응용통계연구 제 8권 1호
1995년 3월 pp. 159-167.

이산분포 혼합의 단봉성이 성립하기 위한 기준

최 대 우[1)]

요 약

지수족(exponential family)에 속하면서 어떤 특별한 형태를 따르는 이산분포는 그 분포함수가 정의된 정수에 대한 단봉적 순열이다. 본 논문에서 그러한 분포함수의 모수에 대한 혼합형이 어떤 조건하에서 항상 단봉적 순열을 유지하는가에 대하여 연구하였다. 그 예로써 이항분포와 포아송분포 각각에 대한 최대모수구간을 구하여, 그 모수 구간안에서의 혼합형은 항상 단봉적임을 보였다.

1. 서 론

벡터 $\underline{r}^{(n)}=(r^{(n)}(0), r^{(n)}(1),\ldots,r^{(n)}(n))=(r_0,r_1,\ldots,r_n)$ 에 대해 각 성분을 다음과 같이 정의하자.

$$r_k^{(n)}=r_k=\int_0^1\binom{n}{k}\theta^k\ (1-\theta)^{n-k}dG(\theta).$$

여기서 $dG(\theta)$는 θ에 대한 확률측도(probability measure)이다. 즉, r_k는 이항분포의 모수 θ에 대한 $dG(\theta)$ 혼합형태(mixture)이다.

본 논문에서는 과연 어떤 조건하에서 순열 $\{r_k\}$가 k에 대하여 단봉적인가를 알아보려한다. 여기서 우리는 단봉적이라함을 다음과 같이 정의한다.

정의 1.1 아래의 조건을 만족하는 정수 c가 존재하면 순열 $\{r_k\}$는 k에 대하여 단봉적이라 칭한다.

$$k\le c\text{일때}\quad r_{k-1}\le r_k\ ;$$
$$k\ge c\text{일때}\quad r_k\ge r_{k+1}.$$

상수 c는 유일하지 않을 수 있다. 예를 들어, dG가 $\theta=1/2$에 대해서만 정의되고 $n=4$일때 상수 c는 2 혹은 3일수 있다. 다음의 몇몇 기호들을 더 정의

$$\underline{M}(\underline{r}^{(n)})=\min\{k : r_k=\max{}_j r_j\}\ ;$$
$$\overline{M}(\underline{r}^{(n)})=\max\{k : r_k=\max{}_j r_j\}.$$

그리고,

$$f_\theta(k)=\binom{n}{k}\theta^k\ (1-\theta)^{n-k},\ \ (k=0,1,\ldots,n)$$

---

1) (151-742) 서울시 관악구 신림동 산 56-1, 서울대학교 자연과학대학 수학과 대역해석학연구센터.

이라 하고, $\underline{f}(\theta)=(f_\theta(0),f_\theta(1),\ldots,f_\theta(n))$라고 하자. 그러면, $\theta(n+1)$이 정수가 아닐 경우, $\overline{M}(\underline{f}(\theta))=\underline{M}(\underline{f}(\theta))=[\theta(n+1)]$이다. 즉, 최빈값은 유일하다. 한편, $k=\theta(n+1)$가 정수이면, $\underline{M}(\underline{f}(\theta))$와 $\overline{M}(\underline{f}(\theta))$는 다음과 같다.

$$\underline{M}(\underline{f}(\theta)) = \theta(n+1)-1 \;;$$
$$\overline{M}(\underline{f}(\theta)) = \theta(n+1).$$

그런데, 여기서 단봉성은 수렴하에서도 유지되므로 우리는 일반성을 잃지않고 최빈값은 유일하다고 가정할 수 있다.

