

## 등밀도 수로흐름에서의 난류모형 비교

李鍾贊\* · 崔秉昊\*\*

\*韓國海洋研究所 海洋工學部

\*\*成均館大學校 土木工學科

## Comparison of Turbulence Models in Homogeneous Channel Flows

JONG CHAN LEE\* AND BYUNG HO CHOI\*\*

\*Ocean Engineering Division, Korea Ocean Research and Development Institute,  
Ansan P.O. Box 29, 425-600, Korea

\*\*Department of Civil Engineering, Sung Kyun Kwan University, Suwon Campus, Suwon, Korea

Blumberg와 Mellor(1987)의 2 방정식 난류모형, Blackadar(1962)의 1 산정식을 이용한 1 방정식 난류모형 및 Prandtl(1925)의 혼합거리식을 이용한 0 방정식 난류모형을 일련의 등밀도 문제에 적용·비교하였다. 구체적으로 일정유량이 주어진 수심이 급변하는 수로의 흐름, 유한수로에서의 조류의 연직구조 및 일정수심 수로에서의 정상상태 취송류 문제에 대하여 비교되었다.

불규칙한 수심에 일정유량이 주어진 수로 흐름 및 점도형을 이용한 조류의 수치실험에서는 적용된 난류모형 모두 거의 비슷한 결과를 보였으며, 비교적 관측된 유속구조와 부합하는 좋은 결과를 보였다. 그러나 정상상태의 취송류 경우에는 2 방정식만이 관측된 유속과 부합하는 유속구조를 재현하였으며, Blackadar의 1 산정식을 이용한 1, 0 방정식 난류모형은 수면근처의 유속을 관측치보다 작게 계산하였다. 이류형 및 수평확산항의 영향이 작은 조류 및 취송류의 경우, 2 방정식 난류모형에 의한 연직와점성계수 및 특성길이의 연직분포는 중간수심에서 최대값을 갖는 포물형이었으며, Blackadar의 1 산정식을 사용한 1, 0 방정식 난류모형에 의한 연직와점성계수 및 혼합특성길이의 연직분포는 수면에서 최대인 선형에 가까웠다.

In this paper three turbulence models including two-equation model by Blumberg and Mellor (1987), one-equation model with mixing length formula of Blackadar's (1962), and zero-equation model of Prandtl's (1925) were compared in homogeneous, unstratified channel flows. Steady flows which a steep-sided trapezoidal trench with uniform discharge, tidal flow and steady wind-driven flow in finite channels are considered in detail.

Steady flows in a trench and tidal flows in a finite channel were reproduced fairly accurately and there was virtually no difference among results of three turbulence models. However, in case of steady wind-driven flow only two-equation model reproduced the important features of experimental data. The other two models underestimated the surface velocity. In tidal and wind-driven flows with negligibly small advective and diffusive effects, the two-equation model gives rise to parabolic profile of eddy viscosity with maximum at the mid-depth, and the one and zero equation model based on Blackadar formula linear profile with maximum at the surface.

### 서 론

최근 컴퓨터의 성능향상과 더불어 3차원 동수역학

방정식을 직접 수치적분하는 시도가 다양하게 행해지고 있다(Mellor와 Blumberg(1987), Backhaus 등(1987), 최와 서(1992), 정(1994) 등). 3차원 수치모

형을 구분하는 유력한 방법의 하나는 연직 와점성계수( $K_M$ )의 산정방법에 따르는 것으로, 연직와점성계수를 대상해역의 유동특성으로부터 경험적으로 결정하는 모형과 적절한 방정식을 도입하여 유동장과 연계시켜 해석하는 모형으로 구분할 수 있다 (Cheng과 Smith(1989)).

경험적 모형은 0 방정식 난류모형으로 불리우며 간단한 함수형태로 연직 와점성계수를 정의한다. 연직와점성계수  $K_M$ 에 대한 유속의 연직구조는 주로 취송류에 대하여 해석적인 연구가 이루어졌으며 (Ekman(1905), Welander(1957), Thomas(1975), Witten과 Thomas(1976), Madsen(1977) 등), 이와 최 (1994)에서는 연직 와점성계수가 간단한 함수형태로 주어진 경우에 대한 유속구조를 해석해와 비교·검토하였다. 그러나 연직 와점성계수의 복잡한 물리성 때문에 이를 대상해역의 유동특성으로부터 결정하는 이 경험적 방법은 분명한 한계를 갖고 있다.

범용성 확장을 이유로 1970년 후반부터 난류방정식에 근거한 모형이 개발되기 시작하였으며 이에는 난류 운동에너지에 대한 亂流模型(1 방정식), 난류의 운동에너지와 난류 운동에너지의 감쇄율에 대한 난류모형(k- $\epsilon$ 모형), 난류의 운동에너지와 난류 특성길이(난류거시거리)에 대한 난류모형(k-l모형) 등이 있다. 난류모형의 특성 및 연구동향에 대해서는 Rodi(1984), ASCE Task Committee(1988)에 잘 정리되어 있다.

이상적으로 난류모형은  $K_M$ 의 결정에 사용되는 媒介變數들을 거의 수정없이 사용하여 유동특성을 적절히 재현할 수 있어야 하나 현재 연구자에 따라 각기 다른 난류모형을 사용하고 있는 실정으로(Alfrink와 Rijn(1983), Mofjeld와 Lavelle(1984), King 등(1985), Davies와 Jones(1987), Blumberg와 Mellor(1987)) 지속적인 개선이 요구되고 있는 실정이다. 그러한 노력의 일환으로 본 연구에서는 등밀도 문제에 있어 연직와점성계수  $K_M$ 을 결정하는데 다른 난류모형이 적용되었을 경우 그 유동특성이 어떻게 나타나는지를 일련의 수치실험을 통하여 비교·검토하였다. 고려된 난류모형은 Prandtl(1925)의 혼합거리식(mixing length)을 사용한 0 방정식 난류모형, 난류에너지(turbulence energy) 방정식만을 고려한 1 방정식 난류모형(k model), 난류에너지 방정식과 특성길이(length scale, turbulence macroscale)를

고려한 2 방정식 난류모형(k-l model)이다.

난류모형의 비교에 사용된 일련의 수치실험을 요약하면 다음과 같다. 불규칙한 水深의 1차원 水路에 일정유량이 주어진 경우의 실험실 자료(Koutitas, 1987)인 유속의 연직분포와 전단응력의 연직분포를 2, 1, 0 방정식 난류모형 결과와 비교하였다. 해수면의 주기적 변화에 의해 형성되는 흐름, 즉 潮流의 경우 1차원 유한수로의 흐름으로 단순화한 후, 점모형을 적용하여 조류의 연직구조를 수치계산하여 Wolf(1980)의 관측치와 비교·논의하였다. 균일수심하의 1차원 수로에 일정한 바람이 분 정상상태의 吹送流(Pearce와 Cooper, 1981)에 대한 실험실 자료인 유속의 연직분포와 각각의 난류모형에 의한 유속의 연직구조가 비교되었으며, 이와함께 연직와점성계수의 연직분포가 논의되었다.

## 난류방정식

수심적분된 2차원 수치모형의 경우는 유속의 연직구조를 무시하였기 때문에 海底面의 底面摩擦應力을 어떻게 정의하느냐가 중요하나 3차원 수치모형의 경우에는 해수면과 해저면의 경계조건 뿐만 아니라 운동방정식의 鉛直方向 擴散項에 나타난 연직 와점성계수  $K_M$ 을 어떻게 계산할 것인가 하는 문제가 제기된다. 본논문에서는 운동방정식에 포함된  $K_M$ 을 구하기 위한 微分方程式의 갯수를 달리하는 3 모형(0 방정식, 1 방정식 및 2 방정식 난류모형)이 검토된다. 편의상 2, 1, 0 방정식 순으로 살펴보았다.

### 1. 2 방정식 k-l 난류모형

2 방정식 난류모형에서  $K_M$ 은 다음식과 같이 주어진다(Mellor와 Yamada(1982), Blumberg와 Mellor(1987)).

$$K_M = l \cdot q \cdot S_M \quad (1)$$

여기서  $l$ 은 특성길이(macro scale, or mixing length),  $q^2/2$ 은 난류운동에너지(turbulence kinetic energy)로 난류모형에서는 보통은  $k$ 로 표기되며,  $q^2 = u'^2 + v'^2 + w'^2$ ,  $u'$ ,  $v'$ ,  $w'$ 은 난류유속(fluctuating or turbulent velocity),  $S_M$ 은 무차원의 안정계수이다.

