응용통계연구 제 8권 2호
1995년 9월 pp. 187-200.

비선형시계열 오차를 갖는 회귀모형에 관한 연구[1)]

황 선 영[2)]

요 약

본 논문에서는 회귀모형에서의 오차항이 비선형시계열(nonlinear time series)을 따르는 경우에 오차항이 선형인지를 검정하는 방법에 대해서 연구하고 있다. 이를 위해서 회귀계수의 대표본 성질을 규명하고 잔차를 이용한 오차항의 선형성 검정통계량을 유도하고 그 성질을 연구해 보았다.

1. 서론 및 모형

회귀모형에서 반응변수 y와 설명변수 x들이 시간의 흐름에 따라 정리되어 있는 경우에 인접오차항간의 상관성이 문제가 되는 경우가 많이 있다. 회귀모형에서 인접오차항의 상관구조 분석에 통상 이용되고 있는 오차항에 대한 모형은 일차 자기회귀모형

$$\mathrm{AR}(1)\ :\ \varepsilon_t = \phi\varepsilon_{t-1} + \eta_t, \qquad t = 1, 2, \cdots$$

여기서 $\{\eta_t\}$는 IID 확률변수들이며 $|\phi|<1$,

으로서 $\phi>0$ ($\phi<0$)인 경우에는 인접오차항간의 양의 상관성(음의 상관성)이 있음을 암시하고 있으며 연관된 검정 방법으로는 더빈-왓슨 검정법이 널리 사용되고 있다(c.f. Durbin and Watson ,1950, 1951).

AR(1) 모형을 자세히 살펴보면 ϕ는 평균적으로 ε_{t-1}이 ε_t 에 기여하는 기여도를 나타내고 있다. 기여도로서의 ϕ는 시점 t에 무관한 상수라는 점이 AR(1) 모형의 특징이 되겠다. 본 논문에서는 AR(1) 모형을 포함하는 보다 포괄적인, 특히 일차 비선형시계열로써 오차항을 모형화 시키는 경우에 오차항이 AR(1) 모형을 따르는지를 알아보기 위한 선형성 검정(test for linearity)방법에 대해서 연구하고 있다. 지난 20년간 AR(1) 모형의 변형으로서 비선형시계열 모형의 연구가 활발히 진행되었으며 널리 이용되고 있으면서 연구가 많이 진척된 일차 비선형시계열 모형은 다음과 같은 것들이 있다. 이들 모형에 대한 설명은 Tong(1990)에 자세히 나와있다.

A : 확률계수모형 ;

(i) RCA(Random Coefficient Autoregressive model)

$$\varepsilon_t = (\phi + z_t)\varepsilon_{t-1} + \eta_t \tag{1.1}$$

---

1) 이 논문은 1993년도 한국 학술진흥 재단의 신진교수 학술연구조성비에 의하여 연구되었음.
2) (140-742) 서울 용산구 청파동 2가, 숙명여자대학교 통계학과.

(ii) MBL(Markovian Bilinear model)

$$\varepsilon_t = (\phi + \theta\eta_t)\varepsilon_{t-1} + \eta_t \tag{1.2}$$

여기에서 $\{z_t\}$와 $\{\eta_t\}$는 서로 독립이며 $\{z_t\}$ 와 $\{\eta_t\}$ 은 각각 i.i.d.확률변수들로서 임의의 분포함수 F와 G를 따르며 $E(z_t)=E(\eta_t)=0$; $E(z_t^2)=\sigma_z^2$, $E(\eta_t^2)=\sigma_\eta^2$를 가정한다. 이들을 확률계수모형이라 부르는 이유는 시점 t에서의 기여도가 평균이 ϕ이면서 확률변수들 $\phi+z_t$, $\phi+\theta\eta_t$이기 때문이다. 이들 모형의 확률적 성질은 Feigin 과 Tweedie(1985)에 잘 나와있다.

B : 고정계수모형 ;

(iii) TAR(Threshold Autoregressive model)

$$\varepsilon_t = \phi_1 \varepsilon_{t-1}^{+} + \phi_2 \varepsilon_{t-1}^{-} + \eta_t \tag{1.3}$$

여기서 $\varepsilon_{t-1}^{+} = \max(\varepsilon_{t-1}, 0)$; $\varepsilon_{t-1}^{-} = \min(\varepsilon_{t-1}, 0)$

(iv) EAR(Exponential Autoregressive model)

$$\varepsilon_t = \phi_1 \varepsilon_{t-1} + \phi_2 \varepsilon_{t-1} \exp(-\phi_3 \varepsilon_{t-1}) + \eta_t \tag{1.4}$$

본 논문에서는 이들 모형이 모두 강정상(strictly stationary)임을 가정하기로 한다. 각각의 모형이 강정상이기 위한 충분조건은 다음과 같음이 알려져 있다.