이항분포의 확률밀도 함수 $f_\theta(k)$는 아래와 같은 지수족(exponential family) 형태로 나타내질 수 있다:

$$f_\theta(k) = p_k(z) = \frac{1}{c(z)}\tau_k z^k, \quad k \in \{\, 0,1,\cdots,n \,\}.$$

여기서 $c(z)<\infty$, $\tau_k=\binom{n}{k}$이고, $z=\theta/(1-\theta)$, $(0<\theta<1)$ 이다. 여기서, 순열 τ_k는 log-concave, 즉,

$$\tau_k^2 \geq \tau_{k-1}\tau_{k+1}, \quad (k=0,1,\ldots,n)$$

이다. 좀더 일반적으로, 다음의 형태를 따르는 비음함수(nonnegative function) $p_k(z)$를 고려하여 보자.

$$p_k(z)=\frac{1}{c(z)}\tau_k z^k, \quad k\in Z=\{0,\pm1,\pm2,\ldots\} \tag{2.1}$$

여기서, $z\in I=\{z>0 \,:\, c(z)<\infty\}$이고 $\{\tau_k\}$는 k에 대한 log-concave 순열이다. 우리는 $J=\{k\in Z \,:\, \tau_k>0\}=[a,a+1,\ldots,b-1,b]$는 구간을 이루고 있고 $a=-\infty$또는 $b=\infty$이 가능하다고 가정한다. $k\in J$에 대해, $u_k=\tau_{k-1}/\tau_k$라고 하자. 그리고, 편리를 위해 다음과 같이 정의하자.

$$k<a \text{ 에 대해 } u_k=0 \,:$$
$$k>b \text{ 에 대해 } u_k=-\infty.$$

순열 $\{\tau_k\}$는 log-concave하므로, 함수 $k\rightarrow u_k$는 비감소(nondecreasing)이다. Kemperman (1991)은 각 특수 혼합 $p_k(z')+\beta p_k(z'')$ 가 모든 $\beta>0$에 대하여 k에 대한 단봉성이 성립되기 위한 필요충분조건을 연구하였다. 그 외에 Behboodian(1970)는 $N(m_1,\sigma_1^2)$과 $N(m_2,\sigma_2^2)$의 혼합형이 $|m_1-m_2|\leq 2\min(\sigma_1,\sigma_2)$일때 단봉적임을 밝혔다. Titterington, Smith와 Markov(1985)도 참조하기 바란다.

우리는 $z_1>0$ 이 주어졌을 때, 각 $p_k(z)$ 의 $z\in[z_1,z_2]$에 대한 혼합형이 항상 단봉적일 가장 큰 z_2값 $(z_2>z_1)$을 구하려 한다.

2. 단봉성이 성립하기 위한 기준

$M(z)$를 순열 $\{p_k(z)\}$의 최빈값이라 하자. 최빈값 $M(z)$는 다음과 같은 성질을 갖고 있다.

성질 2.1 $u_{M(z)} \le z \le u_{M(z)+1}$.

성질 2.2 최빈값 $M(z)$는 z에 대한 비감소 계단(step) 함수이다.

$p_k(z)$, $(z \in I)$에 대하여, 우리는 각 $p_k(z)$-혼합형 $(z \in I)$이 단봉적이기 위한 필요충분조건을 구하려 한다. Kemperman(1991)에 의하면 특수혼합 $p_k(z_1)+\beta p_k(z_2)$가 모든 $\beta>0$ 와 모든 $z_1, z_2 \in I$에 대하여 k에 대하여 단봉적이기 위한 조건은 각 $p_k(z)$-혼합형 $(z \in I)$이 k에 대하여 단봉적이기 위한 조건과 동일하다고 알려져 있다.

정리 2.1 (Kemperman, 1991) F를 정수에서 정의된 이산분포들이 모여진 집단이라 하자. 각 F의 혼합형태(F-혼합형)가 단봉적이기 위한 필요충분조건은 $p_k+\beta q_k$가 모든 $\beta>0$와 $p_k, q_k \in F$에 대하여 k에 대한 단봉적 순열이어야 한다는 것이다.

위의 정리를 응용한 간단한 계산을 통하여 아래의 정리 2.2를 유도할 수 있다.