2 방정식 난류모형은 난류에너지  $q^2$ 과 특성길이  $l$ 의 시·공간적 변화를 고려하기 위하여 난류에너지

와 특성길이의 결정에 미분방정식을 사용한다. 난류에너지에 관한 미분방정식은 연구자에 따라 약간씩 다르기도 하며(Rodi(1980), Johns와 Oguz(1987)), 특히 특성길이를 포함하는 방정식( $q^2 l$ , 또는  $\varepsilon=q^3/l$ )은 난류에너지 방정식보다도 많은 經驗常數들을 포함한다.

본 연구에서는 Mellor와 Blumberg(1987)의 난류방정식을 사용하였다. 즉

$$\frac{\partial q^2}{\partial t} + u \frac{\partial q^2}{\partial x} + v \frac{\partial q^2}{\partial y} + w \frac{\partial q^2}{\partial z} = 2K_M \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left( K_v \frac{\partial q^2}{\partial z} \right) - \frac{2q^3}{B_1 l} + F_q \quad (2)$$

$$\frac{\partial q^2 l}{\partial t} + u \frac{\partial q^2 l}{\partial x} + v \frac{\partial q^2 l}{\partial y} + w \frac{\partial q^2 l}{\partial z} = l E_1 K_M \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left( K_v \frac{\partial q^2}{\partial z} \right) - \frac{q^3}{B_1} \bar{W} + F_l \quad (3)$$

상기 난류방정식에 대한 해수표면, 해저면에서의 경계조건은 다음과 같다.

$$q^2|_{\xi} = B_1^{\frac{2}{3}} u_s^2, \quad q^2|_{-\kappa} = B_1^{\frac{2}{3}} u_b^2 \quad (4a)$$

$$q^2|_{\xi} = 0, \quad q^2|_{-\kappa} = 0 \quad (4b)$$

여기서  $t$ 는 시간,  $x, y$ 는 수평 직교좌표,  $z$ 는  $xy$ 평면에 수직인 천정방향을 양으로 하는 연직좌표,  $u, v, w$ 는 각각  $x, y, z$  방향의 유속,  $z = \xi(x, y)$ 는 자유수면,  $z = -h(x, y)$ 는 저면,  $u_s$ 는 표면마찰속도,  $u_b$ 는 저면마찰속도,  $F_q, F_l$ 은 각각 수평방향의 확산항이며,  $\bar{W}$ 는 Wall proximity function으로  $\bar{W} = 1 + E_2(l/\kappa L)$ ,  $L^{-1} = (\xi - z)^{-1} + (h + z)^{-1}$ ,  $\kappa$ 는 karman 상수 ( $=0.4$ )이며,  $K_v = l \cdot q \cdot S_q$ ,  $S_q = 0.2$ , 사용된 상수값은 ( $B_1, E_1, E_2$ ) = (16.6, 1.8, 1.33)이다.

### 2. 1 방정식 난류모형

1 방정식 난류모형은 특성길이의 결정에 미분방정식을 해석하는 대신 다른 산술식을 사용하여  $l$ 을 구한다. 본 연구에서는 많은 연구자(Mellor와 Yamada(1982), Mofjeld와 Lavelle(1984), Davies와 Jones(1987))에 의해 사용된 Blackadar(1962)의 혼합

거리식을 사용하여  $l$ 을 구하였다. 즉

$$l = l_0 \frac{\kappa \dot{z}}{l_0 + \kappa \dot{z}} \quad (5)$$

여기서  $\dot{z}$ 은 저면으로부터의 거리,  $l_0$ 는  $l$ 의 극한값(asymptotic value)이다.

Mellor와 Yamada(1982), Mofjeld와 Lavelle(1984) 등이 사용한 바와같이, 계산된 난류에너지를 이용하여  $l_0$ 를 다음과 같이 구할 수 있으며,

$$l_0 = \gamma \int_{z_0}^h q^2 dz / \int_{z_0}^h q dz \quad (6)$$

$\gamma$ 는 혼합거리의 매개변수로 제시된 값들은 0.05, 0.1, 0.2, 0.3 등이 있으나, Mofjeld와 Lavelle(1984)는 관측된  $M_2$  조류의 연직구조를 난류모형으로 재현할 경우  $\gamma$  값으로 0.18~0.2를 추천하였다. 본 연구에서는  $\gamma = 0.2$ 를 사용하였다.

이와는 달리 Vager와 Kagan(1969)은 조류 계산에 있어  $l$  산정식으로 다음식을 제안하였다.

$$l = \kappa q \left[ \int_{z_0}^z q^{-1} dz + z_0 q_0^{-1} \right] \quad (7)$$

여기서  $z_0$ 는 조도 높이(roughness height),  $q_0$ 는 해저면( $z = z_0$ )에서의 난류 에너지이다.

Johns(1978), King 등(1985)은 조석에 의한 유동장의 특성길이를 구하는데 식 (7)을 사용하였다. 반면 Davies와 Jones(1987)는 조류 계산에 Vager와 Kagan(1969)의 식을 사용할 경우, 모형에 의해 계산되는  $K_M$ 의 최대값이 실측된  $K_M$ 과는 다른 연직구조를 보인다고 지적하고, 실측된 중간수심 이하에서 최대값을 갖는  $K_M$ 의 연직구조를 얻기 위하여 식 (5)와 식 (6)을 사용하였으며, Wolf(1980)의 관측된 전단응력으로부터 유추하여 이러한  $K_M$ 의 연직구조가 물리적으로 타당하다 하였다. 따라서 본 연구에서도 식 (5), 식 (6)을 사용하여  $K_M$ 을 계산하였다.

### 3. 0 방정식 난류모형

0 방정식은  $K_M$ 을 직접적으로 유속장과 관련된 산술식으로 계산한다.  $K_M$ 자체가 주어진 경우는 범용성을 갖지 못하므로 배제하였으며, 조류계산에 사용하는  $K_M = cH\bar{u}$  또는  $c\bar{u}^2$  (Davies, 1987), 최송

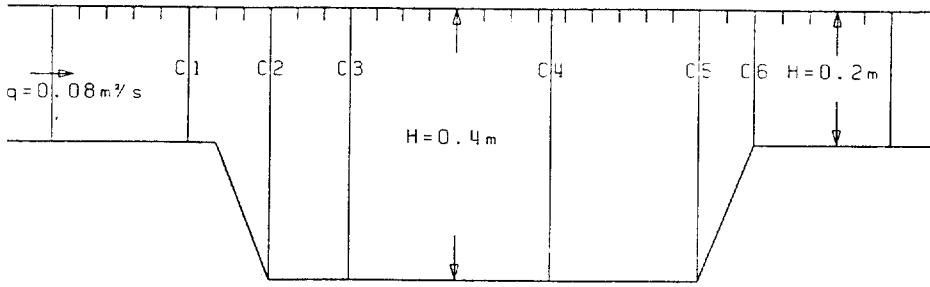


Fig. 1. Flow domain configuration and measuring stations.

류의 경우  $K_M = cHu_s$  (Koutitas, 1987) 등도 외력에 따라  $K_M$ 을 다르게 산정하므로 배제하였다(여기서 overbar는 수심평균된 양을 의미하며, c는 상수 또는 차원을 갖는 계수이다).

본 연구에서 사용한 0 방정식은 다음과 같은 Prandtl(1925)의 혼합거리식이다.

$$K_M = l^2 \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2} \quad (8)$$

식 (8)에서 l은 Blackadar(1962)의 산술식을 사용하여 구하였다. 식 (8)은 Mofjeld와 Lavelle(1984)이 언급한 바와같이 난류에너지의 생성과 감쇄가 평형을 이룬다는 가정으로부터도 얻을 수 있으며, 이 경우 l은 z(또는  $B_1$ )의 함수여야 하며,  $S_M = B_1^{-1/3}$ 의 관계식을 갖는다. 이  $S_M = B_1^{-1/3}$ 의 관계식은 등밀도 유체의 경우 Blumberg 등 (1992)과도 같음을 알 수 있다. 본 연구에서도 이 관계식을 사용하여  $S_M = 0.3920$ 으로 고정하였으며,  $l_0 = 0.1 H$ 로 하여 식 (5)를 사용하여 l을 계산하였다.

## 난류모형의 적용

### 1. 일정 유량의 수로 흐름

Fig. 1과 같이 수심 변화가 있는 1차원 수로에 일정 유량이 주어진 경우를 고려하였다. Koutitas (1987)는 저면경계조건으로 no-slip 조건을 사용하여 상기 수로에  $k-\varepsilon$  난류모형을 적용하여 유동장을 해석한 바 있으며, Alfrink와 Rijn(1983)도 위와 제원이 다른 유사한 실험에 대하여  $k-\varepsilon$  난류모형으로 유속장을 계산하였다.

