

6절점 2차원 및 16절점 3차원 등매개변수 요소의 가우스 적분점 수정을 이용한 강제진동 해석

The Forced Motion Analyses by Using Two Dimensional 6-Node and Three Dimensional 16-Node Isoparametric Elements with Modification of Gauss Sampling Point

김 정 운*

Kim, Jeong-Oun

권 영 두**

Kwon, Young-Doo

요 약

2차원 유한요소 모델의 동일한 형상과 하중 조건에 있어서 6절점 요소의 굽힘 강성은 8절점 요소의 굽힘 강성보다 더 크게 나타난다. 이와 같은 현상은 3차원 16절점 요소와 20절점 요소에서도 나타나며, 완전 요소의 중간 절점들을 제거하므로 인하여 나타난다. 따라서 이 현상을 상대적 강성강화 현상이라 할 수 있다. 강성강화 현상을 보정하기 위한 매우 효과적인 방법으로 가우스 적분점 수정법을 도출하였으며, 이 방법은 확장적인 강성과 같이 다른 종류의 강성을 변화시키지 않으며, 또한 패취시험을 통과하였다. 적분점 수정량은 재료의 포아송비의 함수로 나타나며, 2차원 평면응력 상태와 평면변형률 상태에 대한 두개의 수정식을 구하였고, 또한 3차원 고체요소에 대하여 확장하였다. 가우스 적분점 수정법의 효과를 검증하기 위하여 보와 판의 자유 및 강제운동 문제를 해석하였으며, 등방성 적층 보와 판에 대해서도 단층보와 단층판과 같은 방법으로 적용하여 그 효율성을 입증하였다.

Abstract

For the same configuration of two-dimensional finite element models, 6-node element exhibits stiffer bending stiffness than 8-node element. This is true in the relation between 16-node element and 20-node element for three-dimensional model. This stiffening phenomenon comes from the elimination of several mid nodes from full-node elements. Therefore, this may be called 'relative stiffness stiffening phenomenon'. It seems that there are a couple of ways to correct the stiffening effect, however, we could find only one effective method-the method of modification of Gauss sampling points-which passes the patch test and does not alter other kinds of stiffness, such as extensional stiffness. The quantity of modification is a function of Poisson's ratios of the constituent materials. We could obtain two modification equations, one for plane stress case and the other for plane strain case. This method

* 국방과학연구소

** 경북대학교 기계공학과 교수

이 논문에 대한 토론을 1996년 6월 31일까지 본 학회에 보내주시면 1996년 12월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

can be extended to 3-dimensional solid elements. Except the exact plane strain cases, most 3-dimensional plates could be modeled successfully with 16-node element modified by the equation for the plane stress case. The effectiveness of the modification method is checked by applying it to several examples with excellent improvements. In numerical examples, beams with various boundary conditions are subjected to static and time-dependent loads. Free and forced motion analyses of beams and plates are also tested. The beam and plate may be composed of isotropic multilayers as well as a single layer.

1. 서 론

유한 요소법에 의한 굽힘 문제 해석에 있어서 2차원인 경우는 8절점 요소가, 3차원인 경우는 20절점 요소가 사용되고 있다¹⁻⁴⁾. 그러나 이러한 요소들은 자유도가 크기 때문에 널리 사용되지 않는다. 반면에 자유도를 줄인 보 요소, 판 요소 및 쉘 요소 등과 같은 많은 구조 요소들이 매우 광범위하게 사용되고 있다⁵⁻⁹⁾.

이러한 구조 요소들은 길이에 대한 두께의 비가 작을 때 강성 과잉 현상을 나타내며, 강성 과잉 현상을 줄이기 위하여 특별한 수정 방법들이 제안되었다^{5,6,10-13)}. 그러나 이와 같은 요소들은 고체 요소와의 연결이 불편하며, 또한 회전 자유도라는 비벡터량을 포함하고 있다. 이와 같이 자유도에 비벡터량이 포함되어 있기 때문에, 대변형 비선형 해석에 있어서는 하나의 하중 증분 내에서 선형화된 많은 적분 단계가 요구된다. 만일 선형화 단계의 수가 충분하지 않으면 평형 반복 계산에서도 제거되지 않는 오차가 축적된다^{8,9)}. 그래서 여러가지 개선된 방법들^{14,15)}이 제시되었으나 문제점이 완전히 해결되지는 않고 있다.

본 연구에서는 기존의 고체요소에서 자유도 수를 줄인 2차원 6절점 요소와 3차원 16절점 요소에 대한 연구를 하였다. 6절점 보요소는 2차원 8절점 보요소에서 두께 방향으로 중간에 위치한 2개의 절점을 제거한 6절점 요소(Fig.1)이며, 3차원 16절점 요소는 20절점 요소에서 두께 방향으로 중간에 있는 4개의 절점을 제거한 요소이다(Fig.2). 이 요소들은 모두 패취시험(patch test)^{17,18)}을 실시한 결과 통과되었다.

