응용통계연구 제 8권 2호
1995년 9월 pp. 163-177.

일곱장 포커 약(約)의 확률

김 태 성[1], 채 경 철[2]

요 약

이 글에서는, 중첩이나 누락으로 그 확률을 구하기 힘든 사건에 대해 경우의 수를 체계적으로 분류하여 구하는 방법의 일 예로서 7장 포커 약의 확률을 구한다. 7장 포커는 '1인 7장 스터드 카드'를 가정한다.

1. 서론

포커 약(約, 속칭 족보)의 확률을 구하는 문제는 Mendenhall et al.(1990, pp.73)등의 여러 확률 및 통계학 교재에서 예제로 쓰이고 있다. 그 예제들은 5장 포커의 경우가 대부분인데, 그나마 여러 약들의 확률을 체계적으로 구할 수 있는 방법을 알려주는 것이 아니기 때문에 각 약의 확률을 구하는 데 각기 다른 방법을 동원하는 일발성 문제에 그치기도 한다. 실제로 구해 보면 5장 포커의 경우는 어렵지 않게 구할 수 있다. 그러나 6장 이상 포커의 경우에는 그리 간단하지가 않다. 예를 들어 끗수(속칭 숫자)만 보았을 때는 스트레이트(straight)이고 수츠(suits, 속칭 무늬)로만 보았을 때는 플러시(flush)인 패가 스트레이트 플러시(straight flush)가 아닌 경우가 생긴다. 물론 이 패의 약은 플러시이다. 이 경우 외에도 얼핏 생각할 때와 다른, 여러가지 예상하기 힘든 겹치거나 빠뜨리는 경우가 생긴다.

이 글의 목적은 쉽게 그 경우의 수를 구하기 힘든 사건에 대해 체계적인 분류를 함으로써 비교적 쉽게 확률을 구하는 방법을 보이려는 데 있으며 7장 포커 약의 확률을 예로 들어 설명할 것이다. 포커게임에는 여러가지 종류가 있지만 이 글에서는 1명이 하는 7장 스터드 포커게임(1 person seven-card stud)을 가정한다. 즉, 한 명이 52장에서 7장의 카드를 무작위로 고르는 경우에 발생할 수 있는 $\binom{52}{7}$가지의 패(hand)를 약(約)으로 분류한다. 이러한 가정은 실제 포커게임과 거리가 있지만 복잡한 분류의 예를 들어 보이는 데에 더 적당하다. 실제 포커게임에 관한 최근 논문으로는 일본의 Sakai(1986), Sakaguchi(1988)등을 들 수 있겠는데, 이들은 불완전 정보의 활용이나 게임이론으로 접근한 논문들로서 본 글의 내용과는 많은 차이가 있다.

분류방법은 크게 두 단계로 나뉜다. 첫째 단계에서는 같은 끗수, 즉 동일한 숫자가 몇장 있는가에 따라, 패들을 *4C, FH, 3C, 2P, 1P, NP*로 나눈다. 둘째 단계에서는 이들을 다시 연속인 끗수와 같은 수츠를 갖는 유형에 따라 세분함으로써 스트레이트류와 플러시류를 가려낸다.

1) (305-701) 대전시 유성구 구성동 373-1, 한국과학기술원 경영과학과.
2) (305-701) 대전시 유성구 구성동 373-1, 한국과학기술원 경영과학과.

2. 같은 끗수를 갖는 유형에 따른 분류

집합을 이용하여 전체의 경우들을 구분해보겠다. 먼저 7장 포커패 H들의 전체집합 U를 다음과 같이 정의하자.

$$U = \{H \mid H = 52\text{장의 카드 1벌}(deck)\text{ 중에서 7장으로 만든 조합}\}$$

H는 7장의 카드로 이루어진 한 패(hand)를 나타낸다. 포커패의 전체 가짓수 $n(U)$는 $\binom{52}{7}$이며, 따라서 어느 한 패가 나올 확률은 $1/\binom{52}{7}$ 이다.

편의상 A, J, Q, K를 1,11,12,13이라 하고 한 패에 들어 있는 각 끗수(1,...,13)의 장수를 $X_i(i=1,\dots,13)$ 라고 하면, $X_1,\dots,X_{13}$ 의 결합분포는 다변량 초기하분포(multivariate hypergeometric distribution)를 따름을 Johnson & Kotz(1969, pp. 300)를 참조하여 알 수 있다.

다변량 초기하분포를 이용하여 7장 포커패 전체 경우를 다음 6가지의 상호 배타적인 집합으로 나눌 수 있다. 아래에 정의된 집합들은 스트레이트류와 플러시류를 무시한 분류이므로 통상적인 포커의 약과는 다를 수 있다는 점을 주의해야 한다.

정의 2.1

$$4C = \{H \mid \exists i, \quad s.t. \ X_i = 4\}$$
$$FH = \{H \mid \exists i,j, \quad s.t. \ X_i = 3, \ 2 \le X_j \le 3\}$$
$$3C = \{H \mid \exists i, \quad s.t. \ (X_i = 3, \ \forall_{j \ne i} \ X_j \le 1)\}$$
$$2P = \{H \mid \exists i,j, \quad s.t. \ (X_i = 2, X_j = 2, \ \forall_{k \ne i,j} \ X_k \le 2)\}$$
$$1P = \{H \mid \exists i, \quad s.t. \ (X_i = 2, \ \forall_{j \ne i} \ X_j \le 1)\}$$
$$NP = \{H \mid \forall i, \quad X_i \le 1\}. \qquad \square$$

