응용통계연구 제 8권 2호
1995년 9월 pp. 65-75.

설명변수 차원 축소에 관한 비모수적 검정[1)]

서 한 손[2)]

요 약

설명변수 축소방법들인 Sliced Inverse Regression과 Principal Hessian Directions 에서는 효과적차원축소공간의 차원을 결정하기 위하여 설명변수의 정규성과 충분한 수의 자료가 요구되는 점근적검정(asymptotic test)을 제시하고 있다. 본 연구에서는 Cook과 Weisberg(1991)가 제안하였던 순열검정통계량(permutation test statistic)을 개발하여 SIR과 PHD에서 제시된 점근적검정통계량과 검정력을 비교하기로 한다.

1. 서 론

회귀분석의 문제에 있어서 반응변수 y와 p차원의 설명변수 x간의 다음과 같은 모형을 고려해 보자.

$$y=f(\beta_1 \mathrm{x}, \beta_2 \mathrm{x}, \ldots, \beta_d \mathrm{x}, \varepsilon), \quad \mathrm{d} \le \mathrm{p} \tag{1.1}$$

여기서 β들은 알려지지 않은 1xp 벡터이고, ε는 x에 독립이며, f는 R^{d+1} 공간상의 임의의 알려지지 않은 함수이다. 이러한 모형이 성립한다면 p차원의 설명변수, 즉 p개의 설명변수 x가 아닌 d개의 새로운 설명변수 $\beta_1 \mathrm{x}, \beta_2 \mathrm{x}, \ldots, \beta_d \mathrm{x}$ 만을 사용함으로서 y를 설명하는데 충분하다.

예를 들면, $x_1, x_2, ..x_5$ 의 다섯 개의 설명변수가 고려되는 회귀분석 문제에서 실제 회귀모형이 다음과 같다고 하자.

$$y=\frac{x_1+x_2}{x_1+x_3+x_4+x_5}+\varepsilon$$

이때 회귀모형을 추정하는데 필요한 설명변수는 $w_1=x_1+x_2$ 와 $w_2=x_1+x_3+x_4+x_5$ 로써 2 개가된다.

Li(1991)는 이러한 β_i들의 선형조합을 효과적차원축소방향(effective dimension reduction direction)이라고 정의하였으며 $B=(\beta_1^T, \ldots, \beta_d^T)$라고 할 때, B에 의해 생성된 선형공간 $S(B)$를 효과적차원축소공간(e.d.r. space)이라고 정의하였다. d가 작을 때에는 β_i들을 효과적으로 추정해서 필요한 설명변수의 차원을 줄일 수 있는데 이러한 차원축소기법으로는 SIR (Li,

1) 이 논문은 1994년도 연세대학교 학술연구비에 의하여 연구되었음.
2) (133-701) 서울시 광진구 모진동 93-1, 건국대학교 상경대학 응용통계학과.

1991), SAVE (Cook & Weisberg, 1991), PHD (LI, 1992)등이 있다.

설명변수의 차원이 줄면 모형을 추정하는데 오류가 발생할 수 있는 가능성이 상대적으로 줄게 되는 등 많은 잇점을 기대할 수 있다. 그러나 적합하게 차원이 축소된 설명변수를 추정하기에 앞서, 설명변수의 차원, 즉 β_i들의 갯수를 결정하는 것이 선행되어야만 한다. 대부분의 방법들이 설명변수의 정규성가정 아래 자료의 수가 충분할 때 적용될 수 있는 점근적검정을 제시하고 있으나 보편적으로 이러한 가정은 만족되기가 힘들다. 본 연구에서는 이러한 가정에 보다 덜 민감한 순열검정(permutation test)을 제안하며 SIR과 PHD방법에서 점근적검정과 검정력을 비교해 보기로 한다.

2. 설명변수 차원축소방법

2.1 SIR (Sliced Inversed Regression)

SIR은 설명변수에 대하여 다음과 같은 조건을 요구한다.