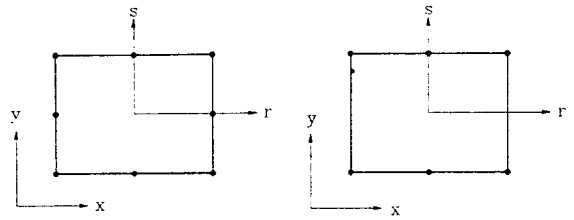
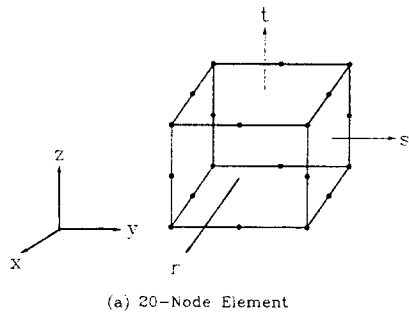
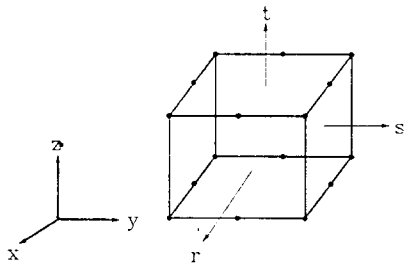


Fig.1 8-node element and 6-node element



(a) 20-Node Element



(b) 16-Node Element

Fig.2 20-node element and 16-node element

이러한 6절점 요소의 자유도 수는 12로 3절점 보요소의 9 자유도에 비해 약간 크나, 이는 수식의 단순성과 전 자유도(global degrees of freedom)가 벡터량인 점 등이 장점으로 생각된다. 이 때의

문제점으로 8절점 보요소에 비해 강성행렬의 평가 등에서 정확성이 떨어진다. 이를 해결하기 위하여 순수굽힘 평면응력 상태의 등방성 단층보에 대하여 8절점 보요소와 6절점 보요소의 굽힘변형 에너지를 같게 함으로써 두께방향의 가우스 적분점 수정방법을 유도하고, 이를 경계조건이 다른 등방성 보의 선형 및 비선형 정적문제와 강제운동 문제들에 적용하여 그 효율성을 입증한 바 있다¹⁹⁾. 또한 이를 2차원 적층보 문제로 확장하여 적층보에 관한 가우스 적분점 수정식을 구하고, 이를 보와 판의 자유진동 문제에 적용하여 그 효율성을 입증한 결과도 발표하였다²⁰⁾.

본 연구에서는 상기의 가우스 적분점 수정법의 강제운동 해석에서의 효율성을 검증한다. 강제(시간함수적) 운동은 먼저 내다지 판에 대한 모우드 해석을 수행하고, 그 결과를 바탕으로 모우드 중첩(mode superposition)²¹⁾을 통해 구하였다. 모우드 중첩을 위해 먼저 5차의 모우드에 대해 유한 요소 해석을 수행하였다. 각 모우드에 대해 고유진동수를 실험적으로 구하고, 유한 요소법에 의해 구해진 결과와 비교하여 그 타당성을 확인하였으며, 계산된 고유진동수와 진동모우드 및 실험에 의해 구해진 감쇠계수를 이용하여 5차의 모우드를 중첩하였다.

강제진동에 의한 시간함수적 응답 해석 실험은 data acquisition system, 퍼스널 컴퓨터, 브리지 회로를 포함한 증폭회로 및 스트레인 게이지가 부착된 시험편 등으로 수행하였다.

2. 가우스 적분점 수정식

등방성 단층 2차원 6절점 보요소의 가우스 적분점 수정식을 확장하여 등방성 적층 2차원 6절점 요소에 대한 가우스 적분점 수정식을 구하는 방법^{19,20)}을 소개한다.

2.1 등방성 적층 2차원 6절점 보요소의 가우스 적분점 수정

적층 구조물에서는 한개의 요소가 여러층으로 구성되어 있으므로 강성행렬과 등가절점력 계산 시 요소를 구성하고 있는 각층에 대하여 구한 다

음 이를 중첩하여 구한다⁴⁾.

6절점 요소에 대한 가우스 적분점 수정식을 구하기 위하여 먼저 Fig.3과 같이 순수 굽힘 상태에 있는 적층 등방성 2차원 8절점 요소의 등가 절점력 $\{F\}_8$ 은 단층보 경우와 같은 방법으로 구하며 식 (1)과 같다.