$4C$가 되는 X_i들의 조합은 (4,3), (4,2,1), (4,1,1,1)의 세가지가 있다. 아래의 각 경우수의 식들이 중간점(·)을 중심으로 나뉘어 있는데, 점 앞부분은 끗수들을 선택하는 경우수이고 점 뒷부분은 골라진 각 끗수에서 뽑히는 장수를 나타낸다. 예를 들어, X_i의 구성이 (4,3)으로 된 $4C$의 경우엔 $\binom{13}{2}$와 $\binom{2}{1}$이 각각 두가지 끗수의 조합과 그 중 4장을 뽑을 끗수를 고르는 가짓수이고, 4장을 뽑을 끗수와 3장을 뽑을 끗수를 결정한 다음 $\binom{4}{4}$와 $\binom{4}{3}$으로 각 끗수에서 4장, 3장씩 뽑는다. 앞에서 언급한 바와 같이 X_i들의 결합분포가 다변량 초기하분포를 따르므로, 점 뒷부분은 이 분포와 연관이 있다. 나머지 (4,2,1)과 (4,1,1,1)의 경우에 대해서도 구해보면, $4C$의 경우의 수는

$$n(4C) = \binom{13}{2}\binom{2}{1} \cdot \binom{4}{4}\binom{4}{3} + \binom{13}{3}\binom{3}{1}\binom{2}{1} \cdot \binom{4}{4}\binom{4}{2}\binom{4}{1} + \binom{13}{4}\binom{4}{1} \cdot \binom{4}{4}\binom{4}{1}^3$$

이 된다. FH가 되는 X_i들의 조합은 (3,3,1), (3,2,2), (3,2,1,1)의 세가지이고 그 경우의 수는

$$n(FH)=\binom{13}{3}\binom{3}{2}\cdot\binom{4}{3}^2\binom{4}{1}+\binom{13}{3}\binom{3}{1}\cdot\binom{4}{3}\binom{4}{2}^2+\binom{13}{4}\binom{4}{1}\binom{3}{1}\cdot\binom{4}{3}\binom{4}{2}\binom{4}{1}^2$$

이다. 유사한 방법으로 $3C$에 대해서도 구해보면, X_i들의 조합은 (3,1,1,1,1)이고 경우의 수는

$$n(3C)=\binom{13}{5}\binom{5}{1}\cdot\binom{4}{3}\binom{4}{1}^4 \tag{2-1}$$

이 된다. $2P$와 $1P$가 되는 X_i들의 조합은 각각 (2,2,2,1), (2,2,1,1,1)과 (2,1,1,1,1,1)이고 그 경우의 수는 다음과 같다.

$$n(2P)=\binom{13}{4}\binom{4}{3}\cdot\binom{4}{2}^3\binom{4}{1}$$

$$+\binom{13}{5}\binom{5}{2}\cdot\binom{4}{2}^2\binom{4}{1}^3. \tag{2-2}$$

$$n(1P)=\binom{13}{6}\binom{6}{1}\cdot\binom{4}{2}\binom{4}{1}^5. \tag{2-3}$$

마지막으로, NP는 X_i들의 조합이 (1,1,1,1,1,1,1)일 때만 가능하므로,

$$n(NP)=\binom{13}{7}\cdot\binom{4}{1}^7$$

이다.

3. 3C와 2P의 세부분류

포커약은 크게 끗수가 같은 페어(pair)류, 끗수가 연속인 스트레이트(straight)류, 수츠가 같은 플러시(flush)류로 나눌 수 있다. 앞절에서는 페어류에 대한 분류를 했다. 이제 스트레이트류와 플러시류에 대한 분류를 하기 위해서 다음과 같은 새로운 집합들을 정의하자.

정의 3.1 연속되는 끗수가 5장 이상인 패들을 상호 배타적인 세 집합으로 정의한다.

$ST_n=\{H|$ 끗수 연속인 카드가 n장 뿐임.$\}$, $n=5,6,7$.

$$ST=\bigcup_{n=5}^{7}ST_n$$ □

정의 3.2 같은 수츠의 카드가 5장 이상인 패들을 상호 배타적인 세 집합으로 정의한다.

$FL_n=\{H|$ 같은 수츠인 카드가 n장 뿐임.$\}$, $n=5,6,7$.

$$FL = \bigcup_{n=5}^{7} FL_n \qquad \square$$

정의 3.3 같은 수츠로 연속되는 끗수가 5장 이상인 패들을 상호 배타적인 세 집합으로 정의한다.

$$SF_n = \{H \mid \text{같은 수츠로서 끗수 연속인 카드가 } n\text{장 뿐임.}\}, \quad n=5,6,7.$$

$$SF = \bigcup_{n=5}^{7} SF_n \qquad \square$$

스트레이트류와 플러시류에 대한 분류를 하려면 7장의 카드가 5가지 이상의 끗수로 구성되어 있어야 하므로 4가지 이하의 끗수로 구성되어 있는 *4C*와 *FH*는 더 이상 분류를 계속할 필요가 없다. 즉 *4C*와 *FH*이면서 스트레이트류나 플러시류의 약을 가질 수 없다.

이제 *3C, 2P, 1P, NP*의 경우들 각각에 대해 위의 정의에 따라 스트레이트류와 플러시류로 분류해보겠다. *3C*이하의 페어류 보다는 스트레이트류나 플러시류가 높은 약을 갖는다. 따라서 각 경우에 그보다 더 높은 약을 가려내는 과정을 거치게 하는 것이다.

앞에 정의된 집합들을 이용하여 *3C*이면서 스트레이트류나 플러시류를 갖는 경우들을 분류하기 위해서는 다음과 같은 집합들(주로 교집합)의 경우의 수를 알 필요가 있다. 각 집합들의 경우의 수는 주로 (2-1)식의 점(·) 앞뒤를 변형시켜서 얻을 수 있다.