정리 2.2 $p_k(z)$는 앞의 (2.1)에서 정의한 비음함수라고 하자. 그리고 $z_1 \in I$와 $z_2 \in I$는 고정되어 있으며 $z_1 < z_2$ 라고 하자. 그러면, 순열 $\{p_k(z_1)+\beta p_k(z_2)\}$가 어떠한 $\beta>0$ 에 대하여서도 (k에 대하여) 단봉적이기 위한 필요충분조건은 다음과 같다.

모든 $M(z_1) \le k \le M(z_2)-2$ 에 대하여

$$\frac{p_k(z_1)-p_{k+1}(z_1)}{p_{k+1}(z_2)-p_k(z_2)} \le \frac{p_{k+1}(z_1)-p_{k+2}(z_1)}{p_{k+2}(z_2)-p_{k+1}(z_2)} \tag{2.2}$$

이다. 여기서, $p_{k+2}(z_1)=p_{k+1}(z_1)$이고 $p_{k+2}(z_2)>p_{k+1}(z_2)$인 경우와 $p_k(z_1)>p_{k+1}(z_1)$이면서 $p_k(z_2)=p_{k+1}(z_2)$인 경우는 무시한다.

증명. 다음을 만족하는 $\beta>0$가 존재하면 특수혼합의 순열 $\{p_k(z_1)+\beta p_k(z_2)\}$는 단봉적이 아니다:

$$\begin{aligned} p_k(z_1)+\beta p_k(z_2) &> p_{k+1}(z_1)+\beta p_{k+1}(z_2); \\ p_{k+1}(z_1)+\beta p_{k+1}(z_2) &> p_{k+2}(z_1)+\beta p_{k+2}(z_2). \end{aligned}$$

그런데, $k \le M(z_1)-1$과 $k \ge M(z_2)-1$에 대하여 특수혼합 $\{p_k(z_1)+\beta p_k(z_2)\}$는 항상 단봉적이므로, 우리는 $M(z_1) \le k \le M(z_2)-2$만 고려하면 된다.

우리는 정리 2.1로 부터 위의 조건을 만족하는 $\beta>0$이 존재하지 않기 위한 조건이 $\{p_k(z_1)+\beta p_k(z_2)\}$가 k에 대하여 단봉적이기 위한 필요충분조건이고, 그의 변형된 형태가 조건 (2.2)임을 쉽게 보일 수 있다.

$p_k(z)$ 대신 앞에서 정의된 형태 (2.1)을 정리 2.2의 조건 (2.2)에 대입하여 정리하면 다음과

같다.

모든 $M(z_1) \le k \le M(z_2)-2$에 대하여,

$$u_{k+1}u_{k+2}+z_1z_2-(z_1+z_2)u_{k+1} \ge 0. \tag{2.3}$$

고정된 $z_1 \in I$와 $z_2 \in I$에 대하여 $(z_1 < z_2)$, 순열 $\{p_k(z_1)+\beta p_k(z_2)\}$은 $k \le M(z_1)-1$에 대하여 ($k \ge M(z_2)-1$에 대하여) 비감소(비증가)이다. 그러므로 조건 (2.3)은 $k \le M(z_1)-1$과 $k \ge M(z_2)-1$에 대하여도 성립한다. 그러므로 다음과 같은 결론을 내릴 수 있다.

성질 2.3 $p_k(z)$는 앞의 (2.1)에서 정의된 이산 비음함수라고 하자. 그리고 $z_1 < z_2$라고 하자.