(i) RCA : $\phi^2 + \sigma_z^2 < 1$

(ii) MBL : $\phi^2 + \theta^2\sigma_\eta^2 < 1$

(iii) TAR : $\phi_1 < 1$, $\phi_2 < 1$, $\phi_1\phi_2 < 1$,

(iv) EAR : $|\phi_1| < 1$, $\phi_3 > 0$

다음과 같은 중선형 회귀모형을 생각해보자.

$$y_t = x_t'\beta + \varepsilon_t, \qquad t = 1, 2, \cdots, n; \tag{1.5a}$$

여기서 y_t 는 시점 t에서의 관측치(observation)이며 β는 $k\times1$벡터로서 회귀계수를 나타내며 x_t 는 $k\times1$ 공변량벡터를 의미한다. ε_t는 관측불가능한(unobservable) 오차로서 식(1.1)부터 (1.4)에서 설명된 비선형시계열 모형중 어느 하나를 따르고 있다고 가정한다. 다음과 같은 기호를 사용해서

$$Y=(y_1,\cdots,y_n)'; \quad \beta=(\beta_1,\cdots,\beta_k)';$$
$$X=(x_1,\cdots,x_n)' : \quad n\times k \text{ 행렬}$$
$$\varepsilon=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)'$$

식 (1.5 a)을 간략히 표시하면 다음과 같다.

$$Y=X\beta+\varepsilon \tag{1.5 b}$$

2절에서는 확률계수모형인 RCA 와 MBL의 경우에 오차항 ε_t가 선형 AR(1) 모형을 따르고 있는지를 검정하기 위한 검정통계량을 유도하고 있다. 이를 위해서 먼저 β의 OLS 추정량 $\widehat{\beta_n}$의 대표본성질을 규명하고 연관된 잔차 $e_t=y_t-x_t'\widehat{\beta_n}$, $t=1,\cdots,n$을 이용한 ε_t의 선형성 검정(Test for linearity) 통계량을 제안하고 모의실험을 통한 검정통계량의 검정력(power)을 알아보았다. 3절에서는 고정계수모형인 TAR과 EAR의 경우에 선형성 검정통계량을 제안해 보았다.

2. 대립가설이 확률계수모형인 경우의 오차항의 선형성 검정

이 절에서는 대립가설이 확률계수모형인 경우에 오차항의 선형성검정, 즉

$$H_0: \varepsilon_t \sim \mathrm{AR}(1)$$
$$H_1: \varepsilon_t \sim \mathrm{RCA}(1) \quad \text{또는} \quad H_1: \varepsilon_t \sim \mathrm{MBL}(1)$$

에 대한 검정방법을 연구하고 있다.

주어진 시계열이 선형인지를 검정할 때는 대립가설 H_1 에서 특정모형을 가정하지 않는 경우가 많다. Ljung과 Box(1978)은 잔차의 표본자기상관계수를 이용한 Portmanteau형태의 통계량을 제안하였고 An과 Cheng(1991)은 Kolmogorov-Smirnov 형태의 통계량을 제안하였다. 이 절에서는 대립가설 H_1에 특정 일차 비선형 모형 특히 선형성 검정에 대한 연구가 미진한 확률계수 모형을 가정하기로 하자. 오차항 ε_t 를 확률계수모형화 시키는 절차는 다음의 두 가지 이유에서 타당성을 찾을 수 있다. 첫째는 여기서 고려하고 있는 확률계수모형이 AR(1)모형을 포함하는 더 큰 모형이므로 과적합(overfitting)관점에서 볼때, 선형성가설검정 결과 H_0를 기각시킬 수 없다면 ε_t를 AR(1)모형화 시키는 기존의 방법에 당위성을 부여할 수 있다. 둘째는 Kendall(1953)과 Nicholls와 Quinn(1982)이 지적한 대로 특히 경제 자료를 모형화시키는데 있어서 계수들이 고정된 상수로 생각하는 것보다는 시점 t의 경제상태에 따라 변하는 것으로 생각하는 것이 합리적이다. 시점 t에서의 경제상태를 설명해주는 모든 설명변수를 회귀모형화 시키는 것은 불가능하며 고려에서 제외된 설명변수들은 오차항에 편입되어 있을 것이다. 즉 시점 t

에서의 기여도로서의 자기회귀계수는 고정된 상수 ϕ라기 보다는 시점 t에 따라 변한다고 생각하는 것이 타당하다 하겠다.