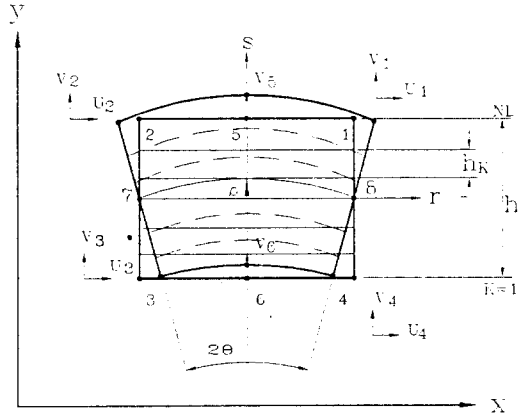


Fig.3 8-node element of laminated beam in pure bending

$$\{F\}_8 = \sum_{k=1}^{NL} \sum_{j=1}^6 \frac{W_j W_k b_k E_k t}{2(1-\nu_k)} \begin{Bmatrix} s_{j,k}(1-\nu_k) \\ 0 \\ -s_{j,k}(1-\nu_k) \\ 0 \\ s_{j,k}(1-\nu_k) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1)$$

여기서, NL은 적층 수, $0J$ 는 Jacobian determinant, h는 보의 전체 두께이다. 그리고 N은 가우스 수치 적분점 차수, W_j 와 W_k 는 가우스 수치적분의 weight factor, $S_{j,k}$ 는 K번째 층의 두께방향의 sampling point, b_k 는 K번째 층의 폭, h_k 는 K번째 층의 두께를 나타낸다. 그리고 E_k 와 ν_k 는 K번째 층의 탄성계수와 프와송 비를 나타낸다.

또한, Fig.4와 같이 순수 굽힘 상태에 있는 층수가 NL인 2차원 6절점 요소의 등가 절점력 $\{F\}_6$ 은 단층 6절점 요소의 등가 절점력을 구하는 방법으로 구할 수 있으며 식(2)와 같다.

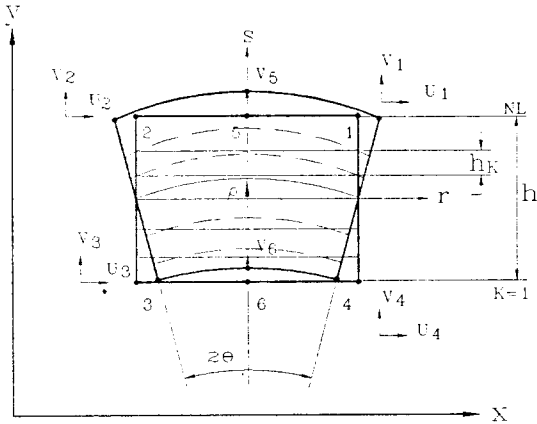


Fig.4 6-node element of laminated beam in pure bending

$$\begin{aligned}
 \{F\}_6 &= \int_0^l [B_{L0}]_6^T [D] [B_{L0}]_6 \{U\}_6 d^0 V \\
 &= \sum_{K=1}^{N_L} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N [B_{L0}]_6^T [D_K] [B_{L0}]_6 \{U\}_6 \int_0^l W_i W_j \\
 &\quad b_K \frac{h_K}{h} \\
 &= \sum_{K=1}^{N_L} \sum_{j=1}^N \frac{\int_0^l W_i W_j b_K E_K \theta}{2(1-\nu_K^2)} \frac{h_K}{h} \begin{bmatrix} s_{jK}^2 \\ 0 \\ -s_{jK}^2 \\ s_{jK}^2 \\ 0 \\ -s_{jK}^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2)
 \end{aligned}$$

굽힘이 일어나는 동일한 형상에 대해서 6절점 요소와 8절점 요소의 등가 절점력이 식(3)의 관계를 만족할 때 6절점 요소와 8절점 요소의 변형에 미치는 등가 관계를 만족한다.

$$\{F\}'_6 = \{F\}_8 \quad (3)$$

여기서 $\{F\}'_6$ 는 $\{F\}_8$ 의 차원으로 확장된 $\{F\}_6$ 를 의미하며, 식(3)과 같은 힘의 평형 관계로부터, 6절점 요소에서 임의의 K층의 두께 방향으로의 가우스 적분점 위치 S_{6K} 가 8절점 요소에서의 가우스 적분점 위치 S_{8K} 와 식(4)을 만족하면, 유한 요소의 절

점력의 등가 관계가 성립될 수 있다.

$$S_{6K} = S_{8K} (1 - \nu_K^2)^{1/2} \quad (4)$$

식(4)는 등방성 2차원 적층보의 8절점 요소에 대한 6절점 요소의 두께 방향으로의 가우스 적분점 수정식이다. 평면 변형을 상태에 있는 적층보에서의 가우스 적분점 수정식은 식(4)의 프와송 비를 수정함으로써 식(5)와 같이 구할 수 있다.

