}_n) \quad \text{(b)}$$

가 된다. 여기서 한가지 주목할 것은 모든 퍼지 집합들이 정규화된 공간상에서 정의되어 있으므로 실공간의 오차 위상 평면상에서 FLC가 정의되는 영역은

$$\boldsymbol{F} = \{(e, \dot{e}) \mid |e| \le 1/G_e, |\dot{e}| \le 1/G_{\dot{e}}\}$$

으로 제한된다는 것이다.

(iii) 추론 방법(reasoning process): 이는 간략화된 전제(premise)들의 집합으로 부터, 근사적인 결론(conclusion)을 연역해 내는 과정이다. 퍼지 논리 이론에 관한 문헌상에서, 추론 방법으로 가장 많이 사용되는 것은 fuzzy implication과 compositional rule of inference에 근거한 방법인데[11], 그중 대표적인 것이 max-min 연산자를 사용하는 것이다.

(iv) 비퍼지화 방법(defuzzification method): 추론 방법으로 부터 얻어진 근사적인 결론으로 부터, 한 대표값을 만들어내기 위한 방법인데,

$$k_n(e_n, \dot{e}_n) = \mathrm{defuzzify}(\tilde{\boldsymbol{k}}) = \frac{\int k_n \cdot \mu_{\tilde{\boldsymbol{k}}}(k_n)\, dk_n}{\int \mu_{\tilde{\boldsymbol{k}}}(k_n)\, dk_n}$$

로 구해지는 소위 무게 중심법 (center of gravity: cog)이 일반적으로 가장 많이 사용된다. 여기서 $\mu_{\tilde{\boldsymbol{k}}}(\cdot)$는 근사적인 결론, 즉 $\tilde{\boldsymbol{k}}$의 적합도(possibility)이다. 한 가지 주목할 것은 $k_n \in [-1, 1]$이므로, 식 (b)로 부터 FLC의 출력은 $k(e, \dot{e}) \in [-G_k, G_k]$ 이라는 것이다.

(v) *If-then* 형태의 제어 규칙들: UNLP 형태의 제어 규칙표를 생각해 보자. 그러한 제어 규칙표의 전형적인 한 예를 표 2에 보였다. 이는 퍼지 제어에 관한 많은 문헌들에서 일반적으로 단지 정성적인(qualitative) 의미만으로 이해되어지던 것이다. 예로써 표 2의 마지막 항의 제어 규칙은 다음의 의미를 갖는다. 즉 "만일 시스템의 추종 오차가 Positive Big이고, 지금 오차의 변화율이 Negative Big이면, 제어 입력은 ZeRo로 한다". 왜냐하면 시스템 스스로 안정 상태로 갈 수 있는 상황이기 때문이다. 한 예를 더든다면, 첫번째열 마지막행의 의미는 다음과 같다: 만일 시스템의 추종 오차가 Positive Big이고, 지금 오차의 변화율이 역시 Positive Big이면, 즉 오차가 더 커지려는 상태에 있으면, 제어 입력을 강한 음(Negative Big)의 값으로 하여 시스템의 상태를 반대 방향으로 밀어 주어야 한다. 만일 이 때 제어 입력을 양으로 하면 오차가 더 커질것이다.

표 2. UNLP 형태를 갖는 퍼지 제어 규칙표
Table 2. A fuzzy control rule table with the UNLP pattern.

$\dot{e}$ \ e	NBE	NSE	ZRE	PSE	PBE
PBDE	ZRK	NBK	NBK	NBK	NBK
PSDE	PBK	ZRK	NSK	NSK	NBK
ZRDE	PBK	PSK	ZRK	NXK	NBK
NSDE	PBK	PSK	PSK	ZRK	NBK
NBDE	PBK	PBK	PBK	PBK	ZRK

이러한 물리적 의미를 생각해보면 퍼지 제어 규칙의 UNLP 형태가 특별한 것이 아니라, 자연스러운 것임을 이해할 수 있다. 실제로 여러 문헌들에서 제시하는 제어 규칙 형태들을 보면, 국소적인 변화는 있지만 UNLP 형태라는 큰 구조는 일관되게 나타난다. 그러므로 앞으로는 본 FLC가 UNLP 형태의 제어 규칙을 가진다고 가정하겠다. 그러한 제어 규칙의 형태로 부터, 오차 위상 평면상에서 대응 $k(e, \dot{e}) \mid \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{R}$이 다음의 성질들을 갖고 있음을 정성적으로 유추할 수 있다[7]:

즉 대략적으로 말해서,

(a) 영역 $\boldsymbol{F}$의 대각선 부근에서 $k(e, \dot{e})$는 0이 되고,

(b) 대각선 윗쪽에서 $k(e, \dot{e})$는 음이며,

(c) 대각선 아랫쪽에서 $k(e, \dot{e})$는 양이고, 또한

(d) $k(e, \dot{e})$의 크기는 대각선과 시스템의 상태 $(e, \dot{e})$ 사이의 거리에 따라서 증가하는 경향이 있다.

이러한 성질들을 보다 명확히 기술하기 위하여, 먼저 정규화된 오차 위상 평면상에서 퍼지 집합들의 중간값의 쌍들인

$$\{(e_n, \dot{e}_n) \mid e_n = c_{NBE}, \dot{e}_n = c_{PBDE}\}, \{(e_n, \dot{e}_n) \mid e_n = c_{PBE}, \dot{e}_n = c_{NBDE}\}$$

를 연결하는 대각선

$$\dot{e}_n + e_n = 0 \quad (5)$$

을 생각해 보자. 입력 이득 G_e와 $G_{\dot{e}}$에 의한 변환 (a)로 부터 이 식 (5)는 실오차 위상 평면상에서의 영역 $\boldsymbol{F}$의 대각선,

$$\dot{e} + \sigma e = 0 \quad (6)$$

에 대응됨을 알 수 있다. 여기서 $\sigma = G_e / G_{\dot{e}} > 0$이다. 식 (6)은 안정한 오차 미분 방정식이다. 이제 FLC를 갖는 제어 시스템 (1)과 식 (2)의 오차의 척도(error

measure)로서 매개 변수 $s = \dot{e} + \sigma e$를 정의한다.

성질 1: 영역 $\boldsymbol{F}$에서 대각선 (6)에 수직인 한 직선 $s^{\perp}$을 생각하자. 그 수직 선 $s^{\perp}$상에서 $k(e, \dot{e})$는 매개 변수 s에 대해서 연속이다.

증명: 먼저 전술한 FLC를 이루는 각 퍼지 집합의 소속 함수들, 추론법, 비 퍼지화 방법, 그리고 이득 G_e, $G_{\dot{e}}$과 G_k들이 각각 그들의 인자에 대해서 연속인 대응이라는 사실에 주목하자. 그러므로 연속인 대응들의 합성으로 이루어지는 어떠한 대응도 역시 연속이 된다는 사실로 부터[8], FLC의 출력, $k(e, \dot{e})$가 그의 인자인 e와 $\dot{e}$에 대해서 연속이라고 결론내릴 수 있다. 이제 식 (6)에 수직한 한 직선 $s^{\perp}$을 생각해 보자. 그러한 수직선, $s^{\perp}$의 일반식은 다음과 같이 된다: $z = e - \frac{1}{\sigma}\dot{e} = const.$ 수직선 $s^{\perp}$상의 한 점 $(e^{\star}, \dot{e}^{\star})$과 매개 변수 s의 값 사이에는 $s^{\star} = \dot{e}^{\star} + \sigma e^{\star}$라는 관계에 의해서 일대일 대응이 성립하므로 앞으로 혼 동없이 이 수직선 상의 한 점을 매개 변수의 값 $s^{\star}$로 나타내겠다.