이제 AR(1), RCA(1) 그리고 MBL(1)의 공통점 및 차이점을 알아봄으로써 오차항의 선형성 검정

$$H_0: \varepsilon_t \sim \mathrm{AR}(1)$$

을 수행하도록 하자. RCA(1)의 경우 ε_{t-1}의 계수의 확률성을 나타내는 z_t의 분산 $Var(z_t)=0$인 경우에는 RCA(1)이 AR(1) 모형이 되며 MBL(1)의 경우에는 $\theta=0$ 일 때 MBL(1)이 AR(1)이 된다는 점에 주목하도록 하자. 먼저 AR(1) · RCA(1) · MBL(1)의 경우에 β_n 의 OLS 추정량 $\widehat{\beta_n}=(X'X)^{-1}X'Y$ 은 $n\to\infty$일 때 다변량 정규분포가 된다는 사실을 증명하기 위해 $k\times 1$ 공변량 벡터들 $x_1, \cdots, x_n$ 에 조건을 부여하기로 하자. Hwang과 Basawa(1993 b)는 오차항 ε_t 가 RCA(1)을 따르는 경우에 $\widehat{\beta_n}$ 의 대표본성질에 대해서 연구하였다. 본 논문에서는 $x_1, \cdots, x_n$ 이 Hwang과 Basawa(1993 b)의 4절에서 이용된 조건들을 만족시킨다고 가정하기로 하자. 이 조건들은 다항식을 포함하는 상당히 포괄적인 조건이라 할 수 있다.

정리 2.1 오차항 $\{\varepsilon_t\}$가 AR(1) · RCA(1) · MBL(1)을 따를 때 β의 OLS 추정량 $\widehat{\beta_n}=(X'X)^{-1}X'Y$는 $n\to\infty$ 일 때 다음 성질을 가진다.

(i) $\widehat{\beta_n}$ 은 β의 일치추정량(consistent estimator)이다.

(ii) $\widehat{\beta_n}$ 의 극한분포는 다변량 정규분포이다. 즉 $n\to\infty$ 일 때

$$D_n(\widehat{\beta_n}-\beta) \xrightarrow{d} N_k(0,\ A^{-1}VA^{-1}), \tag{2.1}$$

여기서 $D_n = Diag(\sqrt{x_1'x_1}, \cdots, \sqrt{x_k'x_k})$: $k\times k$ 대각행렬 ;

$$A=\lim_{n\to\infty} D^{-1}X'XD_n^{-1} ;$$

$$V=((\sum_{k=-\infty}^{\infty} l_{ij}(h)\,\gamma_\varepsilon(h)))\quad i,j=1,\cdots,k ;\quad k\times k \text{ 행렬}$$

V의 표현식에서 $\gamma_\varepsilon(h)$는 시차가 h인 $\{\varepsilon_t\}$의 자기공분산함수(autocovariance function)이며

$$l_{ij}(h)=\lim_{n\to\infty}\sum_{t=1}^{n-h} x_{ti}\,x_{t+h,j}\ /\ [\ (x_i'x_i)(x_j'x_j)]^{1/2}$$

을 의미한다.

증명 AR(1)의 경우는 Fuller(1976), RCA(1)의 경우는 Hwang and Basawa(1993 b)에 나와 있으므로 MBL(1)의 경우에만 증명하도록 한다. (ii)를 먼저 증명하도록 하자. β의 OLS 추정량 $\widehat{\beta_n}$은 다음과 같이 쓸 수 있으므로

$$D_n(\widehat{\beta_n}-\beta)=D_n(X'X)^{-1}D_nD_n^{-1}X'\varepsilon \tag{2.2}$$

$D_n^{-1}X'\varepsilon$ 가 $n\to\infty$일 때 극한분포를 가진다면

$$D_n(\widehat{\beta_n}-\beta)=A^{-1}D_n^{-1}X'\varepsilon+0_p(1) \tag{2.3}$$

그런데 $D_n^{-1}X'\varepsilon$ 은 $k\times 1$ 벡터로서 i번째 원소는 ε_t의 가중합으로서

$$\sum_{t=1}^{n} x_{ti}\varepsilon_t \Big/ \sqrt{\sum_{t=1}^{n} x_{ti}^2}$$

이며 $D_n^{-1}X'\varepsilon$의 분산-공분산행렬 $Var(D_n^{-1}X'\varepsilon)$은 $n\to\infty$일때

$$Var(D_n^{-1}X'\varepsilon)=D_n^{-1}X'\,Var(\varepsilon)\,XD_n^{-1} \longrightarrow V$$

임을 알 수 있다. 이제 ε_t를 충분히 큰 임의의 자연수 m에 대해서 다음과 같이 쓸 수 있으므로

$$\varepsilon_t=M_{tm}+R_{tm}\ ,$$

여기서 M_{tm}은 강정상 m-종속과정(strictly stationary m-dependent process)로서

$$\begin{cases} M_{tm}=\eta_t+\sum_{i=1}^{m}[\ \Pi_{j=0}^{i-1}\ (\phi+\theta\eta_{t-j})]\ \eta_{t-i} \\ R_{tm}=\varepsilon_t-M_{tm} \end{cases} \tag{2.4}$$

Hwang과 Basawa(1993 b)의 강정상 m-종속과정의 가중중심극한정리(weighted CLT)에 의해서 $n\to\infty$ 일때

$$D_n^{-1}X'\varepsilon \xrightarrow{d} N(0,\ V) \tag{2.5}$$

임을 증명할 수 있다.