$$S_{6K} = S_{8K} \left\{ 1 - \left(\frac{\nu_K}{1-\nu_K} \right)^2 \right\}^{1/2} \quad (5)$$

2.2 등방성 적층 3차원 16절점 요소의 가우스 적분점 수정

등방성 적층판의 굽힘변형은 등방성 적층 2차원 보의 굽힘변형 현상을 3차원적으로 확장 적용하였다. 등방성 3차원 판의 굽힘 변형 특성은 평면 응력 상태와 평면 변형을 상태 두가지의 극단적인 경우의 사이에 위치하나, 실제 여러 가지 수치계산을 통하여 평면 응력 상태에 매우 근접함을 알 수 있다. 따라서 등방성 적층판의 순수 굽힘 변형이 y-z방향으로 일어나는 평면응력 상태인 경우, 등방성 적층 2차원 굽힘현상과 같게 해석할 수 있다. 따라서 16절점 요소 사용시, 20절점 요소에 대한 굽힘변형이 일어나는 y-z평면에 대해서 가우스 적분점 수정식을 구한다.

2차원적 순수 굽힘 상태에 있는 20절점 요소의 y-z평면상에 존재하는 절점수는 8개로 Fig.5와 같이 나타낼 수 있다. 따라서 20절점 요소의 경우도 2차원 8절점 요소의 경우와 같이 2차원적 순수 굽

$$\{F_{20}\}_{y-z} = \sum_{K=1}^{N_L} \sum_{j=1}^N \frac{\int_0^l W_i W_j b_K E_K \theta}{2(1-\nu_K^2)} \frac{h_K}{h} \begin{bmatrix} c_{jK}(1-\nu_K^2) \\ 0 \\ -c_{jK}(1-\nu_K^2) \\ 0 \\ c_{jK}(1-\nu_K^2) \\ 0 \\ -c_{jK}(1-\nu_K^2) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

힘 상태에서 폭 방향이 평면응력 상태라고 가정하고 등가 절점력을 구하면 식(6)과 같다.

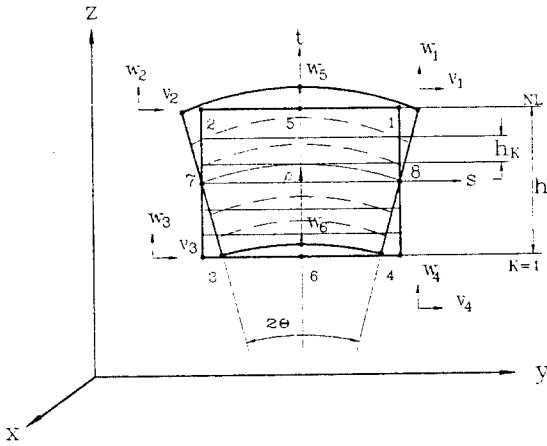


Fig.5 20-node laminated plane stress element in pure bending (-1 ≤ r, s, t ≤ +1)

또한, 2차원적 굽힘 변형 상태인 층수가 NL개인 적층판의 16절점 요소에서 y-z면상에 존재하는 절점의 갯수는 6개로 2차원 6절점 요소와 같고, 이를 Fig.6과 같이 나타낼 수 있다. 따라서 16절점 요소의 경우도 2차원 6절점 요소의 경우와 같이 2차원적 순수 굽힘상태에서 폭 방향이 평면응력 상태라고 가정하고 등가 절점력을 구하면 식(7)과 같다.

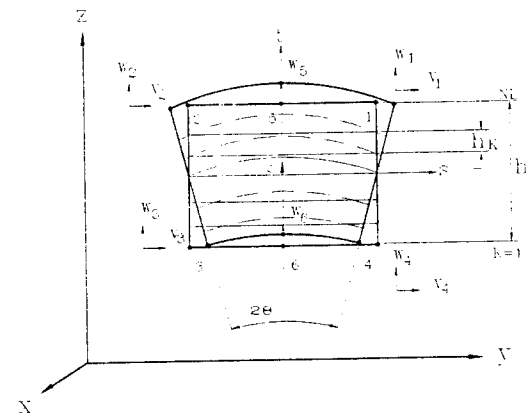


Fig.6 16-node laminated plane stress element in pure bending (-1 ≤ r, s, t ≤ +1)

$$\begin{aligned}
 \{F_{16}\}_{y-z} &= \int_0^1 [B_{L0}]_{16}^T [D] [B_{L0}]_{16} \{U\}_{16} d^t V \\
 &= \sum_{K=1}^{NL} \sum_{r=1}^K \sum_{s=1}^K [B_{L0}]_{16}^T [D_K] [B_{L0}]_{16} \{U\}_{16} [{}^t J] \\
 &= \sum_{K=1}^{NL} \sum_{r=1}^K \frac{[{}^0 J] W_r b_K E_K \theta}{2(1-\nu_K^2)} \frac{h_K}{h} \begin{bmatrix} t_{jk}^2 \\ 0 \\ -t_{jk}^2 \\ 0 \\ t_{jk}^2 \\ 0 \\ -t_{jk}^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7)
 \end{aligned}$$