본 연구에서는 y방향의 변화율 및 전향력을 무

시하여 x-z 2차원 문제로 단순화하여 2 방정식, 1 방정식 및 0 방정식 난류모형을 적용하였다. 사용된 외부모드(식 9, 10)와 내부모드(식 11, 12)의 지배 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial(H\bar{u})}{\partial x} = 0 \quad (9)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = -g \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\tau_w - \tau_b}{H} + \frac{\partial}{\partial x} \left( A_m \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = \\ -g \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \left( K_M \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( A_m \frac{\partial u}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (11)$$

$$w(z) = -\frac{1}{H} \int_z^\xi \left( \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial H u}{\partial x} \right) dz \quad (12)$$

여기서 u, w는 각각 x, z 방향의 유속, g는 중력가속도,  $A_m$ 은 수평 운동량확산계수,  $H = h + \xi$ 는 총수심이다.

해수표면과 해저면에서의 경계조건은 다음과 같다.

$$K_M \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{\xi} = \frac{\tau_w}{\rho}, \quad K_M \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{-h} = \frac{\tau_b}{\rho} = c_d |u_b| u_b \quad (13a,b)$$

여기서  $\rho$ 는 해수밀도,  $\tau_w$ 는 바람(마찰)응력,  $\tau_b$ 는 저면마찰응력이며,  $u_b$ 는 저면근처의 유속이며,  $c_d$ 는 무차원의 저면마찰계수이다.

사용된 수치모형은 staggered 격자를 사용한 유한차분모형으로, 외부 모드(external mode, 즉  $\xi$  및

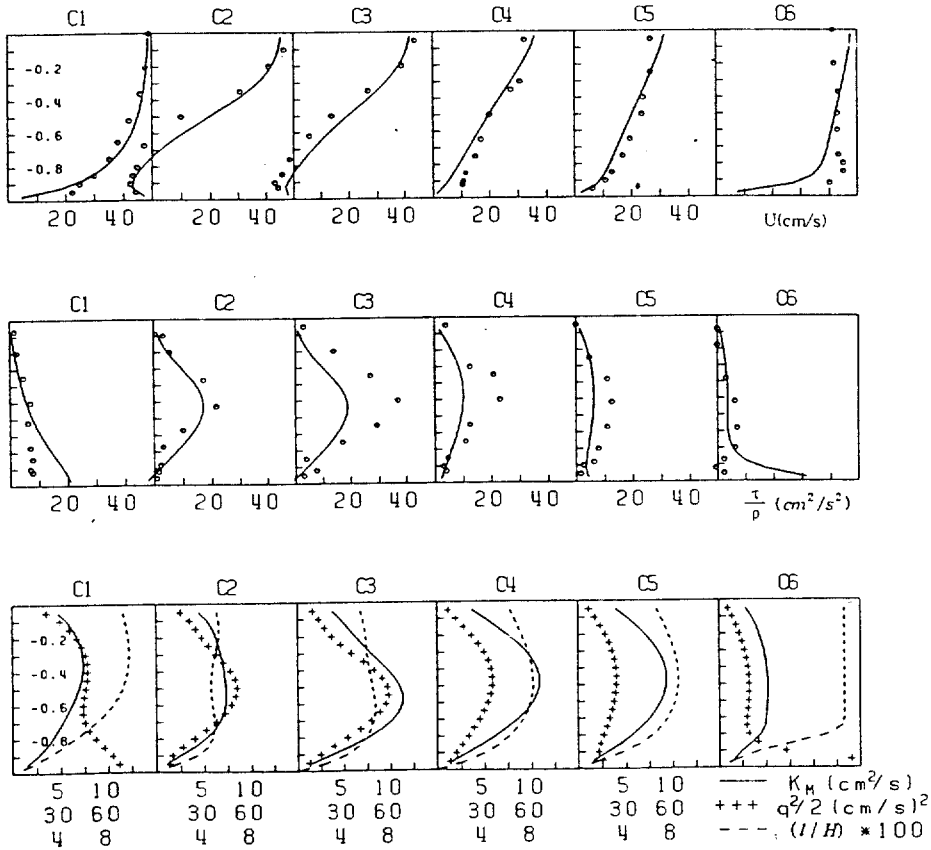


Fig. 2. Summary of two-equation turbulence model along channel depicted in figure 1.

수심평균된 유속)와 내부 모드 (internal mode,  $z$ 의 함수인 유속)로 모드 분리되었다. 외부모드와 내부모드는 저면마찰응력으로 연계되며, 외부모드의 차분식을 제외하고는 Blumberg와 Mellor(1987)의 모형과 같다. Blumberg와 Mellor(1987)의 모형은 외부모드의 수치해석시 시간 적분 방법으로 leap-frog 양해법을 사용하였으나, 본연구에서 적용된 수치모형은 외부 모드를 반음해법인 ADI(Alternating Direction Implicit)법으로 계산하였다(이와 서(1992)). 본 연구에서는  $y$ 방향의 변화를 무시하였기 때문에 완전음해법이 된다.

실제의 계산은  $\sigma = (z - \xi)/(h + \xi)$ 의 무차원 연직좌표를 이용한  $\sigma$ 연직좌표계 하의 방정식을 사용하여 해석하였다. 사용된 수평방향의 경계조건은 왼쪽 개방경계에  $Q = 0.08 \text{ m}^2/\text{s}$ 로부터  $\bar{u}_n = Q/(h + \xi)$ , 오른쪽 개방경계에는  $\bar{u}_n = \xi \sqrt{g/h}$ 의 방사조건을 사용하여

계산한 후, 인접유속의 연직구조를 갖도록  $u_n = \bar{u}_n - \bar{u}_1 + u_1$ 로 수정하여 사용하였다. 여기서  $u_n$ 는 개방경계의 유속,  $u_1$ 는 경계근처 내부점의 유속이다.

관측된 저면유속은 거의 0에 가까워 본 연구에서는  $c_d$ 값을 크게 하여( $c_d = 1.0$ ) no-slip 조건과 유사한 결과를 얻도록 하였으며, 바람응력은 무시하였다. 모든 변량이 0인 초기상태로부터 시간적분하여 정상상태(80초 후의 결과)에 도달한 값을 얻었으며, 시간미분항의 공간평균을 취하는 대신 수평방향의 확산계수로  $A_m = 0.010 \text{ m}^2/\text{s}$ 를 사용하였다. 전체의 수로길이는 6.5m이며, 공간적으로 균일한 격자( $\Delta = 0.1 \text{ m}$ ,  $\Delta\sigma = 0.05$ ), 계산시간간격으로  $\Delta t = 0.1 \text{ sec}$ 를 사용하여 외부 모드와 내부 모드를 1:1로 계산하였다. 즉 매시간 간격마다 외부모드에서는 수위와 수심평균된 유속을 계산하였으며 내부모드에서는 유속의 연직분포를 계산하였다.

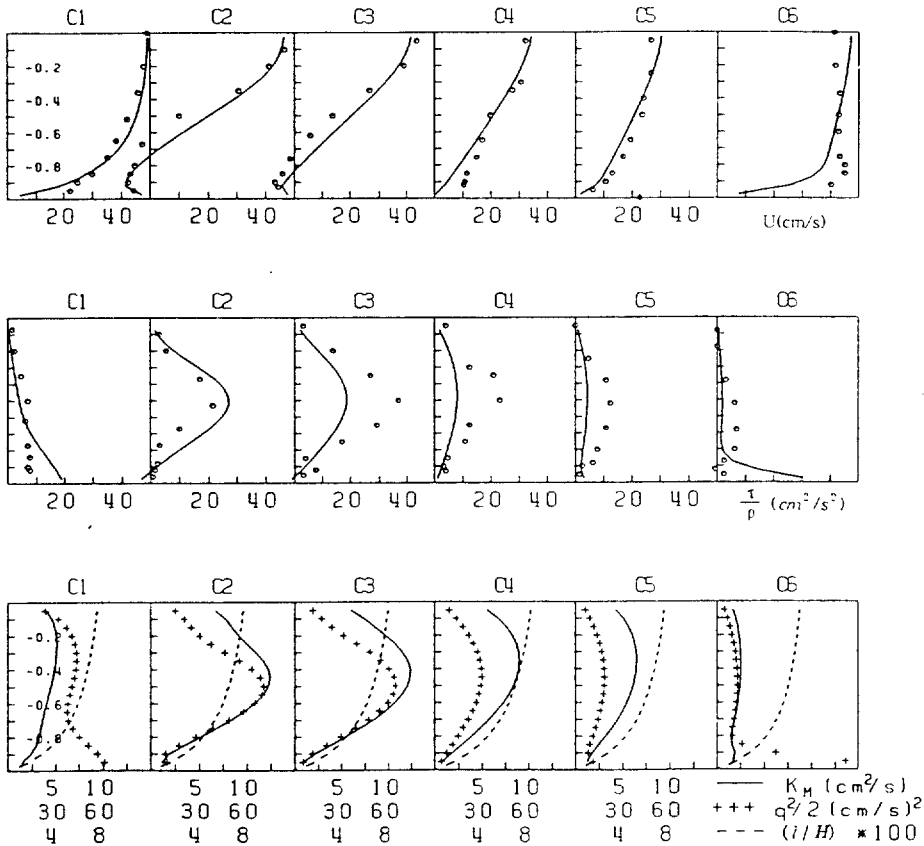


Fig. 3. Same as figure 2, but with one-equation turbulence model.