조건 2.1 (Li, 1991)

R^p공간의 모든 b에 대하여 조건부 기대값 $E(b\mathrm{x}|\beta_1\mathrm{x},\dots,\beta_d\mathrm{x})$는 $\beta_1\mathrm{x},\dots,\beta_d\mathrm{x}$에 선형이다. 즉, 임의의 상수 c_0 , c_1 ..., c_d 에 대하여

$E(b\mathrm{x}|\beta_1\mathrm{x},\dots,\beta_d\mathrm{x})=c_0+c_1\beta_1\mathrm{x}+\cdot\cdot\cdot+c_d\beta_d\mathrm{x}$ 이다.

x의 분포가 정규분포를 비롯하여, 타원형대칭분포(elliptically contoured dist.)를 따를 때 위와 같은 조건은 만족된다. Σ_{xx}을 x의 공분산 행렬이라고 할 때, Li (1991)에 따르면, 식 (1.1)과 조건(2.1)에서, 중심화된역회귀분석곡선, $E(\mathrm{x}|y)-E(\mathrm{x})$는 $\beta_k\Sigma_{\mathrm{xx}}$ $(k=1,\dots,d)$에 의해 생성된 선형부분공간에 포함되어 있다. 따라서 x를 $z=\Sigma_{\mathrm{xx}}^{-1/2}[\mathrm{x}-E(\mathrm{x})]$로 표준화하고 $\eta_k=\beta_k\Sigma_{\mathrm{xx}}^{1/2}(k=1,\dots,d)$ 라고 하면 식 (1.1)은 $y=f(\eta_1 z,\dots,\eta_d z,\varepsilon)$ 가 되어 조건 (2.1) 아래서 표준화된역회귀분석곡선 $E(z|y)$는 표준화된효과적차원축소방향 $\eta_1,\dots,\eta_d$에 의해 생성된 선형공간에 포함된다. 그리고 다음과 같은 정리가 성립하여 $cov[E(z|y)]$의 고유벡터를 구함으로서 효과적차원공간을 추정하게 된다.

정리 2.1 (Li, 1991)

공분산 행렬 $cov[E(z|y)]$는 η_k들에 직교 적인 방향에 대해 퇴화(degenerate) 한다. 그러므로 $cov[E(z|y)]$의 가장 큰 d개 고유치(eigenvalue)에 관련된 고유벡터(eigenvector) $\eta_k(k=1,\dots,d)$가 표준화된효과적차원축소방향이 되며 원래의 척도로 재변환 해보면

$\eta_k \Sigma^{-1/2} (k=1, \ldots, d)$가 효과적차원축소공간 상에 있게 된다.

증명 $\eta = (\eta_1^T, \ldots, \eta_d^T)$이라고 할 때, $E(z|y) \in S(\eta)$이므로 스펙트럴 분해에 따라 d×d 정규직교(orthonormal)행렬 Γ와 d×d 대각(diagonal)행렬 D에 의해 $cov[E(z|y)] = \eta \Gamma D \Gamma' \eta'$이 된다. 그리고 $S(\eta\Gamma) = S(\eta)$이므로 정리를 증명하게 된다.

이상의 과정을 통해 $B = (\beta_1^T, \ldots, \beta_d^T)$에 의해 생성되는 효과적차원축소공간 $S(B)$를 추정하는 것이 중요 하지만, 공간의 차원(dimension) d, 즉 유효한 β_i들의 갯수에 관해 먼저 결정할 필요가 있다. 이에 대한 검정은 $cov[E(z|y)]$의 고유치 $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_p$의 점근분포에 근거하여, 만약 x가 정규분포를 한다면 식 (1.1)이 성립할 때 $n(p-d)\overline{\lambda}_{p-d}$는 점근적으로 자유도 $(p-d)(H-d-1)$를 갖는 χ^2분포를 따른다는 사실을 이용할 수 있다 (Li, 1991). 따라서 $n(p-d)\overline{\lambda}_{p-d}$가 그에 해당하는 χ^2값 보다 크다면 모형에 적어도 $d+1$개의 유의한 구성요소가 필요하다고 추론할 수 있다.
정리 2.1을 표본에 적용하여 다음과 같은 과정을 통해 효과적차원축소방향을 추정 할 수 있다 (Li, 1991).

① x를 표준화하여 z를 구한다. $z_i = \hat{\Sigma}_{xx}^{-1/2} (x_i - \overline{x}) \quad (i=1, \ldots, n)$.