이 수직선 $s^{\perp}$상에서 z의 대한 전미분은 $\Delta z = \Delta e - \frac{1}{\sigma}\Delta\dot{e} = 0$, 즉 $\Delta\dot{e} = \frac{1}{\sigma}\Delta e$이다. 그러므로 $s^{\perp}$에서 매개 변수 s의 증분(incremental)은

$$\begin{aligned}\Delta s &= \Delta\dot{e} + \sigma\Delta e \\ &= (\sigma + \frac{1}{\sigma})\Delta e\end{aligned}$$

이 된다. 따라서 $\Delta s \to 0$는 $\Delta e \to 0$를 의미하며, 이는 다시 $\Delta\dot{e} \to 0$를 의미한다. 그러므로 $k(e, \dot{e})$의 e와 $\dot{e}$에 대한 연속성으로 부터, $s^{\perp}$상에서

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta s \to 0} k(e, \dot{e})\Big|_{s^{\star} + \Delta s} &= \lim_{\Delta e \to 0,\ \Delta\dot{e} \to 0} k(e, \dot{e})\Big|_{s^{\star} + (\Delta\dot{e} + \sigma\Delta e)} \\ &= k(e, \dot{e})\big|_{s^{\star}}\end{aligned}$$

임을 얻을 수 있다. 이는 $k(e, \dot{e})$가 $s^{\perp}$상에서의 한 점 $s^{\star}$에서 매개 변수 s에 대해서 연속임을 의미한다. 위의 과정을 그림 2에서 설명하였다.

이러한 과정을 수직선 상의 모든 점 $s^{\star}$과 영역 $\boldsymbol{F}$내의 모든 수직선에 적용하므로써 위의 성질을 증명할 수 있다. □

수직선 $s^{\perp}$의 두 끝점, s^{t_1}과 s^{t_2}은 그림 3에 보이듯이 각각 $\boldsymbol{F}$의 윗 변 혹은 오른쪽 변에 그리고 아랫 변 혹은 왼쪽 변에 놓인다. 다음의 성질은 그 두 끝점 상에서 $k(e, e)$의 값에 관한 것이다.

성질 2-1: $\boldsymbol{F}$의 아랫 변 $B = \{(e, \dot{e}) \mid |e| \le 1/G_e,\ \dot{e} = -1/G_{\dot{e}}\}$를 생각하자. $k_a \in [0, G_k]$ 인 임의의 k_a에 대해서 $k(e, \dot{e})$의 값이 $B' \subset B$인 경계 구간 $B' = \{(e, \dot{e}) \mid -1/G_e \le e \le e_b,\ \dot{e} = -1/G_{\dot{e}}\}$상에서 $k(e, \dot{e}) \ge k_a$가 되는 한 점 $e_b \in (-1/G_e, 1/G_e)$가 존재한다.

증명: 이에 대한 증명은 본 논문의 주된 목적에서 벗어나므로 뒤의 부록 1-1에서 보인다. □

성질 2-2: $\boldsymbol{F}$의 왼쪽 변 $L = \{(e, \dot{e}) \mid e = -1/G_e,\ |\dot{e}| \le 1/G_{\dot{e}}\}$을 생각하자. $k_a \in [0, G_k]$ 인 임의의 k_a에 대해서 $k(e, \dot{e})$의 값이 $L' \subset L$인 경계 구간 $L' = \{(e, e) \mid e = -1/G_e,\ -1/G_{\dot{e}} \le \dot{e} \le \dot{e}_l\}$에서 $k(e, \dot{e}) \ge k_a$가 되는 한 점 $\dot{e}_l \in (-1/G_{\dot{e}}, 1/G_{\dot{e}})$가 존재한다.

증명: 부록 1-2 □

성질 3-1: $\boldsymbol{F}$의 윗 변 $T = \{(e, \dot{e}) \mid |e| \le 1/G_e,\ \dot{e} = 1/G_{\dot{e}}\}$를 생각하자. $-k_a \in [-G_k, 0]$ 인 임의의 $-k_a$에 대해서 $k(e, \dot{e})$의 값이 $T' \subset T$인 경계 구간 $T' = \{(e, \dot{e}) \mid e_t \le e \le 1/G_e,\ \dot{e} = 1/G_{\dot{e}}\}$에서 $k(e, \dot{e}) \le -k_a$가 되는 한 점 $e_t \in (-1/G_e, 1/G_e)$가 존재한다.

증명: 부록 2-1 □

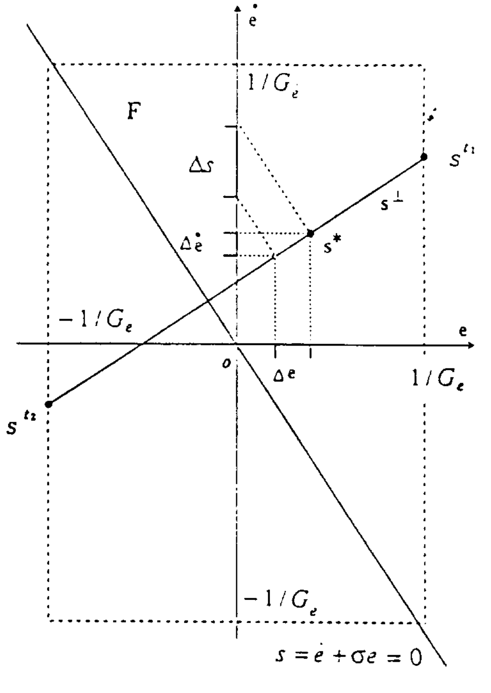


그림 2. 수직선 $s^{\perp}$의 매개 변수 s에 대한 연속성
Fig. 2. Continuity of $s^{\perp}$ on s.

성질 3-2: $\boldsymbol{F}$의 오른쪽 변 $R = \{(e, \dot{e}) \mid e = 1/G_e,\ |\dot{e}| \le 1/G_{\dot{e}}\}$을 생각하자. $-k_a \in [-G_k, 0]$ 인 임의의 $-k_a$에 대해서 $k(e, \dot{e})$의 값이 $R' \subset R$인 경계 구간 $R' = \{(e, e) \mid e = 1/G_e,\ \dot{e}_r \le \dot{e} \le 1/G_{\dot{e}}\}$에서 $k(e, \dot{e}) \le -k_a$가 되는 한 점 $\dot{e}_r \in (-1/G_{\dot{e}}, 1/G_{\dot{e}})$가 존재한다.