*3C*에서는 ST_5가 가능한데, 그 경우의 수는 (2-1)식의 $\binom{13}{5}$를 $\binom{10}{1}$로 바꾸면 얻을 수 있다. 그 이유는 13가지 끗수 중에서 5가지를 고를때 끗수가 5장 연속되는 경우는 1~5, 2~6, ..., 9~13, 10~1 의 10가지이기 때문이다. 즉,

$$n(3C \cap ST_5) = \binom{10}{1}\binom{5}{1} \cdot \binom{4}{3}\binom{4}{1}^4 = 51200.$$

*3C*에서는 FL_5가 가능한데, 그 경우의 수는 (2-1)식의 $\binom{4}{1}^4$를 $\binom{3}{1}\binom{1}{1}^3$으로 바꾸면 얻을 수 있다. 그 이유는 *3C*의 경우 X_i들의 조합은 (3,1,1,1,1)인데, (2-1)식의 $\binom{4}{3}$으로 X_i가 3인 끗수의 수츠들을 고르고 $\binom{3}{1}$로 X_i가 1인 카드 네장중 한장의 수츠를 골라 FL_5의 수츠로 정하면 $\binom{1}{1}^3$으로 나머지 카드가 이 수츠를 따르게 되기 때문이다. 그러므로,

$$n(3C \cap FL_5) = \binom{13}{5}\binom{5}{1} \cdot \binom{4}{3}\binom{3}{1}\binom{1}{1}^3 = 77220.$$

*3C*에서 SF_5는 앞에서 ST_5와 FL_5에 적용한 방법을 동시에 적용하면 된다. 즉, (2-1)식의

$\binom{13}{5}$를 $\binom{10}{1}$로 바꾸고 $\binom{4}{1}^4$를 $\binom{3}{1}\binom{1}{1}^3$으로 바꾸면 그 경우의 수를 얻을 수 있다. 따라서,

$$n(3C \cap SF_5) = \binom{10}{1}\binom{5}{1} \cdot \binom{4}{3}\binom{3}{1}\binom{1}{1}^3 = 600.$$

이상의 $3C$이면서 스트레이트류나 플러시류의 약을 갖는 경우들을 정리하면 다음과 같다.

$n(STRAIGHT\ FLUSH|_{3C}) = n(3C \cap SF_5) = 600.$

$n(FLUSH|_{3C}) = n(3C \cap FL_5) - n(3C \cap SF_5) = 76620.$

$n(STRAIGHT|_{3C}) = n(3C \cap ST_5) - n(3C \cap SF_5) = 50600.$

따라서 약이 *THREE OF A KIND*가 되는 경우의 수는 $n(3C)$에서 위의 경우의 수들을 뺀 것과 같다.

$$\begin{aligned} n(THREE\ OF\ A\ KIND) &= n(3C) - n(STRAIGHT|_{3C}) - n(FLUSH|_{3C}) \\ &\quad - n(STRAIGHT\ FLUSH|_{3C}) = 6461620. \end{aligned}$$

$2P$가 되는 X_i들의 조합은 (2,2,2,1)과 (2,2,1,1,1)의 두가지가 있는데, 첫번째 조합은 4가지 끗수로 구성되므로 스트레이트류나 플러시류의 약을 갖지 않는다. 따라서 두번째의 조합만이 고려대상이 된다. 따라서 $3C$와 유사한 방법으로 주로 (2-2)식을 변형시켜서 결과를 얻을 수 있다.

약이 *TWO PAIR*가 되는 경우의 수를 구하기 위해 필요한 집합들과 그 정리한 결과는 다음과 같다.(상세한 분류 내용은 부록 A.1.에 첨부하였다.)

$$\begin{aligned} n(TWO\ PAIR) &= n(2P) - n(STRAIGHT|_{2P}) - n(FLUSH|_{2P}) \\ &\quad - n(STRAIGHT\ FLUSH|_{2P}) \\ &= n(2P) - \{n(2P \cap ST_5) - n(2P \cap SF_5)\} - \{n(2P \cap FL_5) - n(2P \cap SF_5)\} \\ &\quad - n(2P \cap SF_5) = 31433400. \end{aligned}$$

4. $1P$와 NP의 세부분류

$1P$의 X_i 조합은 (2,1,1,1,1,1) 한가지이며 6가지 끗수로 구성되어 있다. 그러므로 $3C$와 $2P$에서와는 달리 ST_5와 FL_5외에 ST_6과 FL_6도 가능하다. 또 앞에서 ST_5와 FL_5의 교집합은 SF_5였는데, $1P$에서는 그렇지 않은 경우도 발생한다.

$1P$에서 ST_6이 되는 경우 즉, 끗수가 6장 연속되는 경우는 1~6, 2~7, ..., 8~13, 9~1의 9가지이다. $\binom{9}{1}$로 9가지 중에서 1가지를 고른 다음, $\binom{6}{1}$로 6가지 끗수 중 페어 끗수를 고른다. 그 다음 $\binom{4}{2}$로 페어 즉, X_i가 2인 끗수의 수츠를 고르고, $\binom{4}{1}^5$로 X_i가 1인 나머지 5가지 끗수

들의 수츠를 고른다. 따라서,

$$n(1P \cap ST_6) = \binom{9}{1}\binom{6}{1} \cdot \binom{4}{2}\binom{4}{1}^5 = 331776.$$

ST_5가 되는 경우는 연속되는 끗수들이 1~5, 10~1인 경우 2가지와 2~6, ..., 9~13인 경우 8가지로 나뉜다. 예를 들어 1~5 ST의 경우 나머지 끗수는 7,8,9,10,11,12,13의 7가지 중 하나이고, 2~6의 경우 나머지 끗수는 8,9,10,11,12,13의 6가지 중 하나이다. 그러므로,

$$n(1P \cap ST_5) = \left[\binom{2}{1}\binom{7}{1} + \binom{8}{1}\binom{6}{1} \right] \binom{6}{1} \cdot \binom{4}{2}\binom{4}{1}^5 2285568. \qquad (4\text{-}1)$$