굽힘이 일어나는 y-z평면에서 20절점 요소와 16절점 요소의 변형 에너지를 등가로 놓으면, 힘의 평형 관계는 식(8)과 같다.

$$\{F_{16}\}'_{y-z} = \{F_{20}\}_{y-z} \quad (8)$$

여기서 $\{F_{16}\}'_{y-z}$ 는 $\{F_{16}\}_{y-z}$ 의 차수를 $\{F_{20}\}_{y-z}$ 의 차수로 확장한 경우의 것이다. 식(8)의 힘의 평형 관계로부터, 20절점 요소의 임의의 K층에서 두께 방향의 가우스 적분점 위치를 $t_{(20)jK}$, 16절점 요소의 임의의 K층에서의 가우스 적분점 위치를 $t_{(16)jK}$ 이라 두면, 다음 식(9)와 같이 두께 방향의 가우스 적분점 수정식을 구할 수 있다.

$$t_{(16)jK} = t_{(20)jK} (1 - \nu_K^2)^{1/2} \quad (9)$$

한편, 식(9)가 판의 굽힘 강성 수정에 대해서는 매우 효과적이거나, 비틀림 강성에 대해서는 $(1 - \nu_K^2)$ factor의 원치 않는 저평가를 하게 되므로, inplane 전단탄성계수를 식(10)과 같이 수정함으로써 원래의 비틀림 강성을 회복하게 된다.

$$G_{(16)12K} = G_{(20)12K} / (1 - \nu_K^2) \quad (10)$$

여기서, $G_{(20)12K}$ 는 20절점 요소에서의 K번째 층의

1-2 평면상의 전단탄성계수이고, $G_{(16)12K}$ 는 16절점 요소에서의 전단탄성계수이다.

한편 식(9)와 식(10)에서 $K=1$ 이면 등방성 단층 16절점 요소의 가우스 적분점 수정식과 inplane 전단탄성계수의 수정식이 되며 다음과 같다²⁰⁾.

$$t_{(16)j} = t_{(20)j} (1 - \nu^2)^{1/2} \quad (11)$$

$$G_{(16)12} = G_{(20)12} / (1 - \nu^2) \quad (12)$$

이 때 t_j 를 수정하지 않고 탄성계수 E 를 수정하는 방법도 제시되었으나¹⁾, 이는 인장문제 또는 인장-압축 문제 등에서 길이 방향의 강성을 부정확하게 평가하게 되므로 바람직하지 못하다고 할 수 있다.

3. 수치계산 및 고찰

2장에서 유도한 2차원 6절점 요소에 대해 식(4)와 같이 제시한 가우스 적분점 수정의 실효성과 식(9)와 식(11)과 같이 제시한 16절점 요소에 대한 가우스 적분점 수정식 및 식(10)과 식(12)에서 제시한 횡탄성계수 수정식의 실효성을 수치해석과 실험을 통하여 검토하였다. 해석에 적용한 문제 및 검토 내용은 다음과 같다.

3.1 2차원 등방성 보의 자유진동해석²⁰⁾

단층보의 자유진동 해석에서의 6절점 요소의 가우스 적분점 수정의 효율성을 검증하기 위하여 양단이 완전 자유 상태에 있는 단층보를 Fig.7과 같이 2차원 6절점 요소로 분할하였다. 유한 요소는 8절점 요소의 해석에서와 같이 6개의 요소로 등분할하였으며, 가우스 적분차수도 2×2 를 사용하였다. 6절점 요소의 해석 결과를 Table 1에서 8절점 요소의 해석 결과와 Table 1에서 8절점 요소의 해석 결과와 비교하였다. 해석 결과를 보면 식(4)의 가우스 적분점을 수정한 6절점 요소의 경우가 수정하지 않는 경우보다 8절점 요소의 해석 결과와 잘 일치하고 있음을 알 수 있다.