증명: 부록 2-2 □

나중의 논의를 위해서 $\boldsymbol{F}$의 각 변에서 B', L', T', 그리고 R'을 k_a-선분이라고 부르겠다. 이를 그림 3에 같이 나타내었다. 여기서 한 가지 주목할 것은, 위에서

이러한 성질들을 설명하는데 있어서, 제어 규칙의 형태가 UNLP라는 것 외에 규칙의 국소적인 형태에 대해서는 아무런 가정을 하지 않고 있다는 것이다.

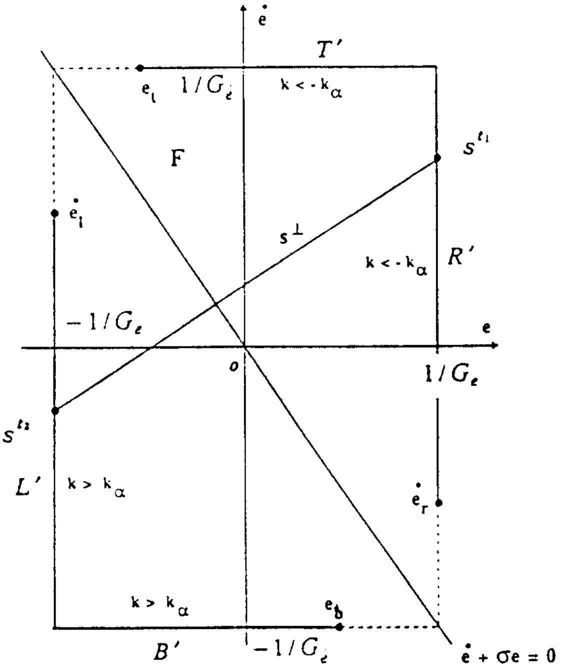


그림 3. k_α-선분과 수직선 $s^{\perp}$의 두 끝점 s^{t_1}과 s^{t_2}

Fig. 3. k_α-segment and two terminal points s^{t_1}과 s^{t_2} of $s^{\perp}$.

이러한 성질들과 잘 알려진 중간값의 정리(mean-value-theorem)를 이용해서, 대응 $k(e, \dot{e})$를 매개 변수 s를 이용하여 다시 재편성할 수 있는데, 이를 다음의 정리에 나타내었다.

정리 1: (ϕ의 존재) 앞서 기술한 FLC의 출력, $k(e, \dot{e})$를 생각하자. $k_\alpha \in [\ 0,\ G_k]$ 인 임의의 k_α에 대해서, $k(e, \dot{e})$의 값이

$$k(e, \dot{e}) \begin{cases} \leq -k_\alpha, & s \geq \phi \\ \geq \ k_\alpha, & s \leq -\phi \end{cases}, \tag{7}$$

가 되는 양의 상수 $\phi(k_\alpha) \in [\ 0,\ 2/G_{\dot{e}}]$ 가 존재한다. 앞에서 정의한 것처럼 $s = \dot{e} + \sigma e$, $\sigma = G_e/G_{\dot{e}}$이다.

증명: 여기서는 식 (7)을 만족하는 ϕ를 취하는 절차를 보임으로써 증명하는 방식을 택할 것이다.

지금 대각선 (6)에 수직한 직선 $s^{\perp}$들 중에서 양 끝점이 F 각 변의 k_α-선분상에 놓이는 한 수직선을 생각하자. 성질 1로 부터 $k(e, \dot{e})$는 매개 변수 s에 대해서 연속이고, 성질 2와 성질 3으로 부터 $k(e, \dot{e})|_{s^{t_1}} \leq -k_\alpha$, $k(e, \dot{e})|_{s^{t_2}} \geq k_\alpha$이므로, 중간값의 정리에 의해서, 임의의 $k_\alpha \in [\ 0,\ G_k]$ 에 대해서

$$k(e, \dot{e}) \begin{cases} \leq -k_\alpha, & \phi^* \leq s|_{s^{\perp}} \leq s^{t_1} & (8a) \\ \geq \ k_\alpha, & s^{t_2} \leq s|_{s^{\perp}} \leq -\phi^* & (8b) \end{cases}$$

인 점 $\phi^*(k_\alpha)$가 $s^{\perp}$ 상에 존재함을 알 수 있다. 이를 그림 4에서 설명하였다.

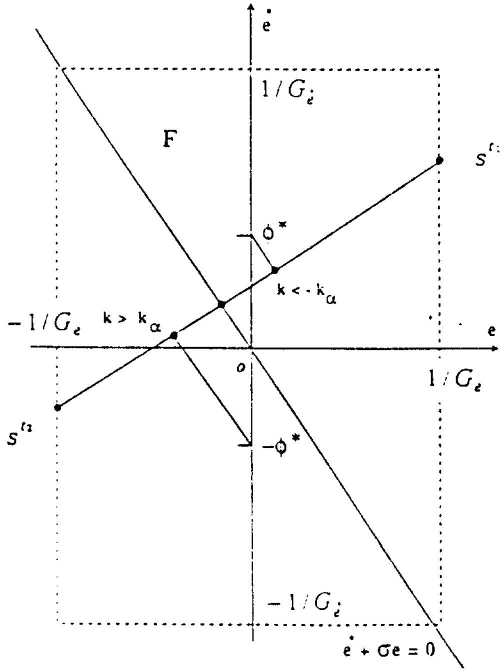


그림 4. 중간값의 정리에 의한 ϕ^*의 존재

Fig. 4. Existence of ϕ^* by the Mean-Value-Theorem.

이제 두 끝점중에서 한 점, 예로서 s^{t_2}가 k_α-선분상에 놓이지 않는 수직선 $s^{\perp}$에 대해서 생각해 보자. 이 경우에는 ϕ^*_+가 $k(e, \dot{e})|_{s \geq \phi^*_+} \leq -k_\alpha$를 만족하는 값이라고 정의할 때, ϕ^*로서 $\phi^* = \max(|\phi^*_+|, |s^{t_2}|)$를 취하면, 명제 (8-2)는 그의 전제 조건(premise part)인 $s^{t_2} \leq s|_{s^{\perp}} < -\phi^*$을 만족하는 점 s가 없으므로, 즉 전제 조건이 항상 거짓이므로, 여전히 참인 명제가 된다. 물론 다른 끝점, s^{t_1}이나 혹은 두 끝점 모두가 k_α-선분상에 놓이지 않는 경우에도 같은 논리를 적용할 수 있다.