② y를 H 개의 분할구간, $I_1, \ldots, I_H$로 나누어서 각 분할구간안에서 z_i들의 평균, $\widehat{m}_h (h=1, \ldots, H)$를 계산한다. 즉 $\widehat{m}_h = \sum_{y_i \in I_h} z_i \Big/ \sum_{i=1}^{n} \delta_h(y_i)$, 여기서 $\delta_h(y_i)$는 y_i가 h번째 분할구간 I_h에 속하면 1 그렇지 않으면 0 값을 가진다.

③ 가중화된 공분산 행렬 $\hat{V} = (1/n) \sum_{h=1}^{H} \sum_{i=1}^{n} \delta_h(y_i)\, \widehat{m}_h\, \widehat{m}_h'$ 을 만들고 $\hat{V}$ 의 고유벡터중 d개의 가장 큰 고유벡터(행벡터)를 $\hat{\eta}_k (k=1, \ldots, d)$ 라고 하면 $\hat{\beta}_k = \hat{\eta}_k \hat{\Sigma}_{xx}^{-1/2}$ $(k=1, \ldots, d)$이다.

이러한 표본추정치의 모수에의 점근성은 분할구간의 수에 관계없다는 것이 Li(1991)에 의해서 증명되었다.

2.2 PHD(Principal Hessian Directions)

Li(1992)에 의해 제시된 또 다른 차원축소방법인 PHD 방법은 E(y|x)의 Hessian 행렬을 이용하여 효과적차원축소공간을 추정한다.

정의 2.1

E(y|x) 함수가 두번 미분 가능하다고 할 때 Hessian 행렬 $H(x)$를 다음과 같이 정의한다.

$$H(x) = \frac{\partial^2 E(y|x)}{\partial x_i \partial x_j}$$

$\overline{H} = E(H(x))$라 하면 $\overline{H}\Sigma_{xx}$의 고유벡터를 pHd(Principal Hessian Direction)라고 정의한다.

- 혼란을 피하기 위하여 PHD는 차원축소방법을 나타내고 pHd는 위에서 정의한 $\overline{H}\Sigma_{xx}$의 고유벡터를 나타내기로 한다.

위와 같이 정의된 pHd들 중 대응하는 고유치가 0이 아닌 pHd들은 효과적차원축소공간상에 머물게된다. pHd들을 추정하기 위하여는 $\overline{H}$ 를 추정할 수 있어야 하는데 Stein(1981) 정리에 따라 x가 정규분포를 할 때 $\overline{H} = \Sigma_{xx}^{-1}\Sigma_{yxx}\Sigma_{xx}^{-1}$ 이 되어 pHd를 추정하는 것이 가능하고 실제적으로 유용한 pHd의 갯수를 결정하는데 필요한 검정통계량을 점근적으로 구할 수 있다.

정리 2.2 (Li, 1992)

(1) x가 정규분포를 할 때 pHd, 즉 bj, (j=1...p)는 Σ_{xx}에대한 Σ_{yxx}의 고유치 분해에 의해 구할 수 있다.

$$\Sigma_{yxx} b_j = \lambda_j \Sigma_{xx} b_j, \quad \text{여기서 } |\lambda_1| \ge |\lambda_2| \ge \ldots\ldots \ge |\lambda_p|.$$

(2) 모형 (1.1)이 사실일 때, $n \sum_{j=d+1}^{p} \hat{\lambda}_j^2 / 2var(y)$는 점근적으로 자유도 (p-d+1)(p-d)/2 의 χ^2 분포를 따른다.

따라서 자료가 주어지면 $\widehat{\Sigma_{yxx}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})(x_i - \overline{x})(x_i - \overline{x})^T$ 와 $\widehat{\Sigma_{xx}}$를 추정한 후 $\widehat{\Sigma_{xx}}^{-1}\widehat{\Sigma_{yxx}}$의 고유치 λ_j ($|\lambda_1| \ge |\lambda_2| \ge \ldots\ldots \ge |\lambda_p|$)와 고유벡터 b_j를 구하여 $(b_1, \ldots, b_d)$로 효과적차원축소공간을 추정 할 수 있다.

3. 순열검정(permutation test)

대부분의 점근적검정방법이 그렇듯이, 설명변수의 정규성의 결여나 자료의 수가 작을 때 결과들을 왜곡되게 할 가능성이 크다. 순열검정(permutation test)은 이러한 경우에 고려해 볼 가치가 있다. 효과적차원축소공간 d에 대하여 H_o: $d \le d_0$ 라는 가설에 대한 순열검정을 시행하기 위하여 Cook 과 Weisberg(1991)에 의해서 제시된 방법을 일반화하여 SIR과 PHD의 경우에 적용하기로 한다.