FL_6이 되는 경우의 수는 (2-3)식의 $\binom{4}{2}\binom{4}{1}^5$를 $\binom{4}{2}\binom{2}{1}\binom{1}{1}^4$로 고치면 얻을 수 있다. 즉,

$$n(1P \cap FL_6) = \binom{13}{6}\binom{6}{1} \cdot \binom{4}{2}\binom{2}{1}\binom{1}{1}^4 = 123552.$$

FL_5는 페어를 제외하고 FL_5가 되는 경우($\binom{2}{1}$은 FL_5의 수츠를 페어수츠 이외의 두가지 수츠 중에서 택일하는 경우임.)와 페어 중 한장 포함해서 되는 경우($\binom{5}{1}\binom{3}{1}$은 페어가 아닌 즉, X_i가 1인 5가지 끗수중 하나가 FL_5수츠와 다른 수츠를 가지는 경우임.)로 나뉜다. 따라서,

$$n(1P \cap FL_5) = \binom{13}{6}\binom{6}{1} \cdot \binom{4}{2}\binom{2}{1}\binom{1}{1}^4 + \binom{13}{6}\binom{6}{1} \cdot \binom{4}{2}\binom{2}{1}\binom{1}{1}^3\binom{5}{1}\binom{3}{1} = 1976832.$$

ST_6이면서 SF_6이 되는 경우는 ST_6과 FL_6에 적용한 방법을 동시에 적용하면 된다. 그러므로,

$$n(1P \cap ST_6 \cap SF_6) = \binom{9}{1}\binom{6}{1} \cdot \binom{4}{2}\binom{2}{1}\binom{1}{1}^4 = 648.$$

ST_6이면서 SF_5가 되는 경우는 페어가 되는 끗수 즉, 페어끗수가 크기 순서로 정렬된 6가지 끗수중에서 가운데에 있는 넷 중 하나인 경우(4-2)와 양끝 중 하나인 경우(4-3)로 나뉜다. 양끝 중 하나인 것도 다시 SF_5가 페어끗수를 포함한 경우와 포함하지 않은 경우로 나뉜다. 페어끗수가 가운데 넷 중 하나인 경우엔 $\binom{4}{1}\binom{4}{2}$로 가운데 네가지 끗수중 페어가 될 끗수를 골라 그 수츠 둘을 고르고, $\binom{2}{1}\binom{1}{1}^2$로 그 중 한가지를 SF_5의 수츠로 정해서 페어끗수를 제외한 나머지 끗수의 카드 3장이 이 수츠를 따르게 한다. 그리고 $\binom{2}{1}\binom{1}{1}\binom{3}{1}$로 크기 순서로 정렬된 6가지 끗수중에서 양 끝 끗수중 하나를 골라 SF_5의 수츠를 따르게 하고 나머지 한장은 다른 수츠를 갖게 했다. 즉,

$$n(1P \cap ST_6 \cap SF_5) = \binom{9}{1}\binom{4}{1} \cdot \binom{4}{2}\binom{2}{1}\binom{1}{1}^2 \cdot \binom{2}{1}\binom{1}{1}\binom{3}{1} \qquad (4\text{-}2)$$

$$+ \binom{9}{1}\binom{2}{1} \cdot \binom{4}{2}\left[\binom{2}{1}\binom{1}{1}^3\binom{3}{1} + \binom{2}{1}\binom{1}{1}^4 \right] = 3456. \qquad (4\text{-}3)$$

ST_5이면서 SF_5가 되는 경우는 (4-1)식을 이용해서 구한다. 이 경우엔 페어를 제외하고 SF_5(4-4)인가 포함해서 SF_5(4-5)인가로 나뉜다. (4-1)식의 $\binom{6}{1}$은 6가지 끗수중에서 ST_5를 이루는 5가지 끗수를 제외한 나머지 한가지를 페어끗수로 선택하느냐 아니면 ST_5를 이루는 5가지 끗수 중에서 하나를 페어끗수로 선택하느냐에 따라 (4-4)식의 $\binom{1}{1}$과 (4-5)식의 $\binom{5}{1}$로 나뉜다. 이제 (4-4)식은 페어를 제외한 5장을 가지고 $\binom{4}{1}\binom{1}{1}^4$로 SF_5를 만든 후에, $\binom{4}{2}$로 페어의 수츠를 정해주면 된다. (4-5)식에서는 $\binom{4}{2}$로 페어의 수츠를 정하고, $\binom{2}{1}\binom{1}{1}^3$으로 그 중 한가지를 SF_5의 수츠로 하고 $\binom{4}{1}$로 나머지 한장의 수츠를 정한다. 따라서,

$$n(1P \cap ST_5 \cap SF_5) = \left[\binom{2}{1}\binom{7}{1} + \binom{8}{1}\binom{6}{1} \right] \binom{1}{1} \cdot \binom{4}{1}\binom{1}{1}^4\binom{4}{2} \qquad (4\text{-}4)$$

$$+ \left[\binom{2}{1}\binom{7}{1} + \binom{8}{1}\binom{6}{1} \right] \binom{5}{1} \cdot \binom{4}{2}\binom{2}{1}\binom{1}{1}^3\binom{4}{1} = 16368. \qquad (4\text{-}5)$$