(i) z_1이 주어지면 순열 $\{p_k(z_1)+\beta p_k(z_2)\}$가 모든 $z_1 \le z \le z_2$와 모든 $\beta > 0$에 대하여 단봉적이기 위한 가장 큰 z_2값은 다음과 같다.

$$\max z_2 = \min\left\{ \frac{u_k(u_{k+1}-z_1)}{u_k - z_1} \ : k \ge M(z_1)+1 \right\} \tag{2.4}$$

(ii) z_2가 주어졌을 때, 순열 $\{p_k(z_1)+\beta p_k(z_2)\}$가 모든 $z_1 \le z \le z_2$와 $\beta > 0$에 대하여 단봉적이기 위한 가장 작은 z_1값은 다음과 같다.

$$\min z_1 = \max\left\{ \frac{u_k(z_2-u_{k+1})}{z_2-u_k} \ : k \le M(z_2)-1 \right\}. \tag{2.5}$$

증명. 성질 2.1과 성질 2.2로 부터, 다음을 알 수 있다.

$k \ge M(z_1)+1$에 대하여, $u_k - z_1 \ge 0$ 이다.

$k \le M(z_2)-1$에 대하여, $z_2 - u_k \ge 0$ 이다.

그러므로 (2.3)은 다음과 같이 표현될 수 있다.

모든 $k \ge M(z_1)+1$에 대해

$$z_2 \le \frac{u_k(u_{k+1}-z_1)}{u_k - z_1}$$

이다.

위의 부등식에서 (2.4)가 유도된다. 마찬가지로, (2.3)로 부터 (2.5)를 유도할 수 있다.

참고. (2.4)과 (2.5)는 방정식 $u_ku_{k+1}+z_1z_2-(z_1+z_2)u_k=0$로 부터 구하여졌으므로 함수 $z_2 \to \min z_1$은 함수 $z_1 \to \max z_2$의 역함수이다.

3. 응 용

3.1 이항분포의 경우

다음의 이항분포를 고려하자.

$$P_\theta(X=k)=\begin{cases}\binom{n}{k}\theta^k(1-\theta)^{n-k}, & k=0,1,\ldots,n;\\ 0, & k<0 \text{ 혹은 } k>n.\end{cases} \tag{3.1}$$

$\tau_k=\binom{n}{k}$이고 $z=\theta/(1-\theta)$라고 하면, 이항분포의 경우 $u_k=\tau_{k-1}/\tau_k=k/(n-k+1)$이다.

성질 3.1 (3.1)에서와 같이 정의된 이항분포 $P_\theta(X=k)$를 고려하자. $[\theta_1,\theta_2]$를 $\theta\in[\theta_1,\theta_2]$에 대한 P_θ-혼합형이 단봉적일 최대모수구간이라고 하자. 그러면, $\max\theta_2$와 $\min\theta_1$은 다음과 같이 주어진다.

(i) θ_1이 주어졌을때, $\theta_1(k)\le\theta_1\le\theta_1(k+1)$이면

$$\max\theta_2=\frac{k}{n+1}\,\frac{k+1-(n+1)\theta_1}{k-n\theta_1}. \tag{3.2}$$

여기서, $\theta_1(k)=(kn-\sqrt{kn(n-k+1)})/(n(n+1))$이다.

(ii) θ_2가 주어졌을때, $\theta_2(k)\le\theta_2\le\theta_2(k+1)$이면

$$\min\theta_1=\frac{k}{n+1}\,\frac{(n+1)\theta_2-(k+1)}{n\theta_2-k}.$$

여기서, $\theta_2(k)=(kn+\sqrt{kn(n-k+1)})/(n(n+1))$이다.

증명. $\theta_i=z_i(1+z_i),(i=1,2)$라고 하자. (그러므로 $z_i=\theta_i/(1-\theta_i)$이다.) 식 (2.4)에 의해, $\max z_2=\min\{f(k,z_1):k\ge M(z_1)+1\}$이다. 여기서,

$$f(k,z_1)=\frac{k}{n-k}\,\frac{k+1-(n-k)z_1}{k-(n-k+1)z_1}$$

이고 $M(z_1)=[\theta_1(n+1)]$이다.