SIR의 경우 순열검정통계량을 생성하기 위하여 $cov[E(z|y)]$행렬의 변환이 요구된다. $cov[E(z|y)]$의 모고유벡터(population eigenvectors)행렬을 $Q=(u_1, \ldots, u_p)$ 라고 표기하자. Q_0가 처음 d_0개의 고유벡터를 포함하도록 Q를 $Q=(Q_0, Q_1)$으로 나누어서 새로운 확률변수 $L=Q^T z=\begin{pmatrix} L_0 \\ L_1 \end{pmatrix}$을 만들면 y를 L에 회귀시킨 효과적차원축소공간은 귀무가설 아래에서, $S((I,0)^T)$ ($\dim(I) \le d_0$)이 된다. 즉 L_0가 차원축소공간이 되어 L_1을 어떻게 순열화(permute)하건 간에 L_0가 고정되면 y는 L_0만으로도 설명이 가능하므로 L_1에 영향을 받지 않는다. 따라서 각각 다르게 순열화된 여러 개의 새로운 L을 사용하여 계산한 귀무가설 H_o: $d \le d_0$에 대한 검정통계량들은 귀무가설 H_o: $d \le d_0$이 사실일 때의 검정통계량의 경험적 분포가 된다. 순열검정에서는 이 분포를 귀무가설 아래에서의 검정통계량의 분포로 사용한다.

마찬가지로 PHD 방법의 경우에도 SIR의 경우에 사용한 $cov[E(z|y)]$의 모고유벡터 행렬 $Q=(u_1, \ldots, u_p)$ 대신에 pHd, b_j로 이루어진 행렬 $R=(b_1, \ldots, b_p)$로 대체하여 위와 같은 과정에 따라 순열검정통계량을 생성할 수 있다. 이와 같은 관계로부터 SIR의 경우 다음과 같이 순열검정을 수행한다.

앞장의 SIR 알고리즘에 따라 $\hat{V}$ 을 구한 후,

① $T_0=n(p-d_0)\,\bar{\lambda}_{(p-d_0)}$를 구한다. 여기서 $\bar{\lambda}_{(p-d_0)}$는 $\hat{V}$의 ($p-d_0$)개 가장 작은 고유치의 평균이다.

② $\hat{V}$ 의 고유치 λ_i에 대응하는 고유벡터 q_i로 행렬 $Q=(q_1, \ldots, q_p)$를 만든 후 새로운 설명변수 L을 다음과 같이 생성한다.

$L=Q^T Z=\begin{pmatrix} L_{i0} \\ L_{i1} \end{pmatrix}$. 이때 L_{i0}는 $d_0 \times 1$ 벡터이고, L_{i1}은 $(p-d_0) \times 1$ 벡터이다.

③ y와 L_{i0}를 고정시킨 후 L_{i1}을 무작위로 순열화 하여 새로운 설명변수를 생성한다.

④ 순열화된 새로운 설명변수로 $\hat{V}$을 생성하여 $T_1=n(p-d_0)\,\bar{\lambda}_{(p-d_0)}$ 를 구한다.

⑤ ③ - ④를 반복하여 매번 T_j를 구한다.

⑥ $p-value=(\#\,of\ T_j's \geq T_o)/$(순열의수)를 계산한다.

PHD 방법의 경우에는 위에서 사용한 행렬 Q대신, pHd 즉 b_j로 이루어진 행렬 $R=(R_0\ \ R_1)$, (여기서, $R_o=(b_1\ b_2\ ,\,,\,,b_d)$, $R_1=(b_{d+1}\,b_{d+2},\,,\,,b_p)$)를 사용하고 , $T_0=n(p-d_0)\,\bar{\lambda}_{(p-d_0)}$ 대신 $T_0=n\sum_{j=d_0+1}^{p}\hat{\lambda}_j^2/2var(y)$ 을 사용하여 SIR의 경우와 같은 과정을 따라 순열검정을 시행할 수 있다.

4. 모의 실험

점근적검정과 순열검정의 검정력을 모의실험을 통하여 비교하기로 한다.