그러므로 F 내의 모든 $s^{\perp}$에 대해서

$$\phi = \max|\phi^*| \tag{9}$$

를 취하면, 이것은 명제 (7)을 만족시키는 것이 된다. □

위의 식 (7)은 다음과 같이 다시 쓸 수 있다:

$$k(e,\dot{e}) = -k_f \cdot \frac{s}{|s|}, \quad |s| \geq \phi \text{ 에서}, \tag{10}$$
$$\text{그리고 } k_f(e,\dot{e}) \geq k_a, \quad \forall (e,\dot{e}).$$

여기서 $k_a \in [0, G_k]$ 이다. 물론 앞서 서술한 바와 같이 $k(e,\dot{e})$는 $\boldsymbol{F}$의 모든 내부점(interior point)에서 연속이다. 한가지 주목할 것은 정리 1이 UNLP 형태의 제어 규칙으로 부터 쉽게 이해될 수 있는 것이지만, 만일 ϕ가 $2/G_c$에 가깝다면, 즉 직선 $s = \dot{e} + \sigma e = \phi$가 $\boldsymbol{F}$의 오른쪽 위 꼭지점 근처에 놓여서, $\boldsymbol{F}$에서 식 (10)을 만족하는 영역 $|s| \geq \phi$이 매우 작다면 정리 1의 효용성은 떨어진다는 것이다. 그러나 UNLP 형태하에서 제어 규칙들이나 소속 함수들을 잘 설계한다면 ϕ의 크기를 임의로 작게할 수 있다. 즉 $\phi(k_a, c_{e_i}, c_{De_i})$는 k_a 뿐만 아니라 c_{e_i}와 c_{De_i}의 형태에도 의존한다는 것이다. 다음의 논문[10]에서 ϕ값을 설정하기 위한 기준을 구체적으로 제시할 것이다.

Ⅲ. FLC를 갖는 제어 시스템의 강인성

연속적인 궤환 입력 (2)를 갖는 불확실한 동적 시스템 (1)과 같은 시스템의 강인성(robustness)를 기술하기 위해서 다음의 ultimate boundedness에 관한 일반적인 정리를 제시한다.

정리 2:[9] $\boldsymbol{x}$가 한 동적 시스템의 상태(state) 벡터일 때, $\boldsymbol{D}$를 다음의 영역 $\{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n \mid \|\boldsymbol{x}\| \leq r\}$라고 하자. 그리고 $V(\cdot) : \boldsymbol{D} \rightarrow \boldsymbol{R}$는

$$\gamma_1(\|\boldsymbol{x}\|) \leq V(\boldsymbol{x}) \leq \gamma_2(\|\boldsymbol{x}\|), \tag{11a}$$
$$\dot{V}(\boldsymbol{x}) \leq -\gamma_3(\boldsymbol{x}), \quad \forall \|\boldsymbol{x}\| \geq \mu \geq 0 \tag{11b}$$

$\forall t \geq 0$, $\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{D}$를 만족하는 연속적이고 미분 가능한 함수라고 하자. 여기서 $\gamma_i(\cdot)$, $i = 1, 2, 3$는 $[0, r)$에서 정의되는 class K 함수이고 μ는 $\mu < \gamma_2^{-1}(\gamma_1(r))$을 만족한다. 그러면 모든 $\|\boldsymbol{x}(t_0)\| < \gamma_2^{-1}(\gamma_1(r))$에 대해서, 시스템의 상태가

$$\|\boldsymbol{x}(t)\| \leq \beta(\|\boldsymbol{x}(t_0)\|, t - t_0), \quad \forall t_0 \leq t < t_1 \tag{12a}$$
$$\|\boldsymbol{x}(t)\| \leq \gamma_1^{-1}(\gamma_2(\mu)) \quad \forall t \geq t_1 \tag{12b}$$

이 되는 유한 시간, $t_1(\boldsymbol{x}(t_0), \mu)$과 한 class KL 함수, $\beta(\cdot, \cdot)$가 존재한다.

더우기 만일 어떤 양의 상수 k_i와 c에 대해서 $\gamma_i(r) = k_i \cdot r^c$의 형태이면, $k = (k_2/k_1)^{1/c}$과 $\zeta = k_3/k_2 \cdot c$인 k, ζ에 대해서 $\beta(r, s) = k\, r \exp(-\zeta s)$가 된다. class K 함수와 class KL 함수의 정확한 정의는 [9]에서 볼 수 있다.

증명: 자세한 증명은 [9]에서 볼 수 있다. □

이 정리로 부터, 주어진 동적 시스템의 region of attraction(RA)를

$$RA = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n \mid \|\boldsymbol{x}\| < \gamma_2^{-1}(\gamma_1(r))\}$$

로 추정할 수 있다. 물론 위의 정리는 충분 조건의 형식으로 이루어져 있으므로 이러한 RA는 추정할 수 있는 최소한일 뿐이지 RA 바깥의 모든 점들이 이 정리의 결과를 위배한다는 것은 아니다.

위의 정리와 2절의 결과인 식 (10)을 이용하기 위하여, 시스템 (1)에 좌표 변환을 도입한다. 즉 제어 규칙의 UNLP 형태로 부터 나온 매개 변수 $s = \dot{e} + \sigma e$를 이용하고, 제어 입력식 (2)를 대입하면 식 (1)은 다음과 같이 변환된다:

$$\begin{aligned}
\dot{e} &= -\sigma e + s, \\
\dot{s} &= \ddot{x} - \ddot{x}_d + \sigma\dot{e} \\
&= f_n(\boldsymbol{x}) + \Delta(\boldsymbol{x}) + u - \ddot{x}_d + \sigma\dot{e} \\
&= \Delta(\boldsymbol{x}) - \ddot{x}_d + \sigma\dot{e} + k(e,\dot{e}) \\
&= -\eta s + F(\boldsymbol{x}) + k(e,\dot{e}) + \eta s, \quad \eta > 0
\end{aligned}$$

여기서 $F(\boldsymbol{x}) = \Delta(\boldsymbol{x}) - \ddot{x}_d + \sigma\dot{e}$이다. 그리고 이는 벡터적으로

$$\begin{bmatrix} \dot{e} \\ \dot{s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sigma & 1 \\ 0 & -\eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ F(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ k(e,\dot{e}) + \eta s \end{bmatrix} \tag{13}$$

로 쓸 수 있고, $(e, \dot{e})$ 공간과 (e, s) 공간 사이의 좌표 변환은

$$\begin{bmatrix} e \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \sigma & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ \dot{e} \end{bmatrix} \tag{14}$$

이다. 지금 부터 시스템 (13)의 상태 벡터 $[e, s]'$를 원래의 시스템 (1)의 상태 x와 혼동없이 $\boldsymbol{x}$로 쓰겠다. 그리고 다음을 정의하자: $\boldsymbol{F}$를 변환 (14)에 의해서 (e, s) 좌표계로 변환한 것이 영역 $\boldsymbol{F}'$이라고 하고, $\boldsymbol{D}' = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{F}' \mid \|\boldsymbol{x}\| < r\}$을 영역역 $\boldsymbol{F}'$에 속하는 최대 영역이라고 하자. 그리고 식 (10)의 ϕ에 대해서 $\boldsymbol{S}'$을 집합 $\{(e, s) \in \boldsymbol{F}' \mid |s| \geq \phi(k_a, c_{e_i}, c_{De_i})\}$라고 하자. 영역 $\boldsymbol{F}'$, $\boldsymbol{D}'$, 그리고 $\boldsymbol{S}'$을 그림 5 (b)에서 보였다. 다음의 정리와 그의 증명 과정을 통털어서 $\|\cdot\|$는 $\|\cdot\|_2$를 의미한다.