*1P*의 경우가 *3C*, *2P*와 다른 점은 *ST*이면서 *FL*이어도 *SF*가 아닐 수 있다는 것이다. 이러한 경우에는 *FLUSH*로 구분되어야 하므로, 이 경우들을 *ST*에서 제거하기로 한다(더 낮은 약에 높은 약의 경우의 수가 포함되어 있으므로). 먼저 ST_6에서 FL_5도 되지만 SF_5는 안되는 경우는 페어끗수가 크기 순서로 정렬된 6가지 끗수중에서 양끝 끗수 중 하나인가(4-6) 아니면 가운데 넷중 하나인가로 나뉘고, 가운데 넷중 하나인 경우는 다시 페어 중 하나를 포함해서 FL_5인가(4-7), 페어 두장 모두 제외해서 FL_5인가(4-8)로 나뉜다. (4-6)식에서는 $\binom{2}{1}\binom{4}{1}$로 페어끗수를 양끝 끗수 중 하나를 택하면서 가운데 네가지 끗수중 수츠가 다른 끗수를 선택하고, $\binom{4}{2}\binom{2}{1}\binom{1}{1}^3$으로 페어중 한장을 포함해서 FL_5를 만든 다음, $\binom{3}{1}$로 앞에서 선택한 끗수의 수츠를 FL_5와 다르게 결정한다. (4-7)식에서는 $\binom{4}{1}\binom{3}{1}$로 페어끗수의 위치와 FL_5수츠와 다른 수츠를 갖을 끗수의 위치를 정한 후, $\binom{4}{2}\binom{2}{1}\binom{1}{1}^3$으로 페어중 한 장을 포함해서 FL_5를 만든

다음, $\binom{3}{1}$로 미리 고른 끗수를 갖는 카드의 수츠를 FL_5수츠와 다르게 정한다. (4-8)식을 보면 $\binom{4}{1}\binom{4}{2}$로 페어끗수의 위치와 페어의 수츠를 정하고 $\binom{2}{1}\binom{1}{1}^4$로 앞에서 고른 페어의 수츠를 제외한 두가지 중 하나를 FL_5의 수츠로 정한다. 그러므로,

$$n(1P\cap ST_6\cap(FL_5-SF_5))= \binom{9}{1}\binom{2}{1}\binom{4}{1}\cdot\binom{4}{2}\binom{2}{1}\binom{1}{1}^3\binom{3}{1} \tag{4-6}$$

$$+\binom{9}{1}\binom{4}{1}\binom{3}{1}\cdot\binom{4}{2}\binom{2}{1}\binom{1}{1}^3\binom{3}{1} \tag{4-7}$$

$$+\binom{9}{1}\binom{4}{1}\cdot\binom{4}{2}\binom{2}{1}\binom{1}{1}^4 = 6912. \tag{4-8}$$

또, ST_5에서 FL_5도 되지만 SF_5는 안되는 경우가 발생하는데, 이 경우는 ST_5의 다섯가지 끗수에 페어끗수가 포함되느냐 아니냐(4-9)로 나뉜다. 포함되는 경우는 다시 페어 중 하나를 포함해서 FL_5가 되는 경우(4-10)와 페어 두장 모두 제외해서 FL_5가 되는 경우(4-11)로 나뉜다. 먼저 페어를 포함하지 않는 경우 즉 (4-9)식을 보면, $\binom{1}{1}\binom{5}{1}$로 페어끗수의 위치와 FL_5수츠와 다른 수츠를 갖을 끗수의 위치를 정하고, $\binom{4}{2}\binom{2}{1}\binom{1}{1}^3$으로 페어의 두가지 수츠 중 하나로 FL_5의 수츠를 정하고, $\binom{3}{1}$로 미리 고른 끗수를 갖는 카드의 수츠를 FL_5와 다르게 결정한다. ST_5에 페어끗수가 포함되고 FL_5에 페어 중 한장을 포함하는 (4-10)식은 $\binom{5}{1}\binom{4}{1}$로 페어끗수의 위치와 FL_5와 다른 수츠를 갖을 끗수의 위치를 결정한다. 마지막으로 페어없이 FL_5가 되는 경우인 (4-11)식에서는 $\binom{5}{1}\binom{4}{2}$로 페어끗수의 위치와 수츠를 정하고 $\binom{2}{1}\binom{1}{1}^4$로 앞에서 고른 페어의 수츠를 제외한 두가지 중 하나를 FL_5의 수츠로 정한다. 따라서,

$$n(1P\cap ST_5\cap(FL_5-SF_5))= \left[\binom{2}{1}\binom{7}{1}+\binom{8}{1}\binom{6}{1}\right]\binom{1}{1}\binom{5}{1}\cdot\binom{4}{2}\binom{2}{1}\binom{1}{1}^3\binom{3}{1} \tag{4-9}$$

$$+\left[\binom{2}{1}\binom{7}{1}+\binom{8}{1}\binom{6}{1}\right]\binom{5}{1}\binom{4}{1}\cdot\binom{4}{2}\binom{2}{1}\binom{1}{1}^3\binom{3}{1} \tag{4-10}$$

$$+\left[\binom{2}{1}\binom{7}{1}+\binom{8}{1}\binom{6}{1}\right]\binom{5}{1}\cdot\binom{4}{2}\binom{2}{1}\binom{1}{1}^4 = 59520. \tag{4-11}$$

이상의 $1P$이면서 스트레이트류나 플러시류의 약을 갖는 경우들을 정리하면 다음과 같다.

$$n(STRAIGHT\ FLUSH|_{1P}) = n(1P \cap ST_6 \cap SF_6) + n(1P \cap ST_6 \cap SF_5) + n(1P \cap ST_5 \cap SF_5) = 20472.$$

$$n(FLUSH|_{1P}) = n(1P \cap FL_6) + n(1P \cap FL_5) - n(1P \cap ST_6 \cap SF_6) - n(1P \cap ST_6 \cap SF_5) - n(1P \cap ST_5 \cap SF_5) = 2079912.$$

$$n(STRAIGHT|_{1P}) = n(1P \cap ST_6) + n(1P \cap ST_5) - n(1P \cap ST_6 \cap SF_6) - n(1P \cap ST_6 \cap SF_5) - n(1P \cap ST_5 \cap SF_5) - n(1P \cap ST_6 \cap (FL_5 - SF_5)) - n(1P \cap ST_5 \cap (FL_5 - SF_5)) = 2530440.$$

따라서 약이 *ONE PAIR*가 되는 경우의 수는 $n(1P)$에서 위의 경우들을 제외하면 된다.

$$n(ONE\ PAIR) = n(1P) - n(STRAIGHT|_{1P}) - n(FLUSH|_{1P}) - n(STRAIGHT\ FLUSH|_{1P}) = 58627800.$$

*NP*의 X_i조합은 (1,1,1,1,1,1,1) 뿐이다. 즉 7가지의 끗수로 구성된다. 따라서 ST_5와 FL_5, ST_6과 FL_6, 뿐만 아니라 ST_7과 FL_7도 가능하다. 또 *1P*경우와 마찬가지로 *ST*와 *FL*이면서 *SF*가 아닌 경우들이 있게 된다. *NP*의 분류방법은 *1P*경우와 대체로 유사하나 세부적으로는 다른 방법을 사용하여 구해야 한다.