$k\ge M(z_1)+1$의 범위만 고려하면 되므로, 우리는 단지 $z_1<k/(n-k-1)$에만 관심이 있다. $k=(nz_1+\sqrt{nz_1})/(z_1+1)$이 양의 정수일때, $f(k,z_1)$는 가장 작은 값을 갖고 그에 상응하는 z_1은

$$l_n(k)=\frac{n^2+2k(n-k)-n\sqrt{n^2+4k(n-k)}}{2(n-k)^2} \tag{3.3}$$

그리고, $f(k,z_1)=f(k+1,z_1)$이 성립할 때는 z_1이 다음과 같을 때이다.

$$z_1=g_1(k+1)=\frac{(n-k)(k+1)\pm\sqrt{(n-k)(k+1)n}}{(n-k)(n-k-1)} \tag{3.4}$$

그러나 관련된 $z_1=g_1(k+1)$은 $k/(n-k+1)$이므로, 우리는 $k=0,1,\ldots$에 대하여, 다음을 얻는다.

$$\max z_2=\begin{cases}f(k,z_1) & \text{if } l_n(k)\le z_1\le g_1(k+1),\\ f(k+1,z_1) & \text{if } g_1(k+1)\le z_1< l_n(k+1).\end{cases}$$

여기서 $l_n(k)$와 $g_1(k+1)$은 각각 (3.3)와 (3.4)와 같이 정의된다. 결국,

$$g_1(k)\le z_1\le g_1(k+1)\text{이면 } \max z_2=f(k,z_1) \tag{3.5}$$

임을 알 수 있다. 식 (3.5)를 θ_1로 표현하면,

$$\theta_1(k) \le \theta_1 \le \theta_1(k+1)\text{일때, } \max z_2 = \frac{k}{n-k}\,\frac{k+1-(n+1)\theta_1}{k-(n+1)\theta_1} \tag{3.6}$$

이다. 여기서 $\theta_1(k) = (kn-\sqrt{k(n-k+1)n})/(n(n+1))$이다. 그러나 $\theta_2 = z_2/(z_2+1)$이므로, 우리는 결국 (3.2)를 얻는다.

식 (3.6)으로 부터, 우리는 다음을 얻을 수 있다:

$$\begin{aligned} f(k,\theta_1(k+1)) &= f(k+1,\theta_1(k+1)) \\ &= \frac{(k+1)n+\sqrt{(k+1)(n-k)n}}{n(n+1)} \\ &= \theta_2(k+1); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(k-1,\theta_1(k)) &= f(k,\theta_1(k)) \\ &= \frac{kn+\sqrt{k(n-k+1)n}}{n(n+1)} \\ &= \theta_2(k). \end{aligned}$$

그러므로, $\theta_2(k) \le k \le \theta_2(k+1)$일때, $\min\theta_1$은 함수 $\theta_1 \to \max\theta_2$의 역함수를 구함으로써 유도될 수 있다.

예 3.1 $\theta_1 = 0$ ($z_1 = 0$)인 경우를 고려하자. 우리는 만약 $M(z_2)-M(z_1) \le 1$이면 $\{p_k(z_1)+\beta p_k(z_2)\}$는 모든 $\beta > 0$에 대하여 단봉적이다. 즉, $z_1 = 0$이면 $M(z_2) = [\theta_2(n+1)] < 2$일 경우에 단봉성이 유지된다. 연속성에 의해, $z_2 = 2/(n-1)$일때도 단봉성은 성립한다.

다음의 혼합을 고려하자:

$$(1,0,0,\dots)+\gamma\left(1,\binom{n}{1}z,\binom{n}{2}z^2,\dots\right).$$

그러나, $1+\gamma < \gamma\binom{n}{2}z^2$이면서 $\gamma\binom{n}{1}z > \gamma\binom{n}{1}z^2$인 조건은 $z > 2/(n-1)$와 동일하므로, 우리는 $\gamma > 0$ 가 존재함을 알 수 있다. 다시말해, $z_1 = 0$일 때 $z_2 > 2/(n-1)$이기만 하면 $\{p_k(z_1)+\beta p_k(z_2)\}$가 단봉적이 아닐 $\beta > 0$이 존재한다.