2 방정식의 경우 난류에너지  $q^2$ 이 매우 작을 때 특성길이 1의 계산이 불합리하게 나타나  $q^2$ 은  $q^2(0.1 H)$ 보다 작다는 제한을 두었다. 그리고 0 방정식에는 난류에너지  $q^2$ 의 계산이 없으나 1, 2 방정식 난류모형 결과와 상호 비교하기 위하여 식 (1)과 식 (8)로부터 다음과 같이 정의하여 계산·도시하였다(이후의 0 방정식 결과는 모두 이 관계식으로  $q^2$ 을 계산하였다).

$$q^2 = B_1^{2/3} l^2 \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \quad (14)$$

난류모형의 결과는 관측된 유속 및 전단응력 ( $\tau_{xz}/\rho = -\overline{u'w'} = K_M \partial u / \partial z$ )의 연직구조와 비교되었다(Fig. 1의 C1-C6). 유속과 전단응력 비교도의 실선은 모형결과를, 점은 관측치를 나타낸다. 난류모형 결과도의 실선은  $K_M$ , +는  $q^2$ , 점선은  $1/H$ 를 나타

낸다.

Fig. 2는 2 방정식 난류모형에 의해 계산된 결과로, 계산된 유속구조는 관측치와 거의 일치하였으며, 전단응력의 경우 모형에 의한 결과는 대체로 관측치보다 작은 값을 보이고 있으나 전체적인 연직구조는 관측된 연직구조와 부합되는 결과를 보이고 있다. 난류에너지  $q^2$ 의 최대값은 수면하 0.2 m에서 나타났다. 따라서 전체 수심이 0.2 m인 지점(Fig. 1의 C1, C6)의 난류에너지  $q^2$ 은 저면으로 갈수록 큰 값을 갖는 연직구조를 보이는 반면 수심 0.4 m인 지점(Fig. 1의 C2-C4)의  $q^2$ 은 중간수심에서 가장 큰 값을 갖는 포물형의 연직구조를 보이고 있다. 수심이 깊어지기 시작한 C2 지점의 1은 다른 지점의 1과는 약간 다른 형태를 보이고 있으며, 이는 수심변화에 따른 이류효과가 나타난 것이라 판단된다. 또한 수심이 낮아진 C6 지점에서는 저면근처를 제외하고는

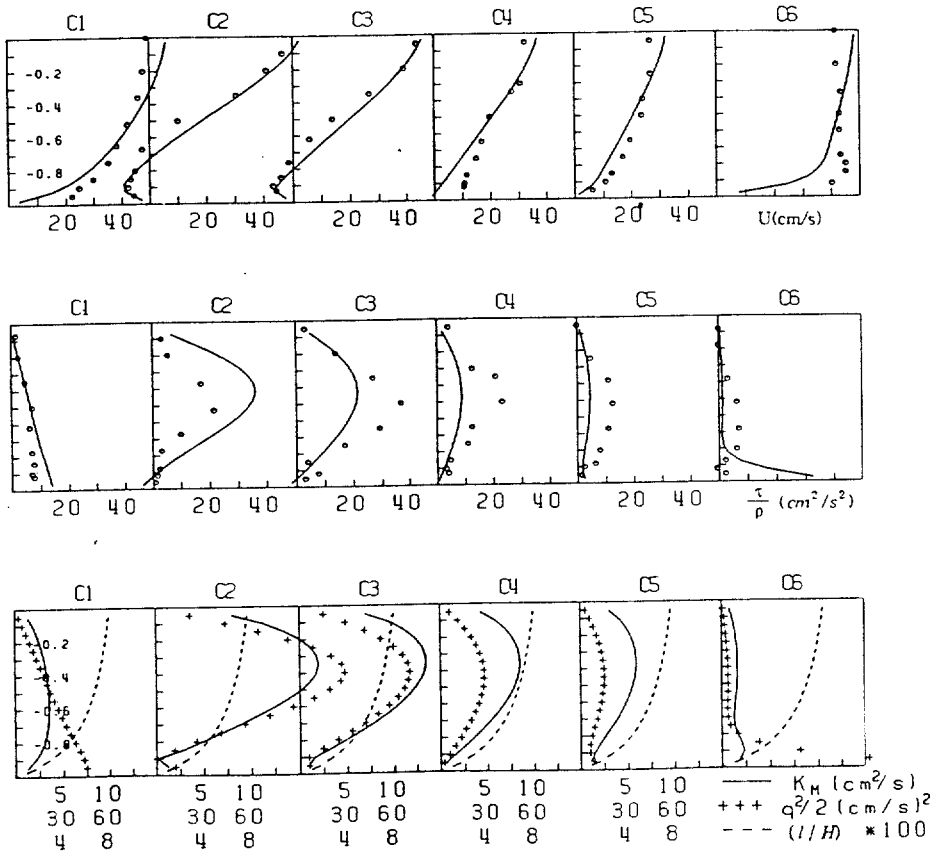


Fig. 4. Same as figure 2, but with zero-equation turbulence model.

$q^2$ 은  $q^2(0.1H)$ 보다 작다는 제한을 받은 것을 볼 수 있다.

Fig. 3은 1 방정식 난류모형에 의해 계산된 유속 구조 및  $K_M$ ,  $q^2$ ,  $l$ 의 구조로, 1 산정식(식 (5) 및 식 (6))의 차이에도 불구하고 2 방정식 난류모형과 거의 같은 결과를 보이고 있다. 2 방정식에 의한 특성길이  $l$ 은 정상상태의 결과만을 다루었으므로  $l$ 에 대한 시간효과는 무시되나 이류 및 확산 효과를 받는다. 그러나 Blackadar(1962)의 산정식은  $l_0$ 가 결정되면 수심만의 함수로 주어지므로 Fig. 3에서 보는 바와 같이 전반적인 연직구조는 전 수로에 걸쳐 일정함을 알 수 있다. 난류에너지  $q^2$ 으로부터 계산된 특성길이의 극한값  $l_0$ 는 C6 지점을 제외하고는  $0.1H$ 와 같음을 알 수 있으며(Fig. 4의 1과 일치하며),  $q^2$ 이 작은 C6 지점의  $l_0$ 는  $0.1H$ 보다 작음을 알 수 있다. 특성길이  $l$ 은  $K_M$  및 난류에너지 감쇄항의 계산에

포함되어 있고  $K_M$ 은 난류에너지의 생성항에 포함되어 있어  $q^2$ 의 계산에 대한 1의 직접적인 영향을 파악하기 어렵다. 그러나 Fig. 2와 Fig. 3에서 보는 바와같이,  $K_M$ 이 클수록  $q^2$ 은 커지나  $l$ 에 따른 뚜렷한 영향은 거의 나타나지 않아, 특성길이  $l$ 값이  $K_M$ 의 산정에는 매우 중요하나  $q^2$ 의 감쇄를 계산에는 비교적 그 영향이 작은 것을 알 수 있다.

0 방정식 난류모형에 의한 결과는 Fig. 4와 같다. 계산된 C1 지점의 유속은 관측된 유속과 약간의 차이를 보이고 있으나, 전단응력은 다른 난류모형보다 관측치에 더욱 일치하는 결과를 보이고 있다.  $K_M$  및  $q^2$ 은  $l^2$ 에 비례하기 때문에 수심이 증가한 C2 지점에서는 매우 크게 나타났으며, 식 (14)로 계산된 C1 지점의  $q^2$ 은 다른 결과와 많은 차이를 보이고 있다. 유입구에서 가까운 지점(Fig. 1의 C1, C2)의 변량은 다른 난류모형과는 약간의 차이를

보이고 있으나, 그 외의 지점에서는 다른 난류모형과 거의 같은 결과를 보이고 있다. 이는 유입구에 멀어질수록 난류에너지의 이류, 확산 영향이 감소하여 난류에너지의 생성과 감쇄가 평형을 이룬다는 가정을 만족시키기 때문인 것으로 판단된다.