약이 *NO PAIR*가 되는 경우의 수를 구하기 위해 필요한 집합들과 그 정리한 결과는 다음과 같다.(상세한 분류 내용은 부록 A.2.에 첨부하였다.)

$$n(STRAIGHT\ FLUSH|_{NP}) = n(NP \cap ST_7 \cap SF_7) + n(NP \cap ST_7 \cap SF_6) + n(NP \cap ST_7 \cap SF_5) + n(NP \cap ST_6 \cap SF_6) + n(NP \cap ST_6 \cap SF_5) + n(NP \cap ST_5 \cap SF_5) = 16912.$$

$$n(FLUSH|_{NP}) = n(NP \cap FL_7) + n(NP \cap FL_6) + n(NP \cap FL_5) - n(NP \cap ST_7 \cap SF_7) - n(NP \cap ST_7 \cap SF_6) - n(NP \cap ST_7 \cap SF_5) - n(NP \cap ST_6 \cap SF_6) - n(NP \cap ST_6 \cap SF_5) - n(NP \cap ST_5 \cap SF_5) = 1431392.$$

$$n(STRAIGHT|_{NP}) = n(NP \cap ST_7) + n(NP \cap ST_6) + n(NP \cap ST_5) - n(NP \cap ST_7 \cap SF_7) - n(NP \cap ST_7 \cap SF_6) - n(NP \cap ST_7 \cap SF_5) - n(NP \cap ST_6 \cap SF_6) - n(NP \cap ST_6 \cap SF_5) - n(NP \cap ST_5 \cap SF_5) - n(NP \cap ST_7 \cap (FL_6 - SF)) - n(NP \cap ST_7 \cap (FL_5 - SF)) - n(NP \cap ST_6 \cap (FL_6 - SF)) - n(NP \cap ST_6 \cap (FL_5 - SF)) - n(NP \cap ST_5 \cap (FL_6 - SF)) - n(NP \cap ST_5 \cap (FL_5 - SF)) = 3372180.$$

따라서 약이 *NO PAIR*가 되는 경우의 수는 $n(NP)$에서 위의 경우들을 제외하면 된다.

$$n(NO\ PAIR) = n(NP) - n(STRAIGHT|_{NP}) - n(FLUSH|_{NP})$$

$$- \; n(STRAIGHT\ FLUSH|_{NP}) = 23294460.$$

5. 각 약(約)들의 확률

앞에서 구한 경우의 수를 높은 약부터 정리하고 그 확률을 구해보면 다음과 같다.

약	경우의 수	확률
STRAIGHT FLUSH	41,584	0.000311
FOUR OF A KIND	224,848	0.001681
FULL HOUSE	3,473,184	0.025961
FLUSH	4,047,644	0.030255
STRAIGHT	6,180,020	0.046194
THREE OF A KIND	6,461,620	0.048299
TWO PAIR	31,433,400	0.234955
ONE PAIR	58,627,800	0.438225
NO PAIR	23,294,460	0.174119
계	133,784,560	1.000000

*STRAIGHT FLUSH*중에서 *10,J,Q,K,A*로 구성되는 약을 *ROYAL FLUSH* 또는 *ROYAL STRAIGHT FLUSH*라고 하는데, 이 글에서는 이 약의 경우의 수 4,324를 지면 관계상 따로 구별하지 않고 *STRAIGHT FLUSH*에 포함시켜 놓았다. *ROYAL FLUSH*의 경우의 수를 구하는 과정도 앞에서와 맥을 같이하므로 그 상세한 전개는 흥미있는 독자들에게 맡긴다.

감사의 글

본 논문을 심사해 주시고 조언을 해주신 심사위원과 편집위원께 깊은 감사를 드립니다.

참 고 문 헌

[1] Johnson, N.L. and Kotz, S. (1969). *Discrete Distributions*, John Wiley & Sons, New York.

[2] Mendenhall, W., Wackerly, D.D. and Scheaffer R.L. (1990). *Mathematical Statistics with Applications,* PWS-KENT, Boston.

[3] Sakaguchi, M. (1988). The Value of Sample Information in High-Hand-Wins Poker, *Mathematica Japonica,* Vol. 33, 587-607.

[4] Sakai, S. (1986). A Model for Real Poker with an Upper Bound of Assets, *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 50, 149-163.