(2.3)과 (2.5)로부터 (ii)의 결과식을 얻을 수 있으며

$$D_n(\widehat{\beta_n}-\beta) \xrightarrow{d} N(0,\ A^{-1}VA^{-1})$$

(i)은 $n\to\infty$일때 $D_n\to\infty$임을 이용해서 쉽게 유도된다.

AR(1) · RCA(1) · MBL(1) 모형에서 공통적으로 나타나는 ϕ는 AR(1)의 경우에는 자기 회귀계수를 나타내는 반면 RCA(1)과 MBL(1)에서는 시점 t 에서의 자기 회귀계수의 기대값(expected value)을 의미한다. 제안될 선형성 검정통계량을 만들기 위해서는 ϕ 의 조건부 최소제곱 "추정량" (conditional least squares estimator ; CLS)

$$\widetilde{\phi_n} = \sum_{t=2}^{n} \varepsilon_t \varepsilon_{t-1} \ / \ \sum_{t=2}^{n} \varepsilon_{t-1}^2 \tag{2.6}$$

이 필요하며 $\widetilde{\phi_n}$ 은 다음과 같은 성질을 가지고 있다.

정리 2.2 식 (2.6)에서 주어진 ϕ의 CLS 추정량 $\widetilde{\phi_n}$ 은 AR(1), RCA(1), MBL(1) 모두에서

$$\widetilde{\phi_n} \xrightarrow{a.s.} \phi, \quad n \to \infty$$

증명 AR(1)의 경우는 널리 알려진 사실(c.f. Brockwell and Davis(1991))이고 RCA(1) 경우의 증명과정은 MBL(1)과 유사하므로 MBL(1)의 경우만 증명하도록 하자.

$$\begin{aligned}\widetilde{\phi_n} - \phi &= \sum \varepsilon_t \varepsilon_{t-1} \ / \ \sum \varepsilon_{t-1}^2 - \phi \\ &= \sum \varepsilon_{t-1} (\theta \eta_t \varepsilon_{t-1} + \eta_t) \ / \ \sum \varepsilon_{t-1}^2\end{aligned}$$

그런데 $\{\varepsilon_{t-1}(\theta \eta_t \varepsilon_{t-1} + \eta_t)\}$이 강정상이면서 에르고딕(strictly stationary and ergodic)이므로 에르고딕 정리(ergodic theorem)에 의해서

$$n^{-1} \sum \varepsilon_{t-1}(\theta \eta_t \varepsilon_{t-1} + \eta_t) \xrightarrow{a.s.} E(\varepsilon_0(\theta \eta_1 \varepsilon_0 + \eta_1)] = 0$$

$$n^{-1} \sum \varepsilon_{t-1}^2 \xrightarrow{a.s.} E\varepsilon_1^2 = \sigma_\varepsilon^2$$

이 성립하므로

$$\widetilde{\phi_n} \xrightarrow{a.s.} \phi$$

ε_{t-1}이 주어진 조건하에서 ε_t의 조건부 기대값과 조건부 분산 $E(\varepsilon_t | \varepsilon_{t-1})$과 $Var(\varepsilon_t | \varepsilon_{t-1})$을 생각해보면, $E(\varepsilon_t | \varepsilon_{t-1})$은 AR(1) · RCA(1) · MBL(1)에서 모두

$$E(\varepsilon_t | \varepsilon_{t-1}) = \phi \varepsilon_{t-1} \tag{2.7}$$

이다. 하지만 조건부 분산은 모형에 따라서 그 형태가 다르며

$$Var(\varepsilon_t | \varepsilon_{t-1}) = \begin{cases} \sigma_\eta^2 & : \ \mathrm{AR}(1) \\ \sigma_z^2 \varepsilon_{t-1}^2 + \sigma_\eta^2 & : \ \mathrm{RCA}(1) \\ (\theta \varepsilon_{t-1} + 1)^2 \sigma_\eta^2 & : \ \mathrm{MBL}(1) \end{cases} \tag{2.8}$$

임을 쉽게 증명할 수 있다. 즉 RCA(1) · MBL(1) 에서는 조건부 분산이 ε_{t-1} 의 함수인 반면 AR(1)에서는 상수로서 σ_η^2 임을 알 수 있다. 식 (2.7)과 (2.8)을 이용해서 ε_t 의 선형성 가설검정을 수행해보자.