적용된 난류모형에 의한  $K_M$ 의 연직구조는 크기에는 약간의 차이를 보이나 난류모형에 관계없이 중간수심에서 최대값을 갖는 포물형이었다. 그러나 Koutitas(1987)의  $k-\epsilon$  난류모형에 의한  $K_M$ 의 연직구조는 위와는 달리 수면근처에서는 연직변화율이 거의 없는 형태를 하고 있다. 본 연구에서는 수면에서  $q^2=0$ 의 경계조건을 사용하였으나 Koutitas는  $\partial q^2/\partial z=0$ 의 경계조건을 사용하였고 이와함께 1과 관련된 난류에너지 감쇄율  $\epsilon$ 의 경계조건도 다르기 때문에  $K_M$ 의 형태가 달라진 것으로 판단된다.

2 방정식 난류모형에 의해 계산된 특성길이의 연직분포는 수로의 위치에 따라 다르게 나타났으나, 1 방정식 난류모형과 0 방정식 난류모형에 의해 계산된 특성길이는 모든 수로에서 거의 같게 나타났다. 특히 유입구에서 먼 지점에서는 1 방정식 난류모형의 결과와 0 방정식 난류모형의 결과가 거의 유사하여, 난류 운동에너지의 생성과 감쇄가 평형을 이루었다는 0 방정식의 가정을 만족시킨 것으로 사료된다. 이상에서 난류방정식의 이류항 및 수평 확산항의 영향에 따른 난류모형 결과( $K_M$ ,  $q^2$ ,  $l$ )의 차이를 볼 수 있었다. 그러나 그 차이는 비교적 적었으며, 그로 인하여 적용된 난류모형에 따른 뚜렷한 유속구조의 차이점이 나타나지 않은 것으로 판단된다.

## 2. 1차원 점모형에 의한 조류의 연직구조

여기서는 왕복성 체적력(body force)에 의해 형성되는 유속(조류)의 연직분포를 1차원 점모형을 이용하여 검토한다. 운동방정식의 이류항 및 수평 확산항을 무시하고 선형 저면마찰을 사용하면 선형화된 운동방정식을 얻을 수 있으며, 이 경우 수면 경사항  $\partial \xi/\partial x$ 이 기지값으로 주어지면 유속의 연직구조를 계산할 수 있다(Davies, 1987).

편의상  $-g\partial \xi/\partial x = \dot{u}\omega \cos(\omega t - g_x)$ 로 정의하면, 전향력을 무시한, 선형화된  $x$ 방향의 운동방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \dot{u}\omega \cos(\omega t - g_x) + \frac{\partial}{\partial z} \left( K_M \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (15)$$

여기서  $\dot{u}$ 는 난류확산을 무시하였을 경우의 유속크기를 나타내며,  $\omega$ 는  $M_2$  분조의 각주파수,  $g_x$ 는 위상(지각)이다. 위의 운동방정식에 대한 경계조건은 식 (13)과 같으며, 조류만을 고려한 본 실험에서는  $\tau_w=0$ 이다.

수치실험은 선형화된 난류방정식과 식 (15)의 운동방정식만을 해석함에 따라 내부 모드만을 계산하였다.  $\dot{u}$ ,  $g_x$  및  $h$ 는 Irish해에서 관측한 2개지점 조석, 3개지점 유속자료의 결과 Wolf(1980)를 이용하여  $\dot{u}=0.6745$  m/s,  $g_x=328.64^\circ$ ,  $h=43$  m로 정의하였다. 선형화에 따른 오차, 관측오차 및 비교에 사용된 유속자료가 매우 적기 때문에 본 실험에서는 전단응력과 유속의 연직구조와의 관계에 초점을 맞추었다.

저면마찰응력이 수심평균된 유속에 선형으로 비례한다( $\tau_b=r\bar{u}$ ,  $r$ 는 선형마찰계수)는 가정하에 식 (15)를 수심평균하면 수심평균된 유속( $\bar{u}$ )은 다음과 같다.

$$\bar{u} = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + (r/h)^2}} \dot{u} \cos(\omega t - (g_x - \frac{\pi}{2} - \phi)) \quad (16a)$$

여기서

$$\phi = \begin{cases} \tan^{-1}\left(\frac{r/h}{\omega}\right) & \text{if } r \neq 0 \\ 0 & \text{if } r = 0 \end{cases} \quad (16a)$$

따라서 식 (16)으로부터 난류확산을 고려할 경우는 저면전단응력(실제로는 저면선형마찰계수)이 클수록 유속의 크기와 지각이 작아짐을 알 수 있다. 이들 전단응력의 영향을 유추하기 위하여  $u = \text{Real}(U(z)e^{i\omega t})$ ,  $-g\partial \xi/\partial x = \text{Real}(\tilde{u}\omega e^{i\omega t})$ 라고 변수분리한 후, 선형화된 운동방정식에 대입하면 다음식을 얻을 수 있다.

$$i\omega U = \tilde{u}\omega + \frac{\partial}{\partial z} \left( K_M \frac{\partial U}{\partial z} \right) \quad (17)$$

식 (17)을 (0, -h) 사이의 임의의 구간  $z_1, z_2$ 에 대하여 적분하면



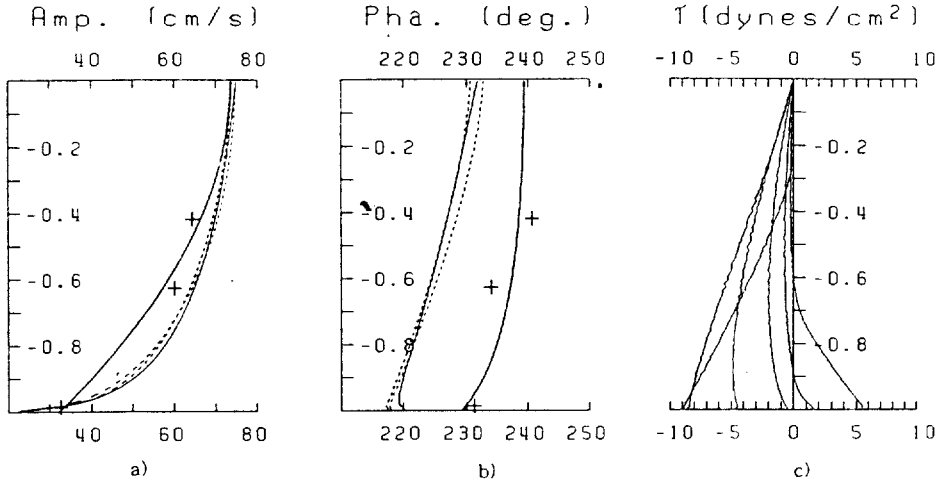


Fig. 5. Profiles of a) amplitude of tidal current, b) phase of tidal current and c) shear stress calculated with two-equation turbulence model. + is measured, heavy line is Wolf's method, normal line is result of two-equation turbulence model, dashed lines are those of one or zero equation model.

$$\int_{z_1}^{z_2} U(z)dz = -i\tilde{u}(z_2 - z_1) + \frac{\tilde{\tau}(z_2) - \tilde{\tau}(z_1)}{i\omega\rho} \quad (18)$$

여기서  $i = \sqrt{-1}$ ,  $\tilde{\tau}/\rho = K_M \partial U / \partial z$ 이다. 따라서 유속의 연직분포는 전단응력의 차에 의해 결정됨을 알 수 있다.

조류의 난류확산을 무시하면 식 (16)으로부터 수심평균된 유속의 크기는 67.45 cm/s, 지각은 주어진 수위의 지각보다 90° 작은 238.64°임을 알 수 있다. 저면마찰계수  $c_d = 0.017$ , 연직적으로 등간격의  $\Delta\sigma = 0.01$ 를 사용하였다. 모든 변량의 초기값을 0로 하여 초기조건의 영향이 거의 완전히 제거된 20 조석 후의 결과를 비교·분석하였다.

Fig. 5는 관측치(+), Wolf(1980)와 같은 방법으로 계산한 결과(굵은 실선) 및 점모형의 결과(가는 실선은 2 방정식 모형에 의한 결과며, 점선은 각각 1, 0 방정식 모형의 결과)를 함께 도시한 것으로, 적용된 난류모형에 무관하게 거의 비슷한 유속구조를 보이고 있다. 전단응력은 2 방정식 난류모형의 결과(다른 난류모형에 의한 결과도 거의 같았다)로 조석주기(T)의 1/2만을 도시하였다. 모형에 의해 계산된 전단응력은 Wolf(1980)의 전단응력에 비해 작은 값을 보이고 있는데 Wolf(1980)의 전단응력계산에 사용된 자료에는  $M_2$ 뿐만 아니라 다른 복합 분조도 포함되어 있기 때문으로 사료된다. 그러나 전반적인

연직구조는 모형 결과와 거의 같은 형태(Wolf(1980)의 Fig. 8 참고)를 하고 있다. 모형결과에서 주목할 것은 전단응력의 차가 클수록 유속의 진폭 및 지각이 작게 나타나는 물리현상이 재현되고 있다는 점이다. 저면근처의 전단응력이 중간수심 근처의 전단응력보다 비교적 크기 때문에 저면근처 유속의 연직변화율은 Wolf(1980)의 방법으로 구한 유속의 연직변화율보다 클 것으로 추정되나 관측된 자료수가 부족하여 저면근처의 유속구조를 정확히 파악하기 어려우며, 모형결과는 비선형 방정식을 선형화함에 따른 오차 등으로 관측치 및 Wolf의 계산결과와는 약간의 차이를 보이고 있다.