부 록

A.1. $2P$의 세부분류의 詳述

$2P$에서 ST_5의 경우의 수는 (2-2)식의 $\binom{13}{5}$를 $\binom{10}{1}$로 바꾸면 얻을 수 있다. 즉,

$$n(2P \cap ST_5) = \binom{10}{1}\binom{5}{2} \cdot \binom{4}{2}^2 \binom{4}{1}^3 = 230400.$$

$2P$에서 FL_5의 경우의 수는 (2-2)식의 $\binom{4}{2}^2 \binom{4}{1}^3$를 $\binom{4}{2}\binom{2}{1}\binom{1}{1}^2\binom{1}{1}\binom{3}{1}$로 바꿔서 얻을 수 있다. $\binom{4}{2}$로 하나의 페어(pair)의 수츠를 정하고, $\binom{2}{1}$로 X_i가 1인 카드 세장중 한장의 수츠를 골라 FL_5의 수츠로 정하고, $\binom{1}{1}^2$로 나머지 두장 카드가 FL_5 수츠를 따르게 한다. 이제 남은 페어의 수츠를 고르는 경우의 수는 두장중 하나는 $\binom{1}{1}$로 FL_5 수츠를 따라야 하고 다른 한장은 $\binom{3}{1}$로 나머지 세가지 수츠중 하나를 고르게 한다. 따라서,

$$n(2P \cap FL_5) = \binom{13}{5}\binom{5}{2} \cdot \binom{4}{2}\binom{2}{1}\binom{1}{1}^3\binom{3}{1} = 463320.$$

$2P$에서 SF_5는 앞에서 ST_5와 FL_5에 적용한 방법을 동시에 적용하면 된다. 그러므로,

$$n(2P \cap SF_5) = \binom{10}{1}\binom{5}{2} \cdot \binom{4}{2}\binom{2}{1}\binom{1}{1}^3\binom{3}{1} = 3600.$$

A.2. NP의 세부분류의 詳述

NP이면서 끗수가 7장 연속되는 경우는 1~7, 2~8, ..., 7~13, 8~1의 8가지이다. 그러므로,

$$n(NP \cap ST_7) = \binom{8}{1} \cdot \binom{4}{1}^7 = 131072.$$

NP이면서 끗수가 6장 연속되는 경우는 1~6, 9~1의 $\binom{2}{1}\binom{6}{1}$가지와 2~7, ..., 8~13의 $\binom{7}{1}\binom{5}{1}$가지가 있다. 예를 들어 1~6인 경우엔 나머지 한장은 8,9,10,11,12,13의 6가지 중 하나이고, 2~7인 경우엔 나머지 한장은 9,10,11,12,13의 5가지 중 하나이다. 따라서,

$$n(NP \cap ST_6) = \left[\binom{2}{1}\binom{6}{1} + \binom{7}{1}\binom{5}{1} \right] \cdot \binom{4}{1}^7 = 770048.$$

NP이면서 끗수가 5장 연속되는 경우는 1~5, 10~1의 $\binom{2}{1}\binom{7}{2}$가지와 2~6, ..., 9~13의 $\binom{8}{1}\binom{6}{2}$가지가 있다. 예를 들어 1~5인 경우엔 나머지 두장은 7,8,9,10,11,12,13의 7가지 중 둘이고, 2~6인 경우엔 나머지 두장은 8,9,10,11,12,13의 6가지 중 둘이다. 즉,

$$n(NP \cap ST_5) = \left[\binom{2}{1}\binom{7}{2} + \binom{8}{1}\binom{6}{2} \right] \cdot \binom{4}{1}^7 = 2654208.$$

모든 카드의 수츠가 같은 FL_7이 되는 경우의 수는 다음 식과 같다.

$$n(NP \cap FL_7) = \binom{13}{7}\binom{7}{7} \cdot \binom{4}{1}\binom{1}{1}^6 = 6864.$$

FL_6이 되는 경우 수는 $\binom{3}{1}$로 나머지 한장의 수츠를 FL_6의 수츠와 다르게 결정하면 구할 수 있다. 그러므로,

$$n(NP \cap FL_6) = \binom{13}{7}\binom{7}{6} \cdot \binom{4}{1}\binom{1}{1}^5\binom{3}{1} = 144144.$$

FL_5의 경우엔 $\binom{3}{1}^2$로 나머지 두장의 수츠를 결정한다. 따라서,

$$n(NP \cap FL_5) = \binom{13}{7}\binom{7}{5} \cdot \binom{4}{1}\binom{1}{1}^4\binom{3}{1}^2 = 1297296.$$

ST_7이면서 SF가 되는 경우는 식(A-1), (A-2), (A-3)의 세가지가 있다. 그 중 끗수가 연속인 7장 모두 한가지 수츠인 경우는

$$n(NP \cap ST_7 \cap SF_7) = \binom{8}{1} \cdot \binom{4}{1} = 32 \qquad \text{(A-1)}$$

가 되고, 연속인 6장이 같은 수츠인 경우는, 연속인 끗수중 맨 처음이나 나중 1장의 수츠가 SF_6과 다른 경우이다. 즉,

$$n(NP \cap ST_7 \cap SF_6) = \binom{8}{1} \cdot \binom{4}{1}\binom{2}{1}\binom{3}{1} = 192. \qquad \text{(A-2)}$$

마지막으로 연속인 5장의 수츠가 같은 경우는, ST_7의 맨처음과 나중($\binom{3}{1}^2$), 처음두장 또는 나중두장($\binom{2}{1}\binom{4}{1}\binom{3}{1}$)의 수츠가 SF_5와 다른 경우이다. 그러므로,

$$n(NP\cap ST_7\cap SF_5) = \binom{8}{1}\cdot\binom{4}{1}\left[\binom{3}{1}^2+\binom{2}{1}\binom{4}{1}\binom{3}{1}\right] = 1056. \qquad \text{(A-3)}$$

ST_6이면서 SF가 되는 경우는 식(A-4), (A-5)의 두가지가 있다. 그 중 ST_6이 되는 6장 카드의 수츠가 모두 같은 경우는, $\binom{4}{1}^2$로 ST_6의 수츠와 연속이 아닌 나머지 한장의 수츠를 결정하면 된다. 따라서,

$$n(NP\cap ST_6\cap SF_6) = \left[\binom{2}{1}\binom{6}{1}+\binom{7}{1}\binom{5}{1}\right]\cdot\binom{4}{1}^2 = 752. \qquad \text{(A-4)}$$