예 3.2 $n = 9$이고 $\theta_1 = 1/2$라고 하자. $f(k,z_1)$은 $k = 4$일때 최소치를 갖고 $\max\theta_2 = 4/5$이다. 여기서, 상응하는 z_1과 z_2는 1과 4이다. 우리는 만약 $z_2 = 4+\delta$, $(\delta > 0)$이면, 순열 $\{p_k(z_1)+\beta p_k(z_2)\}$는 어떤 $\beta > 0$에 대하여 단봉적이 아님을 보일 것이다. 다시 말하면, 우리는 아래의 조건을 만족하는 어떤 $\gamma = \beta \cdot (2/z_2)^9$를 찾아야만 한다.

$$\binom{9}{5}(1+\gamma z^5) > \binom{9}{6}(1+\gamma z^6),$$
$$\binom{9}{7}(1+\gamma z^7) > \binom{9}{6}(1+\gamma z^6).$$

여기서 $z=z_2=4+\delta$이다. 위의 조건은

$$z^5(2z-3) < \frac{1}{\gamma} < \frac{1}{4}z^6(3z-7) \tag{3.7}$$

와 동일하다. 그러나 $(z-1)(z-4)>0$이므로, 우리는 조건 (3.7)을 만족하는 $\gamma>0$을 구할 수 있다.

3.2 포아송 분포의 경우

포아송 분포 $p_k(\lambda)$를 다음과 같이 정의하자:

$$p_k(\lambda)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}, \quad k=0,1,\ldots. \tag{3.8}$$

성질 3.2 (3.8)에서 정의된 것과 같은 포아송 분포 $p_k(\lambda)$를 고려하자. $[\lambda_1,\lambda_2]$를 $\lambda_1\le\lambda\le\lambda_2$에 대한 각 $p_k(\lambda)$-혼합형이 단봉적인 λ의 최대모수구간이라고 하자. 그러면,

(i) $\lambda_1>0$ 이 주어졌을때, $k-\sqrt{k}\le\lambda_1\le k+1-\sqrt{k+1}$이면,

$$\max\lambda_2=k\left(1+\frac{1}{k-\lambda_1}\right) \tag{3.9}$$

이다.

(ii) $\lambda_2>0$ 이 주어졌을때, $k+\sqrt{k}\le\lambda_2\le k+1+\sqrt{k+1}$이면,

$$\min\lambda_1=k\left(1-\frac{1}{\lambda_2-k}\right) \tag{3.10}$$

이다.

증명. 성질 3.1의 증명방법과 유사하므로 생략한다.

예 3.3 $0<\lambda_1<1$ 일때, (3.9)로 부터 가장 큰 λ_2는 2이다. 다음의 혼합형을 고려하자:

$$(1,0,0,0,\ldots)+\gamma\left(1,\lambda,\frac{\lambda^2}{2!},\frac{\lambda^3}{3!},\cdots\right)=\left(1+\gamma,\gamma\lambda,\gamma\frac{\lambda^2}{2!},\gamma\frac{\lambda^3}{3!}\right).$$

여기서 $\lambda=2+\delta$, $(\delta>0)$이고 $\gamma=\beta\cdot\exp(-\lambda)$이다.

만약 $1+\gamma>\gamma\lambda$이면서 $\gamma\lambda^2/2>1+\gamma$ 인 $\gamma>0$ 가 존재하면 위의 혼합형은 단봉적이라고 할 수 없다. 즉,

$$\lambda-1<\frac{1}{\gamma}<\frac{\lambda^2}{2}-1. \tag{3.11}$$

그러므로, (3.11)을 만족하는 γ는 $\lambda>2$ 이기만 하면 존재한다.