모의실험에서 자료를 생성하기 위하여 이용 하게될 y와 x=(x_1, x_2,...,x_6)간의 통계적 모형은 다음과 같다.

$$y=x_1(x_1+x_2+1)+0.5\varepsilon \tag{4.1}$$

$$y=\frac{x_1}{0.5+(x_2+1.5)^2}+0.5\varepsilon \tag{4.2}$$

$$\varepsilon \sim i.i.d.\ \ N(0,1)$$

따라서 효과적차원축소공간의 차원 d는 2가 되며 효과적차원축소공간은 $\beta_1=(1,0,0,0...0)$과 $\beta_2=(0,1,0,0,...0)$에 의해서 생성된다. 위의 모형에 대하여

① $H_o: d=0$ .vs. $H_a: d>0$ ② $H_o: d\leq 1$ .vs. $H_a: d>1$

③ $H_o: d\leq 2$ .vs. $H_a: d>2$ 과 같은 세 가지 가설을 검정하기로 한다. 앞서의 모형에서 효과적차원축소공간의 차원 d의 실제 값은 2이므로 가설 ①과 ②에서 H_o를 기각할 확률은 검정의 검정력이 되고 가설 ③에서는 제 1종 오류 (Type I error)가 된다.

SIR에 순열검정을 적용하는 경우, 순열화된 새로운 변수도 SIR의 조건(2.1)을 만족하여야 하는데, 설명변수 x는 타원형등고분포인 경우 B 가 $r\times p$ 행렬이라면 , BX 도 타원형등고분포를 따르므로 순열검정 단계 ②에서 x가 타원형등고분포를 하면 새로 만들어진 변수 Q^TZ도 타원형등고분포를 하게되어 SIR의 조건 (2.1)을 만족하게 된다.

오차변수 ε와 더불어 생성될 설명변수는, 실제적으로 모형에 사용되는 x_1과 x_2를 포함하여 $x_3,\ldots,x_6$ 등 6개이다. 각 설명변수는 다음과 같은 3 가지 타원형등고분포로 부터 생성된다.

① 표준정규분포, $N_6(0, I)$

② 오염정규분포 (Contaminated Normal)

$$\begin{cases} N_6(0, I) & \textit{with probability } 0.8 \\ 3N_6(0, I) & \textit{with probability } 0.2 \end{cases}$$

③ 구형균등분포 (Spherically Uniform distribution)

PHD 방법에서는 설명변수가 표준정규분포가 아닌 그 외의 분포를 따르는 경우 $\overline{H}$ 를 구할 수 없다. 따라서 이 경우에서는 정규성을 만족 하나, 자료의 수가 작을 때 점근적분포와 순열검정간의 검정력을 비교하기로 한다.

Gauss를 이용하여 만들어진 프로그램을 통하여 행해진 모의실험 결과는 <표 1>에 요약되어 있다. SIR의 경우 X의 분포와 모형에 상관없이, 가설 ①과 가설②에서 순열검정통계량이 점근적검정 통계량보다 검정력이 높고 가설 ③에서는 점근적검정통계량이 순열검정통계량보다 낮은 제 1종 오류를 보여 주고 있다. X의 분포가 정규성을 가질 때 순열검정통계량과 점근적검정통계량은 비슷한 검정력과 제 1종 오류를 보여 주고 있다. X가 오염정규분포와 구형 균등분포를 따를 때는 순열검정통계량의 검정력이 더욱 좋게 나타났다.

PHD 방법에서는 n=100일 때 점근적검정과 순열검정 모두 가설 ①에서만 높은 검정력을 보여주고있다. n=10, n=20의 작은 수의 자료에서는 가설 ①에서도 낮은 검정력을 보여 주고있다. 그러나 점근적검정과 순열검정 상호간의 검정력을 비교해 보면 n=10 또는 n=20등 자료의 수가 작을 때 순열검정이 점근적검정 보다 현저히 큰 검정력을 보여준다.

5. 결 론

SIR과 PHD 방법에서 가정이 만족되지 않은 경우 순열검정통계량은 점근적검정통계량보다 높은 검정력을 보여 주고 있다. 제 1종 오류는 순열검정이 점근적검정 보다 상대적으로 높으나 보편적인 유의수준인 0.01 0.05 0.1 등에서 1종 오류의 값이 그것의 기대치인 유의수준 보다 낮으므로 큰 의미는 없다고 하겠다. 이것은 순열검정통계량이 점근적검정통계량보다 귀무가설을 기각하려는 경향이 크다는 것을 의미한다. 이러한 현상을 개선하기 위하여 순열검정때 사용하는 통계량을 개선해 볼 필요가 있다.