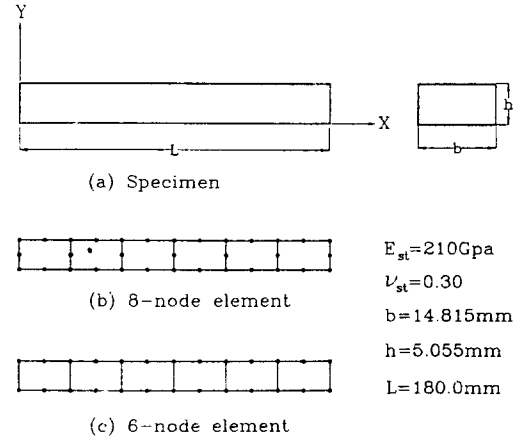


Fig.7 Geometry, material properties and finite element models of beam with free-free boundary condition

Table 1 Comparison of the natural frequencies of modified 6-node and unmodified 6-node models with the results of 8-node model of beam

Mode Number	Natural Frequency(Hz)		
	8-Node	Unmodified 6-Node (% error)	Modified 6-Node (% error)
1st Mode	828.1	868.0(4.82)	828.2(0.012)
2nd Mode	2287.0	2396.0(4.77)	2287.0(0.0)
3rd Mode	4542.0	4752.0(4.63)	4539.0(0.066)
4th Mode	7762.0	8098.0(4.33)	7743.0(0.24)

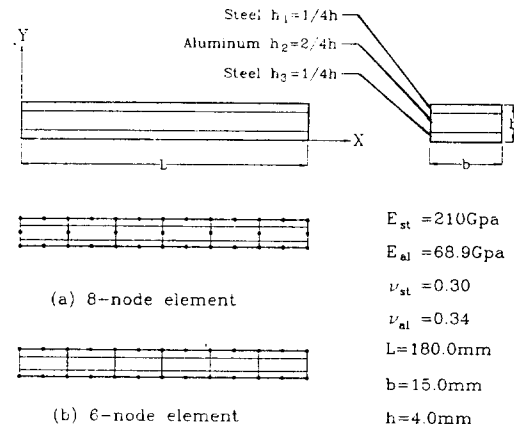


Fig.8 Geometry, material properties and finite element models of three layer steel/ aluminum/ steel laminated beam with free-free boundary condition

Table 2 Comparison of the natural frequencies of modified 6-node and unmodified 6-node models with theoretical and numerical(8-node model) ones of three layer steel/ aluminum/ steel laminated beam with free-free boundary condition

Mode Number	Natural Frequency(Hz)			
	Theoretical	8-Node	Unmodified 6-Node (% error)	Modified 6-Node (% error)
1st Mode	957.0	978.0	1022.0(4.50)	978.0(0.0)
2nd Mode	2637.0	2757.0	2871.0(4.13)	275.0(0.22)
3rd Mode	5169.0	5617.0	5818.0(3.58)	5585.0(0.57)
4th Mode	8545.0	9866.0	10137.0(2.75)	9756.0(1.11)

적층 등방성 보의 자유진동 해석에 대한 6절점 요소의 두께 방향의 가우스 적분점 수정식의 타당성을 밝히기 위해 Fig.8과 같이 강과 알루미늄으로 적층된 샌드위치 보에 대하여 8절점 요소와 6절점 요소로 모델링하여 자유진동 해석을 하였다.

가우스 적분점 수정을 적용한 결과와 적용하지 않은 해석 결과를 8절점 요소의 같은 해석 결과와 이론치²⁾를 함께 Table 2에 나타내었다. Table 2에서 나타낸 바와 같이 적층보에서도 가우스 적분점을 수정한 6절점 요소의 해석 결과가 수정하지 않은 6절점 요소의 해석 결과 보다 8절점 요소의 해석 결과와 잘 일치함을 알 수 있다.

3.2.3차원 단층 등방성 판의 자유진동 실험과 해석²⁰⁾

단층판의 자유진동 해석에 있어서 16절점 요소

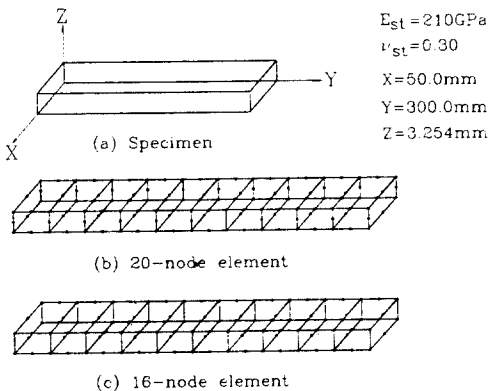


Fig.9 Geometry, material properties and finite element models of plate with all-free boundary condition

Table 3 Comparison of the natural frequencies of modified 16-node and unmodified 16-node models with the results of 20-node model of plate

Mode Number	Natural Frequency(Hz)			
	20-Node	Unmodified 16-Node (% error)	Modified 16-Node ¹ (% error)	Modified 16-Node ² (% error)
1st Mode	194.0	203.0(4.64)	194.0(0.0)	194.0(0.0)
2nd Mode	544.0	574.0(5.51)	548.0(0.74)	548.0(0.74)
3rd Mode (torsional)	698.0	699.0(0.14)	667.0(4.44)	698.0(0.0)
4th Mode	1102.0	1166.0(5.81)	114.0(1.09)	116.0(1.28)
5th Mode (torsional)	1424.0	1431.0(0.49)	1366.0(4.07)	1428.0(0.28)