이제 다음의 가설을 고려하자.

$$\begin{cases} H_0: & \varepsilon_t \sim \mathrm{AR}(1) \\ H_1: & \varepsilon_t \sim \mathrm{RCA}(1) \end{cases} \tag{2.9}$$

그런데 $Var(\varepsilon_t|\varepsilon_{t-1})$은 $[\ \varepsilon_t - E(\varepsilon_t|\varepsilon_{t-1})]^2 = (\varepsilon_t - \phi\varepsilon_{t-1})^2$으로 간주할 수 있으므로, 정리 2.2에 의해서 H_0와 H_1 모두에서 다음과 같은 근사식을 생각할 수 있다.

$$(\varepsilon_t - \widetilde{\phi_n}\varepsilon_{t-1})^2 \approx Var(\varepsilon_t|\varepsilon_{t-1}) \tag{2.10}$$

여기에서 $\widetilde{\phi_n}$ 는 식 (2.6)을 의미한다.

이 식과 조건부 분산에 관한 식(2.8)을 이용하여 다음과 같은 검정절차를 제안한다.

< 1단계 > 잔차 $\{e_t = y_t - x_t'\widehat{\beta_n},\ \ t=1, \cdots, n\}$를 구한다.

< 2단계 > $(e_t - \widehat{\phi_n}e_{t-1})^2$ 을 e_{t-1}^2 에 회귀시킨다. 즉

$$(e_t - \widehat{\phi_n}e_{t-1})^2 = \alpha_0 + \alpha_1 e_{t-1}^2 + \xi_t, \qquad t=2, \cdots, n$$

여기서 $\{\xi_t\}$ 는 i.i.d. $N(0,\ \sigma_\xi^2)$을 가정하기로 하며, $\widehat{\phi_n}$ 은 $\widetilde{\phi_n}$ 의 표현식에서 ε_t 대신 e_t 를 이용한 것이다. 즉

$$\widehat{\phi_n} = \sum_{t=2}^{n} e_t e_{t-1} \Big/ \sum_{t=2}^{n} e_{t-1}^2 \tag{2.11}$$

ξ_t 의 정규성 가정에 대해 부연 설명하면 다음과 같다. ξ_t 는 식(2.10)에서의 근사오차를 나타내며 근사오차는 ϕ를 $\widehat{\phi_n}$으로, ε_t를 잔차 e_t 로 바꾸는 과정에서 발생한다. 그런데 $\widehat{\phi_n}$과 $\widehat{\beta_n}$은 각각 ϕ와 β의 일치추정량이므로 n이 적당히 큰 경우에는 근사오차 $\{\xi_t\}$는 0을 중심으로 분포되어 있을 것이며 실제로 모의실험 결과 ξ_t는 0을 중심으로 거의 좌우대칭의 종모양형태를 보이므로 ξ_t의 정규성가정은 타당성을 가진다.

< 3단계 > 검정통계량은 <2단계>에서 얻어진 분산분석표의 F-통계량으로서 기각역은 다음과 같다.

$$\mathrm{F} = \frac{\mathrm{MSR}}{\mathrm{MSE}} > F(1,\ n-3\ ;\ \alpha)$$

이제 대립가설이 MBL(1)의 경우를 생각해 보자.

$$\begin{cases} H_0: & \varepsilon_t \sim \mathrm{AR}(1) \\ H_1: & \varepsilon_t \sim \mathrm{MBL}(1) \end{cases} \tag{2.12}$$

제안된 가설검정 절차는 대립가설이 RCA(1)의 경우와 매우 유사하다.

< 1단계 > RCA(1) 경우와 동일

< 2단계 > $(e_t - \widehat{\phi_n} e_{t-1})^2$ 을 e_{t-1} 과 e^2_{t-1} 에 회귀시킨다. 즉

$$(e_t - \widehat{\phi_n} e_{t-1})^2 = \alpha_0 + \alpha_1 e_{t-1} + \alpha_2 e^2_{t-1} + \xi_t, \quad t = 2, \cdots, n$$

여기서 ξ_t 와 $\widehat{\phi_n}$ 은 앞에서의 의미와 동일하다.

< 3단계 > 만일 <2단계>에서 얻은 분산분석표의 F-통계량이 $F(2, n-4 ; \alpha)$보다 크면 H_0를 기각시킨다.

<표 2.1>은 대립가설이 RCA(1)인 경우에 제안된 검정통계량의 검정력(power)을 모의실험을 통해서 구해본 것이다. 모의실험은 SAS IML 을 이용하였으며 실험의 조건은 다음과 같다.

- 표본크기 = 100
- 유의수준 = 0.05
- 총반복 = 100
- 검정력 = 총반복수 100회중 F-통계량이 $F(1, 97 ; 0.05) = 3.96$을 넘은 비율

난수(random number)는 다음과 같은 모형에서 얻어졌으며

$$\begin{cases} y_t = 1 + \ln(t) + \varepsilon_t \\ \varepsilon_t = (\phi + z_t)\varepsilon_{t-1} + \eta_t, \qquad z_t \sim N(0, \sigma_z^2), \ \eta_t \sim N(0, 1) \end{cases}$$

9개의 ϕ 값 0 ; ± 0.2 ; ± 0.4 ; ± 0.6 ; ± 0.8 과 5개의 σ_z 의 값 0 ; 0.2 ; 0.4 ; 0.6 ; 0.8 의 조합인 총 45개의 모수점에서 모의실험된 검정력은 다음과 같다.