<표1> 점근적 검정과 순열검정의 검정력과 제 1종 오류

(a) 검정력 $H_0: d=0$ $.vs.$ $H_a: d>0$

(b) 검정력 $H_0: d\leq 1$ $.vs.$ $H_a: d>1$

(c) 제 1종 오류 $H_0: d\leq 2$ $.vs.$ $H_a: d>2$

* 각 칸에서 왼쪽 값은 모형 (4.1)을, 오른쪽 값은 (4.2) 를 적용 했을 때의 값임.

I. SIR

분활구간의 수:10, n=100

(1) 설명변수의 분포: 표준정규분포

유의수준		0.01	0.05	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50
(a)	점근적검정	0.60 0.88	0.85 0.93	0.90 0.97	0.97 1.00	0.97 1.00	0.98 1.00	0.98 1.00
	순열검정	0.63 0.90	0.86 0.97	0.90 1.00	0.98 1.00	0.98 1.00	1.00 1.00	1.00 1.00
(b)	점근적검정	0.10 0.09	0.38 0.25	0.46 0.38	0.58 0.54	0.61 0.67	0.70 0.73	0.72 0.77
	순열검정	0.11 0.15	0.40 0.35	0.48 0.44	0.58 0.55	0.62 0.73	0.74 0.78	0.80 0.80
(c)	점근적검정	0.00 0.01	0.03 0.01	0.13 0.02	0.17 0.10	0.24 0.15	0.29 0.19	0.46 0.25
	순열검정	0.01 0.02	0.05 0.02	0.15 0.09	0.23 0.13	0.33 0.21	0.41 0.27	0.56 0.33

(2) 설명변수의 분포: 오염정규분포

유의수준		0.01	0.05	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50
(a)	점근적검정	0.39 0.70	0.60 0.84	0.69 0.98	0.79 0.92	0.85 0.92	0.88 0.96	0.93 0.97
	순열검정	0.70 0.77	0.84 0.89	0.94 0.93	0.95 0.96	0.99 0.98	1.00 0.99	1.00 1.00
(b)	점근적검정	0.02 0.09	0.08 0.26	0.16 0.34	0.29 0.47	0.40 0.54	0.44 0.60	0.49 0.65
	순열검정	0.15 0.24	0.25 0.39	0.42 0.56	0.50 0.70	0.55 0.78	0.62 0.84	0.70 0.88
(c)	점근적검정	0.00 0.01	0.02 0.03	0.02 0.04	0.05 0.08	0.09 0.15	0.11 0.19	0.20 0.29
	순열검정	0.02 0.03	0.05 0.07	0.08 0.11	0.13 0.21	0.19 0.33	0.28 0.42	0.35 0.58

(3) 설명변수의 분포: 구형균등분포

유의수준		0.01	0.05	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50
(a)	점근적검정	0.45 0.21	0.69 0.28	0.84 0.35	0.90 0.52	0.94 0.64	0.96 0.71	0.98 0.78
	순열검정	0.67 0.34	0.78 0.42	0.90 0.54	0.95 0.65	0.97 0.68	0.99 0.75	1.00 0.79
(b)	점근적검정	0.09 0.05	0.11 0.09	0.14 0.11	0.27 0.18	0.35 0.29	0.42 0.38	0.50 0.44
	순열검정	0.12 0.10	0.16 0.14	0.23 0.21	0.33 0.26	0.40 0.35	0.47 0.49	0.55 0.58
(c)	점근적검정	0.01 0.00	0.01 0.01	0.02 0.01	0.03 0.03	0.05 0.06	0.08 0.09	0.13 0.12
	순열검정	0.01 0.00	0.02 0.01	0.03 0.02	0.04 0.04	0.08 0.07	0.10 0.13	0.17 0.17