정리 3: 시스템 (13)과 FLC의 특성 (10)을 생각해 보자. 그리고 FLC의 출력 이득을 $G_k \geq F_{\max} + \eta|s|$, $\eta > 0$으로 했다고 하자. 여기서 $F_{\max} = \Delta_{\max} + |-\ddot{x}_d + \sigma\dot{e}|$이다. 또한 $k_a = F_{\max} + \eta|s|$에 대해서 식 (10)의 $\phi(k_a, c_{e_i}, c_{De_i})$는 충분히 작게 설계되어져서 $\boldsymbol{D}' \cap \boldsymbol{S}' \neq \{\}$라

고 하자. 그러면 모든 $\|\boldsymbol{x}(t_0)\| < \sqrt{1/2\eta\sigma}\cdot r$에 대해서 시스템의 해(solution)가

$$\|\boldsymbol{x}(t)\| \le \sqrt{2\eta\sigma}\cdot\|\boldsymbol{x}(t_0)\|\cdot\exp(-\zeta(t-t_0)),\ \forall\ t_0 \le t < t_1,$$
$$\|\boldsymbol{x}(t)\| \le \sqrt{2\eta\sigma}\cdot\delta(\phi),\quad \forall\ t \ge t_1,$$

로 주어지는 유한 시간, $t_1(\boldsymbol{x}(t_0),\phi)$과 양수 ζ과 $\delta(\phi)$가 존재한다.

증명: 이제 다음을 폐루프 제어 시스템의 Lyapunov 함수 후보로 취해보자:

$$V(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}'\boldsymbol{P}\boldsymbol{x} \tag{15}$$

여기서

$$\boldsymbol{P} = \begin{vmatrix} \eta\sigma & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$$

이다.

식 (15)는 양한정(positive definite) 함수이므로, 정의에 의해서 식 (11a)를 만족하는 다음과 같은 class K 함수 $\gamma_i(\cdot)$, $i=1,2$를 얻을 수 있다:

$$\gamma_1(\|\boldsymbol{x}\|) \le \boldsymbol{x}'\boldsymbol{P}\boldsymbol{x} \le \gamma_2(\|\boldsymbol{x}\|) \tag{16}$$

예로서, 즉 $\gamma_1(\|\boldsymbol{x}\|) = \frac{1}{2}\|\boldsymbol{x}\|^2$이고 $\gamma_2(\|\boldsymbol{x}\|) = \eta\sigma\|\boldsymbol{x}\|^2$가 된다. 계수 $\frac{1}{2}$과 $\eta\sigma$는각각 양한정 행렬 $\boldsymbol{P}$의 최소, 최대 고유값(eigen value)이다. 여기서 $\eta\sigma > \frac{1}{2}$이라고 가정하였지만, 그렇지 않을 경우에는 단지 $\gamma_1(\cdot)$과 $\gamma_2(\cdot)$의 계수의 순서만 바뀌면 되므로 일반성을 상실하지 않는다. 식 (15)를 미분하고 시스템식 (13)을 대입하면

$$\begin{aligned}\dot{V}(\boldsymbol{x}) &= \begin{bmatrix} e \\ s \end{bmatrix}' 2\boldsymbol{P}\begin{bmatrix} \dot{e} \\ \dot{s} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e \\ s \end{bmatrix}' 2\boldsymbol{P}\cdot\begin{bmatrix} -\sigma & 1 \\ 0 & -\eta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e \\ s \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} e \\ s \end{bmatrix}' 2\boldsymbol{P}\cdot\begin{bmatrix} 0 \\ F(\boldsymbol{x}) + k(e,\dot{e}) + \eta s \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e \\ s \end{bmatrix}' \boldsymbol{A}\begin{bmatrix} e \\ s \end{bmatrix} + s\cdot\{F(\boldsymbol{x}) + k(e,\dot{e}) - \eta s\},\end{aligned} \tag{17}$$

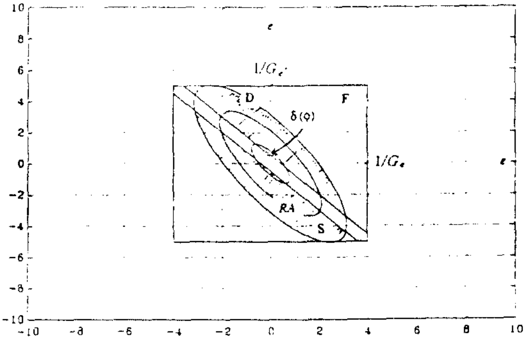
을 얻게된다. 여기서 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -2\eta\sigma^2 & 2\eta\sigma \\ 0 & -\eta \end{bmatrix}$ 이다.

행렬 $\boldsymbol{A}$가 음한정(negative definite)이므로 $\dot{V}(\boldsymbol{x})$이

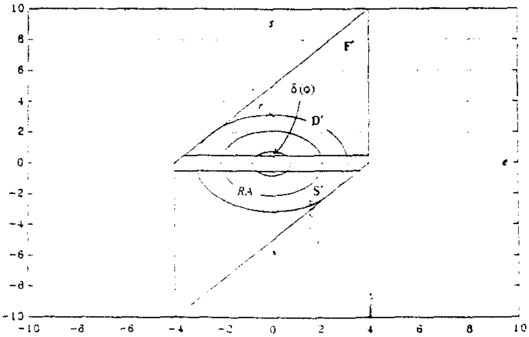
$$\dot{V}(\boldsymbol{x}) \le -\gamma(\|\boldsymbol{x}\|) - s\cdot\{F(\boldsymbol{x}) + k(e,\dot{e}) + \eta s\}\quad \forall\ \boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^2 \tag{18}$$

이 되는 class K 함수 $\gamma(\|\boldsymbol{x}\|) = k_3'\cdot\|\boldsymbol{x}\|_2^2$, $k_3' > 0$가 존재한다. 여기서 k_3'은 대칭성(symmetric)을 갖는 양한정 행렬, $-\frac{A'+A}{2}$의 최소 고유값(minimum eigen value)이 된다

이제 만일 $|s| \ge \phi$이면, $k(e,\dot{e})$는 $k_\sigma = F_{max} + \eta|s|$에 대해서 식 (10)으로 쓰여질 수 있다. 그러므로 식 (18)과 $F_{max} \ge |F(\boldsymbol{x})|$, $\forall\ \boldsymbol{x}$이라는 사실로 부터 다음을 얻을 수 있다:



(a) 위상 공간 $(e,\dot{e})$에서
(a) in $(e,\dot{e})$ phase plane



(b) 위상 공간 (e,s)에서
(b) in (e,s) phase plane

그림 5. 영역 $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{D}$, 그리고 $\boldsymbol{S}$
Fig. 5. Regions $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{D}$, and $\boldsymbol{S}$

$$\begin{aligned}(18) &= -\gamma(\|\boldsymbol{x}\|) + s\cdot\{F(\boldsymbol{x}) + \eta s\} + s\cdot -k_f\frac{s}{|s|} \\ &\le -\gamma(\|\boldsymbol{x}\|) + s\cdot\{F(\boldsymbol{x}) + \eta s\} + s\cdot -k_s\frac{s}{|s|} \\ &= -\gamma(\|\boldsymbol{x}\|) + s\cdot\{F(\boldsymbol{x}) + \eta s\} - \{F_{max} + \eta|s|\}\cdot|s| \\ &\le -\gamma(\|\boldsymbol{x}\|),\quad \forall\ \boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^2\end{aligned} \tag{19a}$$