이류 및 수평 확산을 무시한 난류방정식을 사용하여 계산된  $K_M, q^2$ 은 적용된 난류모형에 따라 그 특성이 분명하게 나타났다. Fig. 6은 2 방정식 난류모형의 결과이다.  $K_M, q^2, l$ 을 T/12 간격으로 조석주기의 1/2만을 도시하였으며, 점선은 조석주기에 대해 평균된 양을 나타내고 있다. 계산된 연직와점성계수  $K_M$ 은 시간에 관계없이 중간수심 이하에서 최대값을 갖는 포물형태를 보이고 있으며, 난류에너지  $q^2$ 은 해수표면에서 최소, 해저면에서 최대값을 갖는 형태로 나타났다. 특성길이  $l$ 은 일정유량의 수로흐름과는 달리 중간수심에서 최대값을 갖고 수면 및 저면에서는 거의 0인 대칭인 연직구조를 보

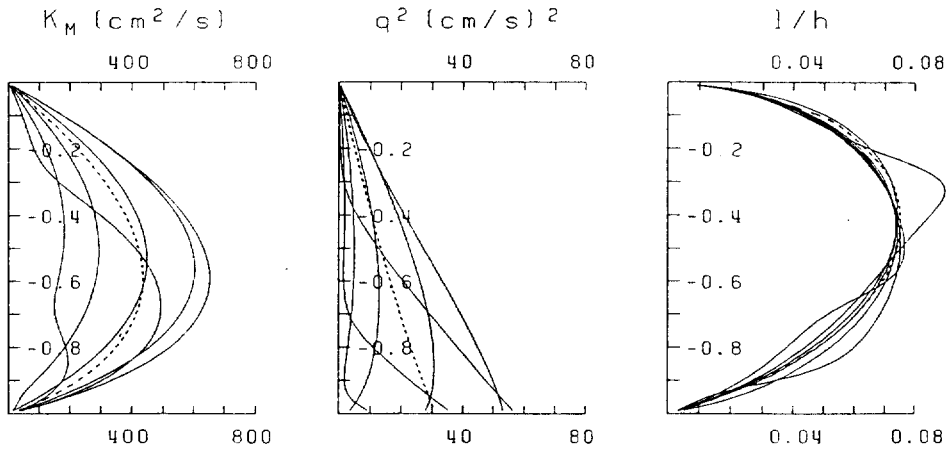


Fig. 6. Sequential profiles of eddy viscosity, turbulence kinetic energy and normalized length scale over a half of  $M_2$  tidal cycle with two-equation turbulence model. dashed lines are averaged quantities over an  $M_2$  tidal cycle.

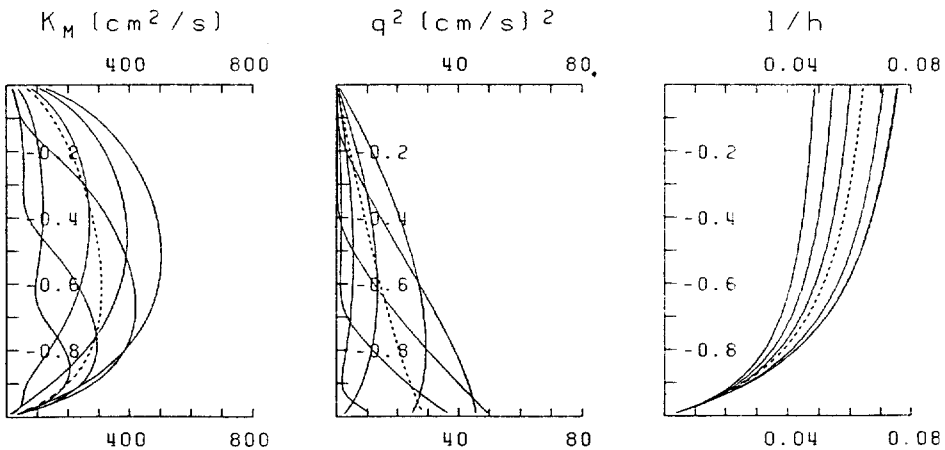


Fig. 7. Same as figure 6, but with one-equation turbulence model.

이고 있다. Fig. 7은 1 방정식 난류모형에 의한 결과이며, 특성길이  $l$ 의 차이를 제외하고는 2 방정식과 거의 비슷한 연직구조를 보이고 있다. 난류에너지로부터 계산된 특성길이의 극한값  $l_0$ 은 시간에 무관하게 0.1 h보다 작았다. 저면을 제외한 중간수심 이하에서는 1 방정식에 의한  $l$ 이 2 방정식에 의한  $l$ 보다 작게 계산되었기 때문에  $K_M$ 이 작아졌음을 알 수 있다. 0 방정식에 의한 결과는 Fig. 8과 같다. 시간에 무관한  $l$ 을 사용하였음에도 불구하고 계산된  $K_M$ ,  $q^2$ 은 다른 난류모형과 비슷한 연직구조를 보이고 있다. 조류의 경우는 적용된 난류모형에 따라 특성길이  $l$ 에 많은 차이를 보였으나, 유속 및  $K_M$ ,

$q^2$ 은 거의 비슷한 연직구조를 보이고 있어 난류에너지가 집중된 중간수심 이하에서의  $l$ 의 거동이 매우 중요함을 확인할 수 있다.

### 3. 정상상태의 취송류

여기서는 전술된 일정유량이 주어진 수로에서의 흐름 또는 조류의 경우와는 달리 난류에너지가 수면근처에 집중되는 취송류에 논의하였다. 구체적으로 Pearce와 Cooper(1981)에 인용된 Baines와 Knapp(1965)의 수리실험자료와 모형결과를 비교하였다. 수리실험은 길이 13 m, 폭 1 m, 수심 0.328 m인 수로에 6.1 m/s( $u_* = 0.875$  cm/s)의 바람이 일정하게

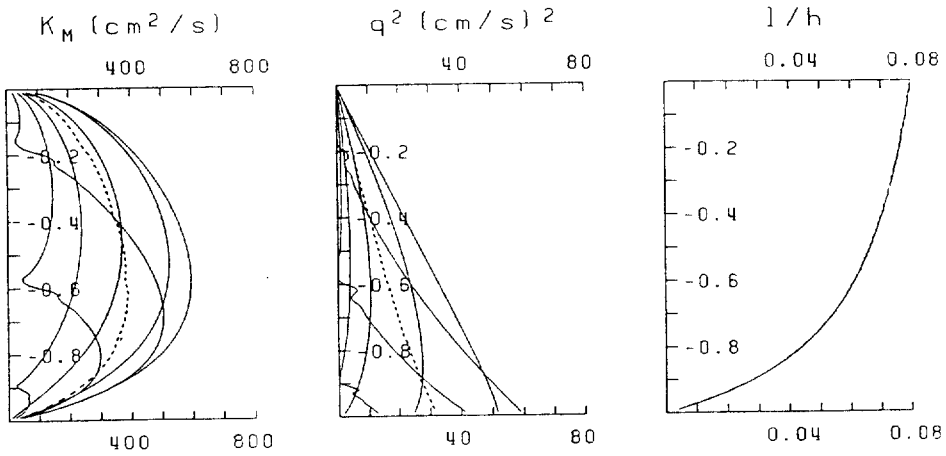


Fig. 8. Same as figure 6, but with zero-equation turbulence model.

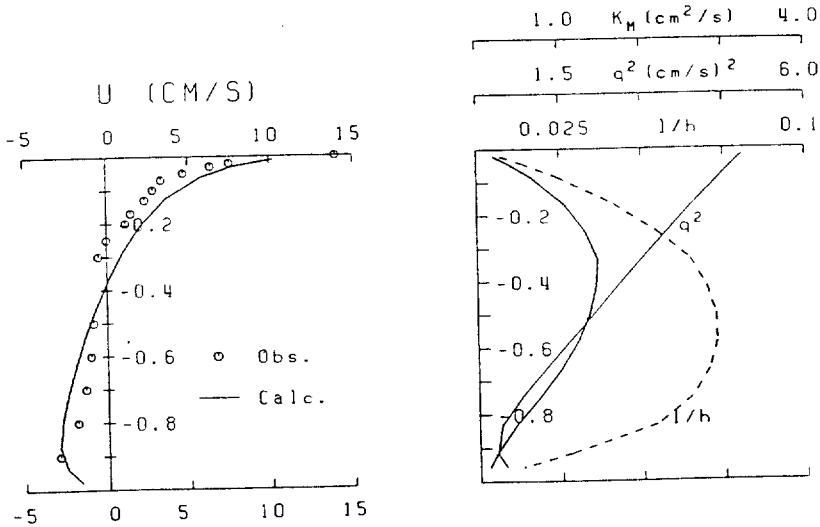


Fig. 9. Profiles of wind-driven current, viscosity, turbulence energy and normalized length scale with two-equation turbulence model.