II. PHD

(1) n=10

유의수준		0.01	0.05	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50
(a)	점근적검정	0.02 0.02	0.06 0.10	0.23 0.15	0.38 0.29	0.57 0.32	0.64 0.40	0.72 0.53
	순열검정	0.23 0.18	0.32 0.23	0.42 0.39	0.51 0.43	0.70 0.53	0.77 0.63	0.96 0.75
(b)	점근적검정	0.00 0.00	0.00 0.00	0.00 0.00	0.03 0.02	0.05 0.03	0.06 0.05	0.06 0.06
	순열검정	0.12 0.12	0.23 0.18	0.32 0.27	0.39 0.33	0.44 0.39	0.52 0.45	0.62 0.54
(c)	점근적검정	0.00 0.00	0.00 0.00	0.00 0.00	0.00 0.00	0.00 0.00	0.04 0.00	0.06 0.02
	순열검정	0.02 0.00	0.05 0.03	0.11 0.04	0.18 0.09	0.25 0.19	0.34 0.26	0.46 0.39

(2) n=20

유의수준		0.01	0.05	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50
(a)	점근적검정	0.11 0.07	0.30 0.16	0.53 0.34	0.64 0.46	0.76 0.57	0.84 0.65	0.89 0.70
	순열검정	0.33 0.22	0.50 0.37	0.56 0.45	0.76 0.52	0.87 0.66	0.96 0.77	0.97 0.85
(b)	점근적검정	0.00 0.00	0.00 0.03	0.01 0.05	0.05 0.06	0.07 0.09	0.09 0.19	0.17 0.27
	순열검정	0.14 0.16	0.25 0.23	0.37 0.35	0.45 0.42	0.52 0.48	0.57 0.55	0.68 0.60
(c)	점근적검정	0.00 0.00	0.00 0.00	0.00 0.00	0.00 0.00	0.01 0.01	0.01 0.04	0.02 0.06
	순열검정	0.00 0.00	0.02 0.01	0.08 0.04	0.16 0.10	0.26 0.19	0.37 0.29	0.45 0.36

(3) n=100

유의수준		0.01	0.05	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50
(a)	점근적검정	1.00 0.61	1.00 0.80	1.00 0.88	1.00 0.92	1.00 0.95	1.00 0.98	1.00 0.99
	순열검정	0.97 0.53	1.00 0.74	1.00 0.90	1.00 0.95	1.00 0.97	1.00 0.98	1.00 0.99
(b)	점근적검정	0.17 0.20	0.33 0.27	0.47 0.39	0.51 0.44	0.58 0.59	0.64 0.68	0.73 0.80
	순열검정	0.16 0.19	0.32 0.26	0.45 0.40	0.49 0.50	0.55 0.60	0.62 0.72	0.79 0.85
(c)	점근적검정	0.00 0.00	0.00 0.00	0.02 0.02	0.08 0.06	0.11 0.07	0.18 0.11	0.22 0.21
	순열검정	0.00 0.02	0.04 0.05	0.09 0.09	0.22 0.18	0.28 0.28	0.42 0.41	0.51 0.53

참고 문헌

[1] Cook, R.D. and Weisberg, S. (1991). Discussion of "Sliced inverse regression" by K.C.Li. *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 86, 328-332.

[2] Cook, R.D. and Weisberg, S. (1994). *Introduction to Regression Graphics,* Wiley, New York.

[3] Johnson, M. (1987). *Multivariate Statistical Simulation,* Wiley, New York.

[4] Li, K.C. (1991). Sliced inverse regression for dimension reduction(with discussion), *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 86, 316-342.

[5] Li, K.C. (1992). On principal Hessian directions for data visualization and dimension reduction: another application of Stein's lemma, *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 87, 1025-1040.

[6] Stein, C. (1981). Estimation of the Mean of a Multivariate Normal Distribution, *The Annals of Statistics*, Vol. 9, 1135-1151.

Nonparametric Test on Dimensionality of Explanatory Variables[3)]

H.S. Seo[4)]

For the determination of dimension of e.d.r. space, both of Sliced Inverse Regression(SIR) and Principal Hessian Directions(PHD) proposed asymptotic test. But the asymptotic test requires the normality and large samples of explanatory variables. Cook and Weisberg(1991) suggested permutation tests instead. In this study permutation tests are actually made, and the power of them is compared with asymptotic test in the case of SIR and PHD.

3) This research was supported by Yonsei University Research Grant 1994.

4) Dept. of Applied Statistics, Konkuk University, 93-1 Mojin-dong, Kwangjin-gu, Seoul, 133-701, KOREA.