또한 만일 $|s| < \phi$이면, 식 (18)과 $|k(e,\dot{e})| \le G_k$, $\forall\ (e,\dot{e})\in\boldsymbol{R}^2$라는 사실로 부터

$$\begin{aligned}\dot{V}(\boldsymbol{x}) &\le -\gamma(\|\boldsymbol{x}\|) + s\cdot\{F(\boldsymbol{x}) + \eta s + k(e,\dot{e})\} \\ &\le -\gamma(\|\boldsymbol{x}\|) + \phi(F_{max} + \eta\phi + G_k) \\ &= -(1-\rho)\gamma(\|\boldsymbol{x}\|) - \rho\gamma(\|\boldsymbol{x}\|) \\ &\qquad + \phi(F_{max} + \eta\phi + G_k)\quad 0 < \rho < 1 \\ &\le -(1-\rho)\gamma(\|\boldsymbol{x}\|), \\ &\qquad \|\boldsymbol{x}\| \ge \gamma^{-1}(\phi(F_{max} + \eta\phi + G_k)/\rho)\text{에서.}\end{aligned} \tag{19b}$$

가 된다. 여기서 $\delta(\phi) = \gamma^{-1}(\phi(F_{max} + \eta\phi + G_k)/\rho)$를 정의하자. 위의 두 경우에 대한 종합으로서, 정리 2에서의 $\gamma_3(\cdot)$를

$$\gamma_3(\|\boldsymbol{x}\|) = (1-\rho)\gamma(\|\boldsymbol{x}\|) = k_3 \cdot \|\boldsymbol{x}\|^2, \quad (20)$$

$k_3 = (1-\rho)k_3' > 0$로 잡으면,

$$\dot{V}(\boldsymbol{x}) \le -\gamma_3(\|\boldsymbol{x}\|), \quad \forall \|\boldsymbol{x}\| \ge \delta(\phi) > 0, \ \forall \ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{D}'$$

임을 얻게 된다. 더우기 여기서 얻은 $\gamma_i(\cdot)$, $i = 1, 2, 3$ 가 식 (16)과 (20)에서 보듯이, $k_1 = \frac{1}{2}$, $k_2 = \eta\sigma$, $k_3 > 0$, 그리고 $c = 2$에 대해서 $\gamma_i(r) = k_i \cdot r^c$로쓰여질 수 있으므로, 정리 2에서와 같은 class KL 함수 $\beta(\cdot,\cdot)$는 다음과 같이 주어진다:

$$\beta(r, s) = \left(\frac{k_2}{k_1}\right)^{\frac{1}{c}} r \exp\left(-\frac{k_3}{k_2 c} \cdot s\right) = \sqrt{2\eta\sigma} \cdot r \cdot \exp(-\zeta \cdot s).$$

여기서 $\zeta = \frac{k_3}{k_2 c} = \frac{k_3}{2\eta\sigma} > 0$이다.

그러므로 정리 2에 의해서 퍼지 제어 시스템의 해(solution trajectory)는 모든 $\|\boldsymbol{x}(t_0)\| < \gamma_1^{-1}(\gamma_2(r)) = \sqrt{1/2\eta\sigma} \cdot r$에 대해서

$$\|\boldsymbol{x}(t)\| \le \sqrt{2\eta\sigma} \cdot \|\boldsymbol{x}(t_0)\| \cdot \exp(-k_3(t-t_0)), \quad k_3 > 0, \ \forall \ t_0 \le t < t_1,$$
$$\|\boldsymbol{x}(t)\| \le \gamma_1^{-1}(\gamma_2(\delta(\phi))) = \sqrt{2\eta\sigma} \cdot \delta(\phi), \quad \forall \ t \ge t_1,$$

로 주어진다고 결론지을 수 있다. □

정리에서 사용된 $\phi(k_\alpha, c_{e_i}, c_{De_i})$에 대한 가정은 다음에서[10] 보다 구체적인 방법으로 정당화될 것이다. 이해를 돕기 위해서 (e, s) 공간에서의 영역 $\boldsymbol{D}'$, $\boldsymbol{S}'$, $\delta(\phi)$, 그리고 RA를 $(e, \dot{e})$로 변환하고 이를 그림 5 (a)에 보였다. 여기서 RA는 (e, s) 공간에서 $\{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^2 | \|\boldsymbol{x}\| < \sqrt{1/2\eta\sigma} \cdot r\}$으로 추정할 수 있다. 한가지 주의할 것은 $\delta(\phi)$가 상태 변수들에 대한 함수라는 것이다. 이를 $\delta(\phi, \boldsymbol{x})$로 나타낸다. 그러므로 ultimate bound는 본 정리의 결과식으로 부터 다음과 같이 구할 수 있다: 즉 $\|\boldsymbol{x}^\star\| = \sqrt{2\eta\sigma} \cdot \delta(\phi, \boldsymbol{x}^\star)$인 $\boldsymbol{x}^\star$에 대해서 ultimate bound는 $\{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^2 | \|\boldsymbol{x}\| < \|\boldsymbol{x}^\star\|\}$이다. 이에 대한 설명을 그림 6에 나타내었다. 그리고 이영역 RA와 ultimate bound를 그림 5 (a), (b)의 위상 평면에 같이 나타내었다. 이러한 경우, 폐루프 제어 시스템이 uniformly ultimately bounded된다라고 말한다. 더우기 만일 G_c과 G_e를 임의로 작게 잡아서, $\boldsymbol{F}$가 오차 위상 평면의 전 영역에 걸치도록 하면, 폐루프 제어 시스템은 globally uniformly ultimately bounded라고 말할 수 있다. 만약 제어 입력 (2)에서 공칭 동력학 보상항인 $-f_n(x)$가 0이라도, 본 정리에서의 해석은 성립하게 되며 단지 출력 이득값, G_k만 다음과 같이 증가하게 된다:

$$G_k = \Delta_{\max} + \sup_x |f(x)| + |-\ddot{x}_d + \sigma\dot{e}| + \eta s.$$

이 경우, 제어 입력 (2)는 보상기가 없는 순수한 FLC가 된다.

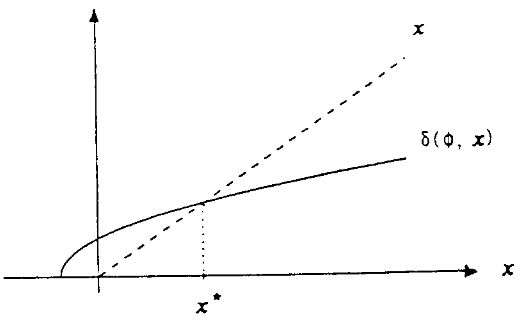


그림 6. Ultimate bound의 크기
Fig. 6. Magnitude of the ultimate bound.