불도록 고안되었으며, 정상상태에 도달된 유속의 연직구조를 관측하여 비교되었다. 이 실험조건에 부합하도록 x-z 2차원 운동방정식 및 경계조건(식 (9)~식 (13))을 사용하여 수치실험하였다.

15개의 비등방격자를 사용하여 전체수심을 나타 내었으며( $\sigma=0.0, -0.01, -0.03, -0.07, -0.15, -0.25, -0.35, -0.45, -0.55, -0.65, -0.75, -0.85, -0.93, -0.97, -0.99, -1.0$ ),  $\Delta x=0.5$  m,  $c_d=0.65$ ,  $A_m=0.010$  m<sup>2</sup>/s를 사용하였다. 외부 모드의  $\Delta t$ 는 0.2 sec를 사용하였으며 5번의 외부 모드 계

산후 1번의 내부 모드를 계산하였다. 비교에 사용된 지점은 수로의 중간지점이나, 수심과 바람응력이 동일하므로 이류향 및 수평확산항의 영향이 매우 미약하여 유속구조는 수면의 setup으로 일치하지는 않았으나 수로의 모든지점에서 거의 같게 나타났다. 결과 비교에는 충분히 정상상태에 도달한 400 sec 이후의 결과가 사용되었다.

Fig. 9는 2 방정식 난류모형에 의한 결과로 비교적 관측된 유속과 부합하는 결과를 보이고 있다. 특히 관측된 유속구조에 나타난 수면근처 유속의 연직변

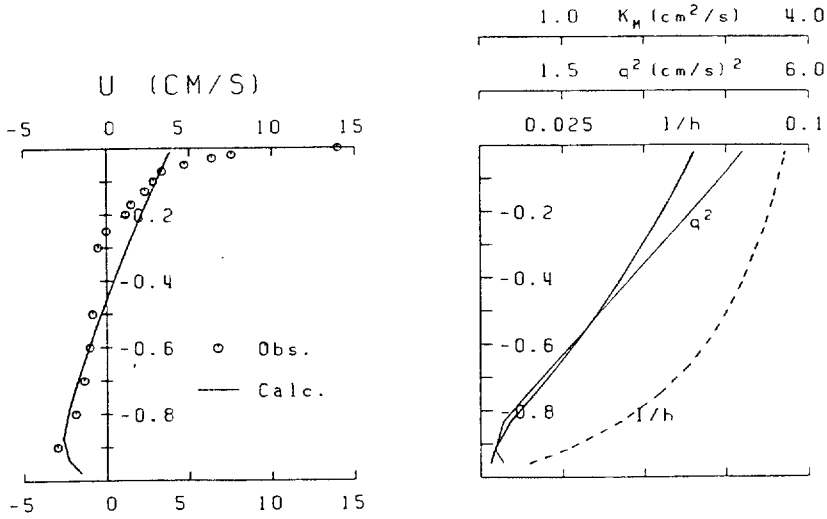


Fig. 10 Same as figure 9, but with one-equation turbulence model.

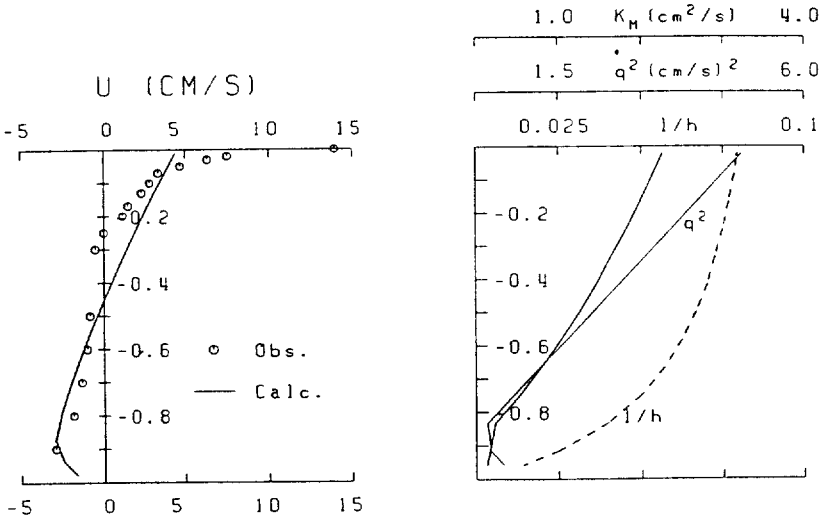


Fig. 11. Same as figure 9, but with zero-equation turbulence model.

화율이 비교적 양호하게 재현되었다. Pearce와 Cooper(1981)는 연직와점성계수  $K_M$ 의 형태를 수면에서  $0.01 \text{ cm}^2/\text{s}$ , 수심의 20%까지는 선형으로 증가하나 수심의 20% 이하에서는  $1.5 \text{ cm}^2/\text{s}$ 로 일정한 연직분포를 가정하여 관측된 유속과 가장 잘 일치하는 유속구조를 얻은 바 있다. 그들은 선형 slip의 저면 마찰용력을 사용하였으며, 유속의 연직구조에 대한 저면마찰의 영향은 미약하다고 하여 여기서도 저면 근처의 유속구조는 논의하지 않았다. 2 방정식에

의해 계산된  $K_M$ 은 수심 30%에서 최대값  $1.5 \text{ cm}^2/\text{s}$ 를 갖는 포물형으로 Pearce와 Cooper의  $K_M$  보다 전반적으로 작으며, 계산된 유속의 절대값은 관측된 유속의 절대값보다 큰 값을 보이고 있다(정성적으로  $K_M$ 이 작을수록 유속의 연직변화율은 크게 나타난다).

$q^2$ 은 수면에서 최대이며 저면으로 갈수록 감소하는 형태를 보이고 있다. 정상상태의 선형화된 운동 방정식을 수면으로부터 임의의 수심  $z$ 까지 적분하면

다음식을 얻을 수 있다.

$$\frac{\tau_x(z)}{\rho} = \frac{\tau_w}{\rho} + \left( g \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) \cdot z \quad (19)$$

따라서 난류에너지 방정식의 경계조건과 같이  $q^2$ 이  $\tau_x(z)$ 에 (선형으로) 비례한다고 가정하면, 난류에너지  $q^2$ 은 수면 setup에 의해 저면으로 갈수록 감소함을 알 수 있다. 2 방정식 난류모형에 의해 계산된  $l/h$ 는 취송류의 경우에도 중간수심에서 최대값을 갖는 포물형의 연직구조를 보이고 있다.

Fig. 10과 Fig. 11은 각각 1 방정식 난류모형과 0 방정식 난류모형에 의한 결과로, 1 방정식, 0 방정식 난류모형으로 계산된 유속 및  $K_M$ ,  $q^2$ ,  $l$ 의 전반적인 연직구조는 유사하다. 두 모형 모두 관측된 유속과는 많은 차이를 보이고 있다. 특히 해수표면 유속이 지나치게 작게 계산되었다.

$q^2$ 은 적용된 난류모형에 관계없이 거의 같은 크기를 보이고 있으며, 이로부터 수면의 setup도 적용된 난류모형에 관계없이 거의 같게 계산되었음을 알 수 있다.

조류의 경우  $q^2$ 은 저면으로 갈수록 크게 나타나 식 (6)에 의해 산정된  $l_0$ 는 0.1 h보다 작았으나, 취송류의 경우는 이와는 반대로  $q^2$ 은 수면으로 갈수록 크게 나타나  $l_0$ 가 0.1 h보다 크게 계산되었다. 따라서 취송류의 경우는 1 방정식에 의한  $K_M$  및  $l$ 이 0 방정식에 의한  $K_M$  및  $l$ 보다 항상 큰 값을 보이며 1 방정식 난류모형에 의한 표면 유속이 가장 작게 계산되었다.

1 방정식 또는 0 방정식에 의한 결과는 바람이 난류의 원천이므로 수면에서  $K_M$ 이 최대가 되어야 한다는 물리현상을 재현한 것으로 볼 수 있으며, 2 방정식에 의한 결과는 바람에 의해 수면근처에 비교적 강한 유속의 연직변화율이 나타날 것이라는 물리현상을 재현한 것으로 볼 수 있다. 그러나 수면근처에서  $K_M$ 이 최대인지 최소(또는 작은 값)인지에 대한 문제는 아직도 논쟁의 대상이 되고 있다 (Davies, 1985).