- 1 : The results by using Eq. (11)
- 2 : The results by using Eq. (11) and Eq. (12)

의 가우스 적분점 수정식(11)의 효율성을 검증하기 위하여 20절점 요소와 16절점 요소를 사용하여 Fig.9와 같이 각각 10개의 요소로 등분할하여, 자유진동 해석을 하였다. 이 때의 가우스 르장드르 적분 차수는 3×3를 사용하였다. 가우스 적분점과 횡탄성계수 수정식을 적용한 16절점 요소와 수정하지 않은 16절점 요소에 의한 계산 결과를 Table 3에 20절점 요소를 사용한 경우의 해석 결과와 비교하였다.

단층판의 경우 16절점을 사용할 때, 두께 방향의 가우스 적분점만을 수정한 경우 즉 식(11)를 적용할 경우는 굽힘 모우드의 고유진동수는 잘 일치하나 비틀림에 의한 고유진동수는 오차가 크게 나타났다. 이 때 가우스 적분점 수정에 기인한 비틀림 강성의 저평가를 보정하는 식(12)를 식(11)과 동시에 적용하면 굽힘 모우드와 비틀림 모우드를 동시에 만족함을 알 수 있다.

적층판의 자유진동 해석을 위한 16절점 요소에 대한 가우스 적분점 수정식(9)와 횡탄성계수 수정식(10)의 타당성을 밝히기 위해 Fig.10과 같이 3층의 샌드위치 판에 대하여, 강으로만 적층된 경우와 강과 알루미늄으로 적층된 경우에 대하여 20절점 요소와 16절점요소로 모델링하여 자유진동 해석을 하였다. 16절점 모델과 수정된 16절점 모델에 의한 해석 결과와 20절점 모델의 결과 이론치와 함께 Table 4, Table 5에 나타내었다.

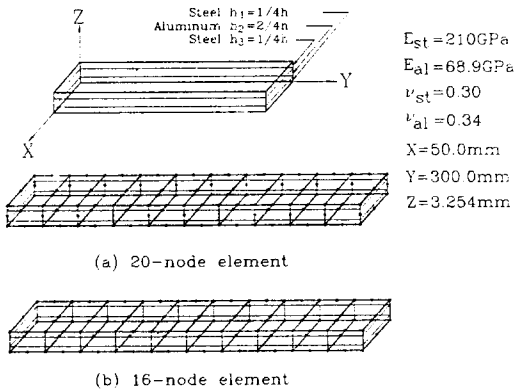


Fig.10 Geometry, material properties and finite element models of three layer steel/ aluminum/ steel laminated plate with all-free boundary condition

Table 4 Comparison of the natural frequencies of modified 16-node and unmodified 16-node models with theoretical and numerical(20-node model) ones of three layer steel/ aluminum/ steel laminated plate with all-free boundary condition

Mode Number	Natural Frequency(Hz)			
	Theoretical	20-Node	Unmodified 16-Node (% error)	Modified 16-Node (% error) ¹
1st Mode	225.0	227.0	238.0(4.85)	227.0(0.00)
2nd Mode	621.0	637.0	669.0(5.02)	640.0(0.47)
3rd Mode (torsional)	-	818.0	819.0(0.12)	819.0(0.12)
4th Mode	1218.0	1263.0	1353.0(7.13)	1296.0(2.61)
5th Mode (torsional)	-	1670.0	1677.0(0.42)	1673.0(0.18)

* 1 : The results by using Eq. (9) and Eq. (10)

Table 4, Table 5에서 보면 가우스 적분점을 수정한 16절점 요소의 해석 결과가 수정하지 않은 16절점 요소의 해석 결과보다 20절점 요소의 해석 결과와 잘 일치함을 알 수 있다. 그러나 요소를 세분화한 3X10개의 요소로 모델링한 경우는 가우스 적분점과 횡탄성계수를 수정할 필요가 없음을 알 수 있다.

3.3 강제진동에 의한 판의 시간함수적 응답 해석

강제진동에 의한 판의 시간함수적 응답 해석에

Table 5 Comparison of the natural frequencies of modified 16-node and unmodified 16-node models with theoretical and numerical(20-node model) ones of three layer steel/ aluminum/ steel laminated plate with all-free boundary condition

Mode Number	Natural Frequency(Hz)				
	Theoretical	20-Node ¹	Unmodified 16-Node ¹ (% error)	Modified 16-Node ¹ (% error)	Unmodified 16-Node ² (% error)
1st Mode	192.0	193.0	202.0(4.66)	193.0(0.00)	194.0(0.52)
2nd Mode	530.0	544.0	571.0(4.96)	546.0(0.37)	547.0(0.55)
3rd Mode (torsional)	-	700.0	700.0(0.00)	700.0(0.00)	
4th Mode	1039.0	1098.0	1157.0(5.37)	1108.0(0.91)	1103.0(0.45)
5th Mode (torsional)	-	1428.0	1434.0(0.42)	1431.0(0.21)	1428.0(0.00)

* 1 : The results of 1×10 elements models

* 2 : The results of 3×10 elements models

서도 16절점 요소에 대한 가우스 적분점 수정의 효율성을 확인하기 위하여 모우드 측정과 강제진동 실험을 실시하였고, 이를 수치해석 결과와 비교하였다.