Ⅳ. 몇 가지 고려해야 할 사항들

앞에서 제안한 설계와 해석의 방식이 FLC의 강인성이나 안정성을 잘 설명해 주기는 하지만, 다음의 몇 가지 점들은 보다 더 명확히 설명되어져야 할 사항들이다: 그것은 (i) 대상 시스템을 본문에서의 식 (1)과 같은 단일 입력의 2차 시스템으로 하였는데, 일반적으로 3차 이상의 고차인 시스템에도 같은 논리를 적용할 수 있는 지에 관한 것과, (ii) 정리 3에서 보듯, FLC의 출력 이득, G_k가 시간에 의존하는 형태인데, 이를 보다 일반적인 FLC 처럼 시간에 대해서 고정되도록 설계할 수는 없는 지 하는 것등이다. 본문중에서는 FLC의 특성을 설명하기 위해서 문제를 단순화시켜서 생각하였지만, 여기서는 가능한한 일반화시켜서 FLC의 적용 가능성을 높이는데 목적을 두도록 하겠다.

1. 고차 시스템에 대한 적용 가능성

대상 시스템이 3차 이상의 고차이더라도 n축 다관절형 로봇의 동력학 식 (21) 처럼 궤환 선형화(feedback linearization)에 의해서 n개의 2차 미분 방정식으로 분리(decoupling)될 수 있는 시스템의 경우에는 단순히 n개 각각의 미분 방정식을 시스템 식 (1)로 보고, n개의 FLC를 설계하면 된다. 물론 이 경우 n장(page)의 제어 규칙표를 갖게 될 것이다.

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\theta})\ddot{\boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) = \tau \quad (21)$$

$\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}, \ddot{\boldsymbol{\theta}} \in \boldsymbol{R}^n$, $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\theta})$ 는 관성행렬, $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\theta})$는 중력과 코리올리항대부분의 기계류에 대해서는 그의 동력 학 표현이 위치(x), 속도($\dot{x}$), 그리고 가속도($\ddot{x}$)의 상태

변수만으로 이루어 지므로, n개의 미분 방정식으로의 분리가 가능하다.

한편, 전기 회로등에서 처럼 분리되지 않는 고차의 미분 방정식 (22)의 형태로 그의 행동이 기술되는 경우는 본문에서 적용한 논리를 다음과 같이 확장할 수 있다.

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + a_{n-2}x^{(n-2)} + \ldots + a_1 x^{(0)} + \Delta(\mathbf{x}) + f(\mathbf{x}) = u \qquad (22)$$

2차의 대상 시스템에 대해서는 2차의 오차 위상 공간상에서 FLC가 안정한 직선 $s = \dot{e} + \sigma e = 0,\ \sigma > 0$을 중심으로 UNLP 형태의 제어 규칙을 가졌던 것처럼, 이 경우는 n차의 오차 위상 공간상에서 안정한 초평면(hyper plane)을 중심으로 UNLP 형태의 제어 규칙을 가지면 된다. n차 공간에서 안정한 초평면의 하나는

$$s = \left(\frac{d}{dt} + \sigma\right)^{n-1} \cdot e = 0,\quad \sigma > 0 \qquad (23)$$

의 형식이다[11]. 예로써 $n = 3$인 경우, 식 (23)은

$$s = \ddot{e} + 2\sigma \dot{e} + \sigma^2 e = 0$$

이 되고, 이는 3차 공간상에서 원점을 지나는 한 평면이다.

2. 출력 이득 G_k의 시간 의존성에 관한 문제

III 장의 정리 3에서 출력 이득의 조건, $G_k \geq F_{\max} + \eta|s|,\ \eta > 0$을 생각하자. 여기서 $F_{\max} = \Delta_{\max} + |-\ddot{x}_d + \sigma \dot{e}|$, 그리고 $\Delta_{\max} = \sup_{\mathbf{x}} |\Delta(\mathbf{x})|$이다. 이 조건은 출력 이득이 어떤 값보다 크다는 형식으로 이루어져 있으므로 필요한 모든 요인을 고려하여 최대한 크게 하면 어떻든 ultimate boundedness를 위한 조건은 만족시킨다고 볼 수 있다. 또한 보통 regulating 문제인 경우, $\ddot{x}_d$는 0이고 정상 상태 부근에서 $\dot{e} \approx 0,\ s \approx 0$이므로 조건은 $G_k \geq \Delta_{\max}$가 되어, 곧 시간에 대해 독립적인 상수가 된다. 흔히 비례 미분 제어기와 FLC를 비교하는 실험등에서 계단 입력(step input)에 대한 과도 응답(transient response)과 regulating 성능을 말할 때, FLC의 성능은 이와 같은 방법으로 설명될 수 있다. 즉 계단과 입력, 혹은 원하는 궤적의 속도가 충분히 느린 입력이 주어지는 경우에는, 고정 출력 이득을 갖는 일반적인 FLC의 성능(performance)을 앞의 정리 3과 본 절의 설명으로 이해할 수 있다는 것이다.

한편 궤적 추종(tracking) 문제인 경우에는 출력 이득의 시간 의존성을 배재하기 위해서 다음의 방법을 생각해 볼 수 있다. 지금 제어 입력식 (2) 대신 다음을 대상 시스템 (1)에 적용한다고 하자:

$$u = \ddot{x}_d - \sigma \dot{e} - \eta s - f_n(\mathbf{x}) + k(e, \dot{e}),\quad \eta > 0 \qquad (24)$$

그러면 정리 3과 같은 절차를 거쳐서, 퍼지 제어 시스템이 ultimately bounded되기 위한 조건은

$$G_k \geq \Delta_{\max}$$

임을 얻게 된다. 이는 일반적인 FLC의 경우 처럼, 시간 t에 독립적인 상수이다. 물론 이 경우, 순수한 FLC, $k(e, \dot{e})$외에 식 (24)에서 보듯이 비례 미적분 제어기 형식을 만들어 주는 항들이 더 들어가야 한다.

V. 결 론

본 논문에서는 UNLP 형태의 제어 규칙을 갖는 FLC의 출력과 가변 구조 제어기의 출력 특성 사이의 유사성에 착안하여 FLC의 출력을 그의 설계 요소들에 의해서 주어지는 오차 위상 평면상의 안정한 매개 변수 $s = \dot{e} + \sigma e$에 대해서 재편성할 수 있음을 보이고, 이로부터 잘 알려진 Lyapunov의 정리에 기반하여 불확실성이 있는 비선형 동적 시스템을 위한 FLC의 제어 이론적인 해석의 결과를 제시하였다. 이를 위하여 주어진 시스템을 매개 변수 s에 대해서 좌표 변환하는 기법을 도입하였으며, 또한 실제 구현시 오차 위상 평면의 제한된 영역에서만 FLC가 정의될 때, Region of Attraction(RA)도 구하였다. 해석의 결과는 FLC가 최대값이 알려진 불확실성이 있는 시스템에 대해서 강인한 제어기임을 말해주며, 이는 보통 정성적으로, 혹은 단지 시뮬레이션을 통해서만 보여지던 FLC의 성능을 구체적으로 보장하는 것이 된다.