다음으로 ST_6이면서 끗수가 연속인 5장의 수츠가 모두 같은 경우의 수는 (A-4)의 $\binom{4}{1}^2$에 ST_6의 양쪽 끝 카드중 하나가 SF_5와 다른 수츠를 갖을 경우의 수인 $\binom{2}{1}\binom{3}{1}$를 곱해서 구한다. 즉,

$$n(NP\cap ST_6\cap SF_5) = \left[\binom{2}{1}\binom{6}{1}+\binom{7}{1}\binom{5}{1}\right]\cdot\binom{4}{1}^2\binom{2}{1}\binom{3}{1} = 4512. \qquad \text{(A-5)}$$

ST_5이면서 SF_5가 되는 경우는, $\binom{4}{1}^3$로 ST_5의 수츠와 ST_5가 아닌 나머지 두장의 수츠를 결정한다. 그러므로,

$$n(NP\cap ST_5\cap SF_5) = \left[\binom{2}{1}\binom{7}{2}+\binom{8}{1}\binom{6}{2}\right]\cdot\binom{4}{1}^3 = 10368.$$

$1P$경우와 마찬가지로 NP에서도 ST인 동시에 FL이지만 SF는 되지 않는 경우들이 있다. 그러한 경우들을 ST_7에서부터 제거해보자. ST_7이면서 FL이지만 SF는 되지 않는 경우는 식 (A-6)과 (A-7)의 두가지가 있다. 그 중 FL_6이지만 SF가 되지 않는 경우의 수는, $\binom{4}{1}$로 FL_6의 수츠를 고르고, $\binom{3}{1}^2$로 ST_7의 크기 순서로 정렬된 7가지 끗수 중에서 가운데 3장 중 하나가 FL_6과 다른 수츠를 갖게 하면 된다. 따라서,

$$n(NP\cap ST_7\cap(FL_6-SF)) = \binom{8}{1}\cdot\binom{4}{1}\binom{3}{1}^2 = 288. \qquad \text{(A-6)}$$

FL_5이지만 SF가 되지 않는 경우는, FL_5와 다른 수츠를 가질 카드 두장을 골라 고른 카드의 수츠를 $\binom{3}{1}^2$로 결정하면 된다. 끗수의 크기 순서로 정렬된 7장에서 다른 수츠를 갖을 카드 두장을 고를 때에는 맨앞 두장, 맨뒤 두장, 양끝 한장씩 뽑는 3가지 경우는 제외해야한다. 즉,

$$n(NP \cap ST_7 \cap (FL_5 - SF)) = \binom{8}{1} \cdot \binom{4}{1}\left[\binom{7}{2} - 3\right] \binom{3}{1}^2 = 5184. \qquad \text{(A-7)}$$

ST_6이면서 FL이지만 SF는 되지 않는 경우는 식(A-8)과 (A-9)의 두가지가 있다. 그 중 FL_6이지만 SF가 되지 않는 경우는, ST_6의 가운데 4장 중 한장의 수츠가 다른 경우를 $\binom{4}{1}\binom{3}{1}$로 결정하면 된다. 그러므로,

$$n(NP \cap ST_6 \cap (FL_6 - SF)) = \left[\binom{2}{1}\binom{6}{1} + \binom{7}{1}\binom{5}{1}\right] \cdot \binom{4}{1}\left\{\binom{4}{1}\binom{3}{1}\right\} = 2256. \qquad \text{(A-8)}$$

FL_5이지만 SF가 되지 않는 경우의 수는, $\binom{4}{1}\binom{1}{1}$로 ST_6의 가운데 4장 중 한장과 ST_6에 속하지 않은 한장을 선택하거나 또는 ST_6에서 2장을 선택해서 $\binom{3}{1}^2$로 FL_5와 다른 수츠를 갖게 하면 구할 수 있다. 따라서,

$$n(NP \cap ST_6 \cap (FL_5 - SF))$$
$$= \left[\binom{2}{1}\binom{6}{1} + \binom{7}{1}\binom{5}{1}\right] \cdot \binom{4}{1}\left\{\binom{4}{1}\binom{1}{1} + \binom{6}{2}\right\}\binom{3}{1}^2 = 32148. \qquad \text{(A-9)}$$

ST_5이면서 FL이지만 SF는 되지 않는 경우는 식(A-10)과 (A-11)의 두가지가 있다. 그 중 FL_6이지만 SF가 되지 않는 경우는, $\binom{5}{1}\binom{3}{1}$로 ST_5중에서 한장이 FL_6과 다른 수츠를 가지면 된다. 즉,

$$n(NP \cap ST_5 \cap (FL_6 - SF))$$
$$= \left[\binom{2}{1}\binom{7}{2} + \binom{8}{1}\binom{6}{2}\right] \binom{4}{1} \cdot \left\{\binom{5}{1}\binom{3}{1}\right\} = 9720. \qquad \text{(A-10)}$$

FL_5이지만 SF가 되지 않는 경우는, $\binom{5}{1}\binom{2}{1}$로 ST_5에서 한장, ST_5에 속하지 않은 두장중 한장을 선택하거나 또는 $\binom{5}{2}$로 ST_5에서 2장을 선택해서, $\binom{3}{1}^2$로 FL_5와 다른 수츠를 갖게 한다. 그러므로,

$$n(NP \cap ST_5 \cap (FL_5 - SF))$$
$$= \left[\binom{2}{1}\binom{7}{2} + \binom{8}{1}\binom{6}{2}\right] \binom{4}{1} \cdot \left\{\left[\binom{5}{1}\binom{2}{1} + \binom{5}{2}\right] \binom{3}{1}^2\right\} = 116640. \qquad \text{(A-11)}$$

Probabilities of Hands in 1 Person Seven-Card Stud

T. S. Kim[3], K. C. Chae[4]

Abstract

In this tutorial note, we present an instructive approach to computing probabilities of hands in 1 person seven-card stud.

3) Dept. of Management Science, KAIST, Taejon-shi, 305-701 KOREA.
4) Dept. of Management Science, KAIST, Taejon-shi, 305-701 KOREA.