### 결론 및 토의

난류모형에 의한 유속의 연직구조를 비교하기 위하여 Blumberg와 Mellor(1987)의 2 방정식 난류모

형, Blackadar(1962)의 1 산정식을 이용한 1 방정식 난류모형 및 Prandtl (1925)의 혼합거리식을 이용한 0 방정식 난류모형을 등밀도하의 동일 문제에 적용하여 그 결과를 살펴보았다. 비교된 경우는 다음과 같으며, Blumberg와 Mellor(1987)의 2 방정식 난류모형만이 어느 경우나 실험치에 부합하는 좋은 결과를 보였다.

불규칙한 수심에 일정유량이 주어진 수로 흐름의 경우, 계산된 특성길이의 연직분포는 적용된 난류모형에 따라 다르게 나타났으나 유속구조는 모두 관측치에 부합하였다.

점모형을 이용한 조류의 수치실험에서는 적용된 난류모형 모두 거의 비슷한 유속구조를 보였으며, 비교적 Wolf(1980)의 자료와 부합하는 결과를 보였다. 적용된 난류모형 모두 관측된 전단응력의 연직분포를 잘 재현하였으며, 특히 전단응력의 차가 클수록 유속 및 유속의 지각이 감소하는 현상을 두드러지게 나타나 저면근처 유속의 연직변화율이 크게 나타났다.

난류의 운동에너지가 수면근처에서 최대값을 갖는 정상상태의 취송류 경우, 2 방정식 난류모형에 의한 결과만이 관측된 유속과 부합하는 유속구조를 재현하였다. Blackadar(1962)의 산정식을 이용한 1, 0 방정식 난류모형은 수면근처의 유속을 관측치보다 작게 계산하였다. Blackadar(1962)의 산정식은  $l$ 을 수면으로 갈수록 크게 산정하므로 난류에너지가 큰 수면에서  $K_M$ 은 최대가 되며, 수면근처의  $K_M$ 값이 크므로 유속의 연직혼합이 활발하여 유속 및 유속의 연직변화율은 작게 계산되었다.

이제까지의 수치실험을 통하여 살펴본 바와같이 난류방정식에 의해 계산된  $q^2$ 과 0 방정식에서 정의한 식 (14)의 값 및 연직분포가 거의 비슷하였으며, 2 방정식에 의해 계산된  $l$ 은 거의 외력에 관계없이 또한 주기에 무관하게 일정한 값을 보인다는 점이다. 이러한 점을 적절히 매개변수화하면 (예로써  $l=0.3(1-|\sigma|)|\sigma|h$ ) 2방정식과 거의 유사한 유속구조를 0 방정식을 사용하여 얻을 수 있을 것으로 사료된다.

### 감사의 글

本 研究는 韓國海洋研究所의 基本研究事業(BSPE 00467)의 研究費 支援에 의하여 遂行되었습니다. 本

論문을 完成하는데 많은 助言을 해주신 海洋研究所의 정경태 박사님께 感謝드리며, 본 논문을 심사해주신 심사위원님들께 謝意를 표합니다.

### 참고문헌

- 이종찬, 서승남, 1992. 선형 천수방정식의 ADI 유한차분법. 한국해양·해양공학회지, 4: 108-120.
- 이종찬, 최병호, 1994. 연직 와점성계수가 유속의 연직구조에 미치는 영향에 대한 연구-연직 와점성계수가 주어질 경우, 한국해양학회지, 29: 119-131.
- 정태성, 1994. 연안 해수유동 및 온배수확산에 관한 3차원 수치모형. 서울대학교 박사학위논문. 208 pp.
- 최병호, 서경석, 1992. 세력자 3차원 수치모형에 의한 동중국해의 기상학적으로 유발된 해수순환의 산정. 한국해양·해양공학회지, 4: 45-58.
- Alfrink, B. J. and L. C. Rijn. 1983. Two-equation turbulence model for flow in trenches. *J. Hydr. Eng.* 109: 941-958.
- ASCE Task Committee on Turbulence Models in Hydraulic Computations. 1988. Turbulence modeling of surface water flow and transport: Part I-IV. *J. Hydr. Eng.* 114: 970-1073.
- Backhaus, J. O., P. B. Crean and D. K. Lee, 1987. On the application of a three-dimensional numerical model to the waters between Vancouver island and the Mainland coast of British Columbia and Washington state. In: Three-dimensional coastal ocean models, edited by N.S. Heaps, 149-175.
- Blackadar, A.K., 1962. The vertical distribution of wind and turbulent exchange in a neutral atmosphere. *J. Geophys. Res.* 67: 3095-3120.
- Blumberg, A. F. and G. L. Mellor, 1987. A description of a three-dimensional coastal ocean circulation model. In: Three-dimensional coastal ocean models, edited by N.S. Heaps, 1-16.
- Blumberg, A. F., B. Galperin and D. J. O'Connor. 1992. Modeling vertical structure of open-channel flows. *J. Hydr. Eng.* 118: 1119-1134.
- Cheng, R. T. and P. E. Smith, 1989. A survey of three-dimensional numerical estuarine models. In: Estuarine and coastal modelling. Proc. of the Conference, edited by M. L. Spaulding, 1-15.
- Davies, A. M., 1985. Application of a sigma coordinate model to the calculation of wind-induced currents. *Continental shelf research*, 4: 389-423.
- Davies, A. M., 1985. On determining current profiles in oscillatory flows. *Appl. Math. Modelling*, 9: 419-428.
- Davies, A. M., 1987. Spectral models in continental shelf sea oceanography. In: Three-dimensional coastal ocean models, edited by N.S. Heaps, 71-106.
- Davies, A. M. and J. E. Jones. 1987. Modeling turbulence in shallow regions. In: Small-scale turbulence and mixing in the ocean, edited by J.C.J. Nihoul and B.M. Jamart, 63-76.
- Ekman, W. V., 1905. On the influence of the earth's rotation on ocean currents. *Arkiv Mat. Astr. Fys.* 2: 1-53.
- Johns, B., 1978. The modeling of tidal flow in a channel using a turbulence energy closure scheme. *J. phys. oceanogr.* 8: 1042-1049.
- Johns, B. and T. Oguz, 1987. Turbulence energy closure schemes. In: Three-dimensional coastal ocean models, edited by N.S. Heaps, 17-39.
- King, H. L., A. G. Davies and R. L. Soulsby, 1985. A numerical model of turbulent boundary layer beneath surface waves and tides. Institute of oceanographic sciences. Report. No. 196, 90 pp.
- Koutitas, C., 1987. Three-dimensional models of coastal circulation: An engineering viewpoint. In: Three-dimensional coastal ocean models, edited by N.S. Heaps, 107-123.
- Madsen, O. S., 1977. A realistic model of the wind-induced Ekman boundary layer. *J. Phys. Oceanogr.* 7: 248-255.
- Mellor, G. L. and T. Yamada, 1982. Development of a turbulence closure model for geophysical fluid problems. *Rev. Geophys. Space Phys.* 20: 851-875.
- Mofjeld, H. O. and J. W. Lavelle, 1984. Setting the length scale in a second-order closure model of the unstratified bottom boundary layer. *J. phys. oceanogr.* 14: 833-839.
- Pearce, R. B. and C. K. Cooper, 1981. Numerical calculation model for wind induced flow. *J. of Hyd. Div., ASCE* 107: 285-302.
- Prandtl, L., 1925. Über die ausgebildete turbulenz. *ZAMM*, 5, 136 pp.
- Rodi, W., 1980. Mathematical modelling of turbulence in estuaries. In: Mathematical modelling of estuarine physics, edited by J. Sundermann and K. P. Holz, 14-26.
- Thomas, J. H., 1975. A theory of steady wind-driven currents in shallow water with variable eddy viscosity. *J. Phys. Oceanogr.* 5: 136-142.
- Vager, B. G. and Kagan, B.A., 1969. The dynamics of the turbulent boundary layer in a tidal current. *Atmospheric and ocean physics*, 5: 88-93.
- Welander, P., 1957. Wind action on a shallow sea: Some generalizations of Ekman's theory. *Tellus*, 9: 45-52.
- Witten, A. J. and J. H. Thomas, 1976. Steady wind-driven currents in a large lake with depth-dependent eddy viscosity. *J. Phys. Oceanogr.* 6: 85-92.
- Wolf, J., 1980. Estimation of shearing stresses in a tidal current with application to the Irish Sea. In: Marine turbulence, edited by J.C.J. Nihoul, 319-344. Elsevier.