부록 1-1

성질 2-1에 대한 증명: 변환 (4-1)과 (4-2)가 선형적이므로, 증명은 실제 오차 위상 평면이 아니라 정규화된 오차 위상 평면에서 행해져도 된다. 이 성질 2-1 은다음과 같이 정규화된 오차 위상 평면의 것으로 바뀌어 질 수 있다: 정규화된 오오차 위상 평면의 아랫변, 즉 $B_n = \{(e_n, \dot{e}_n) \mid |e_n| \leq 1,\ \dot{e}_n = -1\}$을 생각하자. $k_{n,a} \in [0, 1]$ 인 임의의 $k_{n,a}$에 대해서 $k_n(e_n, \dot{e}_n)$의 값이 $k_n(e_n, \dot{e}_n)|_{B'_n} > k_{n,a}$, $B'_n \subset B_n$, $B'_n = \{(e_n, \dot{e}_n) \mid -1 \leq e_n \leq e_{n,b},\ \dot{e}_n = -1\}$가 되는 한점 $e_{n,b} \in (-1, 1)$가 존재한다.

증명: 모든 $(e_n, \dot{e}_n) \in B_n$에서 $\mu_{De_1} = 1$이고 $\mu_{De_i} = 0$, $i = 2, \ldots, 5$이므로, 활성화되는 제어 규칙은 다음과 같이 표 2의 5번째 행의 것들이 된다:

If e_n is NBE and $\dot{e}_n$ is NBDE, then k_n is PBK.
If e_n is NSE and $\dot{e}_n$ is NBDE, then k_n is PBK.
If e_n is ZRE and $\dot{e}_n$ is NBDE, then k_n is PBK.
If e_n is PSE and $\dot{e}_n$ is NBDE, then k_n is PBK.
If e_n is PBE and $\dot{e}_n$ is NBDE, then k is ZRK.

그런데 $\mu_{NBDE}(\dot{e}_n)|_{B_n} = 1 \geq \mu_{e_i}(\cdot), i = 1, \ldots, 5, \forall (e_n, \dot{e}_n) \in B_n$이므로, $\min(\mu_{e_i}(\cdot), \mu_{NBDE}(\cdot)) = \mu_{e_i}(\cdot), i = 1, \ldots, 5$ 이고, 따라서 max-min 추론 방법으로 부터 출력 퍼지 집합들의 적합도는 다음과 같이 된다:

$$\mu_{PBK} = \mu_{k_1} = \max_{1 \leq i \leq 4} (\mu_{e_i}(e_n)),$$

$$\mu_{ZRK} = \mu_{k_2} = \mu_{e_5}(e_n),$$

$$\mu_{k_i} = 0, \quad i = 1, 2, 4, \quad \forall (e_n, \dot{e}_n) \in B_n.$$

그러므로 cog 비퍼지화 방법으로 부터

$$k_n(e_n, \dot{e}_n) = \frac{c_{PBK}\mu_{PBK} + c_{ZRK}\mu_{ZRK}}{\mu_{PBK} + \mu_{ZRK}}$$

$$= \frac{\mu_{PBK} + c_{ZRK}\mu_{ZRK}}{\mu_{PBK} + \mu_{ZRK}}$$

를 얻고, 이의 크기는 B_n 상에서 $0 \leq k_n \leq 1$이 된다. 그러므로 잘 알려진 중간값의 정리로 부터, 본 성질을 만족시키는 $e_{n,b} \in B_n$가 존재함을 알 수 있다.

식 (4a)와 (4b)로 부터, $e_b = \frac{1}{G_e} \cdot e_{b,n}$이고, $k_a = G_k \cdot k_{a,n}$이 된다. □

부록 1-2

성질 2-2의 증명: F의 왼쪽 변은 표 2의 첫번째 열에 대응한다. 제어 규칙표를 살펴보면, 첫번째 열과 다섯번째 행에 있는 제어 규칙들의 후건부가 모두 같음을볼 수 있다. 그러므로 성질 2-1의 증명에서 e_n을 $\dot{e}_n$으로, 그리고 $\dot{e}_n$을 e_n로 대치하므로써, 이 성질을 쉽게 증명할 수 있다. □

부록 2-1

성질 3-1의 증명: 제어 규칙표의 다섯번째 행과 첫번째 열과의 유사성으로 부터, 성질 2-2의 증명에서 PBK를 NBK로 대치하므로써 이 성질은 쉽게 증명될 수 있다. □

부록 2-2

성질 3-2의 증명: 제어 규칙표의 첫번째 열과 다섯번째 열의 유사성으로 부터,성질 2-2의 증명에서 e_n를 $\dot{e}_n$로, 그리고 $\dot{e}_n$를 e_n로 대치하므로써, 이 성질을 쉽게 증명할 수 있다. □

참 고 문 헌

[1] W. J. M. Kickert and E. H. Mamdani, "Analysis of a Fuzzy Logic Controller", *International Journals for Fuzzy Sets and Systems*, vol. 1, pp. 29-44, 1978.

[2] H. Kang, *Intelligent/Adaptive Controller Strategies for Robot Manipulators*, Ph. D. thesis, Georgia Institute of Technology, 1989.

[3] Witold Pedrycz, *Fuzzy Control and Fuzzy Systems*, Research Studies Press, 1989.

[4] Brian Feeny, "Positioning an Elastic Arm by Using Fuzzy Method", *Proc. of IFSA*, Seoul, pp. 1023-1026, 1994.

[5] Soo-Yeong Yi and Myung-Jin Chung, "Design of a Fuzzy Logic Controller for Robot Manipulators in the VSS Control Scheme", *Proc. of IFSA*, Seoul, pp. 1207-1210, 1993.

[6] Soo-Yeong Yi and Myung-Jin Chung, "Stability Analysis of a Fuzzy Logic Controller for an Uncertain Dynamic System", *Proc. of IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, Florida, pp. 1028 ~ 1034, 1994.

[7] Rainer Palm, "Sliding Mode Fuzzy Control", *Proc. of IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, San Diego, pp. 519-526, 1992.

[8] Arch W. Naylor and George R. Sell, *Linear Operator Theory in Engineering and Science*, Springer-Verlag, 1982.

[9] Hassan K. Khalil, *Nonlinear Systems*, Macmillan, 1992.

[10] Soo-Yeong Yi and Myung-Jin Chung, "Systematic Design of an FLC and magnitude of the boundary layer", *Journal of KITE*, (to appear).

[11] Jean-Jacques E. Slotine and Weiping Li, *Applied Nonlinear Control*, Prentice-Hall International, 1991.

저 자 소 개

李 壽 榮(正會員)
1964년 10월 2일생. 1988년 2월 연세대학교 전자공학과 졸업(공학사). 1990년 2월 한국과학기술원(KAIST) 전기 및 전자공학과 석사학위 취득. 1994년 8월 한국 과학기술원(KAIST) 전기 및 전자 공학과 박사학위 취득. 현재 한국과학기술연구원(KIST) 기전 연구부 Post Doc. 주관심분야는 지능 제어, 로봇 제어 이론등임.

鄭 明 振(正會員) 第 20卷 第 3號 參照
현재 한국과학기술원(KAIST) 전기 및 전자공학과 교수