<표 2.1> $H_0 : \varepsilon_t \sim$ AR(1), $H_1 : \varepsilon_t \sim$ RCA(1)의 검정력

σ_z \ ϕ	- 0.7	-0.5	-0.3	-0.1	0	0.1	0.3	0.5	0.7
0	0.02	0.03	0.04	0.05	0.05	0.05	0.03	0.04	0.03
0.2	0.11	0.05	0.16	0.12	0.06	0.13	0.07	0.04	0.16
0.4	0.47	0.35	0.23	0.25	0.22	0.19	0.29	0.35	0.57
0.6	0.92	0.73	0.65	0.59	0.58	0.64	0.61	0.66	0.87
0.8	0.93	0.91	0.86	0.75	0.85	0.82	0.91	0.92	0.98

이 표에서 보면 $\sigma_z=0$인 경우에는 실험조건의 유의수준 $\alpha=0.05$ 와 차이가 거의 없음을 알 수 있으며 고정된 ϕ 값에서 σ_z 가 커질수록 검정력이 증가하고 있음을 볼 수 있다. 한가지 불만족스러운 점은 σ_z 가 작은값 (0.2 혹은 0.4)에서 검정력이 그다지 좋지 않으나, 큰 무리가 없으면 AR(1) 모형으로서 오차항을 모형화시키는 데이터 분석가의 입장에서 보면 σ_z 가 작다는 것은 $\phi+z_t$가 ϕ와 같다고 간주될 수 있으므로 그다지 문제가 될 것 같지 않다.

3. 대립가설이 고정계수모형인 경우의 오차의 선형성 검정

본 절에서는 고정계수 모형인 TAR(1)과 EAR(1)의 경우에 오차의 선형성 검정에 대해서 알아보기로 하자. ε_t가 TAR(1)을 따르는 경우

$$\varepsilon_t = \phi_1 \varepsilon_{t-1}^{+} + \phi_2 \varepsilon_{t-1}^{-} + \eta_t$$

선형성 검정가설은

$$\begin{cases} H_0: & \phi_1 = \phi_2 \\ H_1: & \phi_1 \neq \phi_2 \end{cases} \tag{3.1}$$

이다. ϕ_1과 ϕ_2의 조건부 최소제곱 추정량의 극한분포는 Petruccelli 와 Woolford(1984)에 의해 다음과 같음이 알려져 있다.

$$\begin{aligned} \widehat{\phi_1} &= \textstyle\sum \varepsilon_t \varepsilon_{t-1}^{+} \;/\; \sum(\varepsilon_{t-1}^{+})^2 \\ \widehat{\phi_2} &= \textstyle\sum \varepsilon_t \varepsilon_{t-1}^{-} \;/\; \sum(\varepsilon_{t-1}^{-})^2 \end{aligned} \tag{3.2}$$

$$\sqrt{n}\begin{pmatrix} \widehat{\phi_1}-\phi_1 \\ \widehat{\phi_2}-\phi_2 \end{pmatrix} \xrightarrow{d} N_2(0, \Sigma), \tag{3.3}$$

$$\text{여기서,}\quad \Sigma = \begin{pmatrix} E(\varepsilon_1^{+})^2 & 0 \\ 0 & E(\varepsilon_1^{-})^2 \end{pmatrix}$$

그러므로 선형성 가설 검정 통계량 W_n 을 다음과 같이 정의하면

$$W_n = n(\widehat{\phi_1}-\widehat{\phi_2})^2 [\;\widehat{E}(\varepsilon_1^{+})^2 + \widehat{E}(\varepsilon_1^{-})^2] \tag{3.4}$$

H_0하에서 W_n은

$$W_n \longrightarrow \chi_1^2, \quad n \rightarrow \infty$$

이므로 유의수준 α에서의 기각역은 다음과 같다.

$$W_n > \chi_1^2(\alpha)$$

식(3.4)에서 $\widehat{E}(\varepsilon_1^+)^2$과 $\widehat{E}(\varepsilon_1^-)^2$은 $E(\varepsilon_1^+)^2$과 $E(\varepsilon_1^-)^2$의 일치추정량으로서 다음과 같다.

$$E(\varepsilon_1^+)^2 = n^{-1} \sum_{t=1}^{n} (\varepsilon_t^+)^2$$

$$E(\varepsilon_1^-)^2 = n^{-1} \sum_{t=1}^{n} (\varepsilon_t^-)^2 \tag{3.5}$$

ε_t는 관측불가능한 오차이므로 W_n을 실제로 계산하기 위해서는 식 (3.4), (3.5)에서 나타나는 모든 ε_t를 잔차 e_t로 바꾸어주면 될 것이다. ε_t가 EAR(1)을 따르는 경우에는

$$\varepsilon_t = \phi_1 \varepsilon_{t-1} + \phi_2 \varepsilon_{t-1} \exp(-\phi_3 \varepsilon_{t-1}^2) + \eta_t$$

선형성 검정 가설은 다음과 같으므로

$$H_0 : \phi_2 = 0$$
$$H_1 : \phi_2 \neq 0 \tag{3.6}$$

ϕ_2의 조건부 최소제곱추정량의 극한분포를 이용해서 가설검정을 수행할 수 있겠다.