예 3.4 $k=3$이고 $\lambda_1=4-\sqrt{4}=2$일때, $\max\lambda_2=6$이다. 만약 $\lambda_2=6+\delta$, $(\delta>0)$이면, 임의에 $\beta>0$ 에 대하여 순열 $\{p_k(2)+\beta p_k(6+\delta)\}$가 단봉적이 아닐 $\delta>0$ 가 존재함을 보여보자. 한 방법으로써 어떤 $\gamma>0$ 에 대하여,

$$\left(1,1,\frac{2^2}{2!},\frac{2^3}{3!},\frac{2^4}{4!},\cdots\right)+\gamma\left(1,\lambda,\frac{\lambda^2}{2!},\frac{\lambda^3}{3!},\frac{\lambda^4}{4!},\cdots\right)$$
$$=\left(1+\gamma,1+\gamma z,\frac{4+\gamma\lambda^2}{2!},\frac{8+\gamma\lambda^3}{3!},\frac{16+\gamma\lambda^4}{4!},\cdots\right)$$

이 단봉적이 아님을 보이자. 여기서 $\gamma=\beta\exp(2-\lambda)$이고 $\lambda=6+\delta$이다.

$$\frac{4+\gamma\lambda^2}{2!}>\frac{8+\gamma\lambda^3}{3!} \quad \text{이면서} \quad \frac{16+\gamma\lambda^4}{4!}>\frac{8+\gamma\lambda^3}{3!} \tag{3.12}$$

를 만족하는 $\gamma>0$를 구하면 위의 혼합형이 단봉적이 아닌 충분한 증거이다. (3.11)을 간단하게 표현하면 다음과 같다.

$$\frac{\lambda^2(\lambda-3)}{4}<\frac{1}{\gamma}<\frac{\lambda^3(\lambda-4)}{16}.$$

그런데, $\lambda=6+\delta>6$이므로 항상 $\lambda^2(\lambda-3)/4<\lambda^3(\lambda-4)/16$ 이다.

4. 연구과제

(2.1)에서 정의된 $p_k(z)$의 형태에 음이항분포(negative binomial distribution)를 적용할 수 있으므로 성질 3.1과 성질 3.2와 같은 구체적인 모수구간을 구할 수 있다.

한편 $p_k(z)$의 혼합형이 강력 단봉성(strongly unimodal)일 필요충분 조건도 구할 수 있다. Keilson과 Gerber(1971)는 순열 $\{p_k(z)\}$의 k에 대한 강력 단봉성은 $p_k^2(z)\geq p_{k-1}(z)p_{k+1}(z)$, 즉 log-concavity와 동치임을 밝혔다. Dharmadhikari와 Joag-Dev(1988)의 정리 1.10을 참고하기 바란다.

참고문헌

[1] Behboodian, J. (1970). On the modes of a mixture of two normal distributions, *Technometrics*, Vol. 12, 131-139.

[2] Dharmamadhikari, S. and Joag-Dev, K. (1988). *Unimodality, convexity, and applications*, Academic Press.

[3] Keilson, J. and Gerber, H. (1971). Some result for discrete unimodality, *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 66, 386-389.

[4] Kemperman, J. H. B. (1991). Mixtures with a limited number of modal intervals, *Annals of Statistics*, Vol. 19, 2120-2144.

[5] Titterington, D. M., Smith, A. F. and Markov, U. E. (1985). *Statistical Analysis of Finite Mixture Distributions*, Wiley, New York.

Criterion of Discrete Unimodal Mixtures

Daiwoo Choi[2]

Abstract

Considering special discrete distribution of exponential family as a sequence with respect to the points of support, the sequence is unimodal in some sense. In this paper, we study under what condition the mixture of that discrete distribution with respect to a parameter is unimodal. We derive the maximal interval of the parameter in which each mixture of the discrete distribution such as Binomial and Poisson is always unimodal.

2) The Golbal Analysis Research Center, Dept. of Mathematics, Seoul National University, Seoul 151-742, KOREA.