<표 3-1>은 오차항이 TAR(1) 모형을 따를때 선형성 가설 (3.1)을 검정하기 위해 제안된 식 (3.4)의 검정통계량 W_n의 모의실험된 검정력을 여러가지 (ϕ_1, ϕ_2)값에서 구해본 것이다. 표본크기는 100으로 하였으며 유의수준은 $\alpha = 0.05$를 택하였다. 표에서 보여주고 있는 검정력은 총반복수 100 회중 W_n 통계량이 자유도가 1인 카이제곱분포의 상위 5% 값 (3.86)을 넘는 비율을 의미한다. SAS IML을 이용해서 다음과 같은 모형에서 $\{y_t,\ t = 1, \cdots, 100\}$를 발생시켰다.

$$\begin{cases} y_t = 1 + \ln(t) + \varepsilon_t \\ \varepsilon_t = \phi_1 \varepsilon_{t-1}^+ + \phi_2 \varepsilon_{t-1}^- + \eta_t, \qquad \eta_t \sim N(0, 1). \end{cases}$$

$|\phi_1 - \phi_2| = 0$일 때 TAR(1) 모형이 AR(1) 모형이 되므로 6개의 δ값 $(|\phi_1 - \phi_2| = \delta)$; $\delta = 0, 0.1, 0.4, 0.6, 1.0, 2.2$에서 각각 2개의 (ϕ_1, ϕ_2)를 택하여, 즉 총 12개의 (ϕ_1, ϕ_2) 값에서 모의실험을 행하였다.

이 표를 보면 δ가 커짐에 따라 검정력이 증가해서 δ=2.2일때 거의 1이 되는 것을 볼수 있으며 특히 δ가 0.4 이상일때 δ의 증가에 따른 검정력의 증가 속도가 대단히 빠른 것을 알 수 있다. 하지만 δ가 작은 경우에 검정력이 그다지 좋지 않으므로 제안된 W_n은 오차항 ε_t가 상당히 비선형성을 보이는 경우에는 효과적이지만 ε_t의 비선형성이 그다지 심하지 않은 경우에는 비선형성을 탐지하는 능력이 떨어지는 것을 알 수 있다. 그 이유는 검정력계산시에 오차항

<표 3.1> H_0 : $\varepsilon_t \sim$ AR(1) , H_1 : $\varepsilon_t \sim$ TAR(1)의 검정력

δ	(ϕ_1, ϕ_2)	검정력	δ	(ϕ_1, ϕ_2)	검정력
0	(0.1, 0.1)	0.07	0.6	(-0.1, 0.5)	0.51
	(-0.5, -0.5)	0.07		(-0.9, -0.3)	0.66
0.1	(0.8, 0.9)	0.13	1.0	(-0.8, 0.2)	0.80
	(-0.1, -0.2)	0.14		(-0.5, 0.5)	0.80
0.4	(-0.3, 0.1)	0.38	2.2	(-2.0, 0.2)	0.99
	(-0.8, -0.4)	0.47		(0.2, -2.0)	1.00

ε_t를 잔차 e_t로 바꾸는 과정에서 발생되는 오차때문인 것으로 판단된다. 하지만 δ가 작은 경우에 TAR(1)은 AR(1)모형과 유사하므로 W_n을 실제로 사용하는데는 큰 무리가 없을 것같다.

일반적인 일차 비선형 시계열 모형 $\{\varepsilon_t\}$가 강정상과정이면서 알려진 함수 H 에 대해서 다음 식을 만족시킬 때

$$\varepsilon_t = H_\theta(\varepsilon_{t-1}) + \eta_t \tag{3.7}$$

적당한 H 의 조건하에서 모수 θ : $r\times 1$ 벡터의 CLS 추정량 $\widehat{\theta_n}$ 의 극한분포가 다변량 정규분포임은 Klimko와 Nelson(1978) 에 의해 증명되었다. 즉,

$$\sqrt{n}(\widehat{\theta_n} - \theta) \xrightarrow{d} N_r(0, \Gamma(\theta)) \tag{3.8}$$

$\Gamma(\theta)$ 의 형태에 대해서는 Klimko와 Nelson(1978)을 참고하기 바란다. 이 결과를 EAR(1)을 포함한 연관된 여러가지 모형에 응용시킨 내용은 Tong(1990)의 5장을 참조하면 좋을 것이다. 따라서 오차항 $\{\varepsilon_t\}$가 (3.7) 모형을 따를때 선형성 가설검정이 모수적 검정(parametric test)로서 θ의 함수 $g(\theta)$로써 다음과 같이 표현될 경우

$$H_0 : \ g(\theta) = 0 \ : \ s\times 1 \text{ 벡터}$$
$$H_1 : \ g(\theta) \neq 0 \tag{3.9}$$

식 (3.8)로부터 다음을 얻을 수 있으므로

$$\sqrt{n}\,[\ g(\widehat{\theta_n}) - g(\theta)\ ] \xrightarrow{d} N_s(0,\ D(\theta)\Gamma(\theta)D(\theta)')$$

여기서

$$D(\theta) = \frac{\partial}{\partial\theta} g(\theta) : \ s\times r \text{ 행렬 },$$

가설검정 (3.9)을 위한 검정통계량 W_n을 다음과 같이 정의하면

$$W_n = ng(\widehat{\theta_n})'[\ D(\widehat{\theta_n})\Gamma(\widehat{\theta_n})D(\widehat{\theta_n})'\ ]^{-1}g(\widehat{\theta_n}) \tag{3.10}$$

H_0 하에서 W_n의 분포는 자유도가 s인 χ^2-분포이므로 유의수준 α에서의 기각역은 다음과 같다.

$$W_n > \chi_s^2(\alpha)$$

끝으로 식(3.7)의 모형에서 η_t의 분포가 명시된 경우, Hwang과 Basawa(1993 a)는 θ의 최우추정량이 CLS 추정량보다 극한분포의 분산이 더 작다는 의미에서 우수하며 우도비 검정, Wald 검정 그리고 스코어 검정 통계량 세가지 모두 동일한 극한분포를 가짐을 증명하였으므로 η_t의 분포가 명시된 경우에는 최우추정량을 이용한 이들 세가지 검정통계량을 이용해서 선형성 가설검정을 수행하는 것이 좋을 것이다.

참 고 문 헌

[1] An, H and Cheng, B. (1991). A Kolmogorov-Smirnov type statistic with application to test for nonlinearity in time series, *International Statistics Review*, Vol. 59, 287-307.

[2] Brockwell, P.D. and Davis, R.A. (1991). *Time Series : Theory and Methods*, Springer Verlag, New York.

[3] Durbin, J. and Watson, G.S. (1950, 1951). Testing for serial correlation in least squares regression, I, II, *Biometrika*, Vol. 37 & 38, 409-428, 159-178.

[4] Feigin, P.D. and Tweedie, R.L. (1985). Random coefficient autoregressive processes : A Markov chain analysis of stationarity and finitness of moments, *Journal of Time Series Analysis*, Vol. 6, 1-14.

[5] Fuller, W.A. (1976). *Introcduction to Statistical Time Series*, Wiley, New York.

[6] Hwang, S.Y. and Basawa, I.V. (1993 a). Asymptotic optimal inference for a class of nonlinear time series models, *Stochastic Process and Their Applications*, Vol. 46, 91-113

[7] Hwang, S.Y. and Basawa, I.V. (1993 b). Parameter estimation in a regression model with random coefficient autoregressive errors. *Journal of Statistical Planning and Inference*, Vol. 36, 57-67.

[8] Kendall, M.G. (1953). The analysis of economic time series - part I ; Prices, *Journal of the Royal Statistical Society*, Series A, 11-25.

[9] Klimko, L.A. and Nelson, P.I. (1978). On conditional least squares estimation for stochastic processes, *Annals of Statistics*, Vol. 6, 629-642

[10] Ljung, G.M. and Box, G.E.P. (1978). On a measure of lack of fit in time series models, *Biometrika*, Vol. 65, 297-303.

[11] Nicholls, D.F. and Quinn, B.G. (1982). *Random Coefficient Autoregressive Models : An Introduction,* Springer Verlag, New York.

[12] Petruccelli, J.D. and Woolford, S.W. (1984). A threshold AR(1), *Journal of Applied Probability*, Vol. 21, 270-278.

[13] Tong, H. (1983). *Threshold Models in Non-linear Time Series Analysis,* Lecture Notes in Statistics, Vol. 21, Springer-Verlag, New York.

[14] Tong, H. (1990). *Non-linear Time Series,* Oxford University Press, Oxford.

A Study on a Regression Model with Nonlinear Time Series Errors[3)]

Sun Young Hwang[4)]

Abstract

This paper is concerned with a regression model with nonlinear time series errors. Testing procedures for linearity of error terms are studied. To this end, large-sample properties of estimators of regression parameters and autoregression parameter are obtained. These results are then used to develope test statistics for testing linearity of errors. Some simulation studies are shown.

---

3) This paper was supported by NON DIRECTED RESEARCH FUND, Korea Research Foundation, 1993.

4) Statistics Department, Sookmyung Women's Univ., Seoul, 140-742, KOREA.