3.3.1 단층 등방성 판의 강제진동 실험 및 20절점 요소에 의한 해석

1) 시편의 제원 및 물성치

강제진동의 실험용 시험편은 Fig.9에 나타낸 판을 사용하여 Fig.11과 같이 자유단 길이가 270.0mm인 내다지보를 만들고, X, Y, Z좌표로(25.0, 15.0, 3.254)의 위치에 스트레인 게이지를 부착하였다.

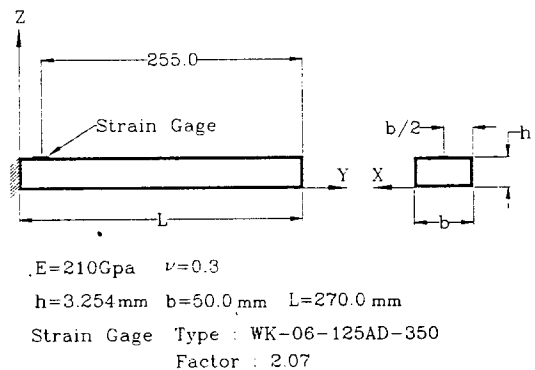


Fig.11 Specimen configuration

2) 실험장치의 구성

실험은 단층판에 대하여 진동 모우드 측정과 강제진동 등 두가지를 실시하였으며, 강제진동 실험 장치는 Photo. 1과 같고, 시험편, 브리지 회로, 증폭기 회로, 데이터 추출을 위한 A/D converter (Global data aquisition system) 및 개인용 컴퓨터(PC386)로 구성하였다.



Photo.1 Experimental apparatus for strain measurement

3) 실험 방법

강제진동은 시험편의 끝단에 힘을 가하여 끝단의 변위를 주면 판은 진동을 하게 된다.

이 때의 진동을 시험편에 부착된 스트레인 게이지의 변형에 의한 전압 변화량을 A/D 변환기를 통해 컴퓨터에 저장하였다. 이 때 데이터 추출 시간 간격은 $200\mu\text{sec}$ 이며, 입력전압은 DC5V이다. 여기서 구한 전압변화를 식(13)를 이용하여 변형율(ϵ)을 구하였다.

$$\epsilon = \frac{2E_{out}}{E_{input} F} \quad (13)$$

여기서, F =gage factor, E_{input} =입력전압, E_{out} =전압차이다.

4) 실험 결과와 20절점 요소에 의한 시간함수적 응답 해석의 비교

등방성 단층판의 시간함수적인 응답 해석을 위해 유한요소 모델을 Fig.12(b)와 같이 20절점 요소로 모델링을 하였으며, 수치 해석시의 시간 증

분 Δt 는 실험시의 데이터 추출시간 간격과 같은 $200\mu\text{sec}$ 이다.

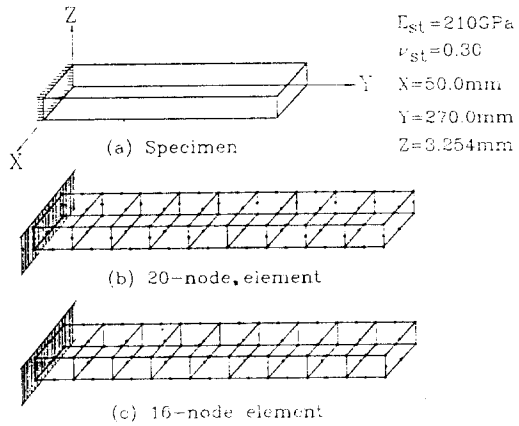


Fig.12 Geometry, material properties and finite element models of an isotropic cantilever plate

시험편 끝단에 5.1mm의 초기 변위를 준 다음, 이 구속 조건을 갑자기 제거할 때 발생하는 변위 응답 및 변형을 응답을 5차의 진동 모우드를 중첩하여 구하였다. 이 때의 감쇠계수는 실험 결과 1차 모우드의 특성만 나타나 1차 모우드의 감쇠계수를 실험에 의해 구한 0.01을 사용하였고, 나머지 4개 차 모우드의 감쇠계수는 0을 사용하였다. 그리고 실험의 결과와 20절점 요소에 의한 해석의 결과를 Fig.13에 함께 비교하였다.

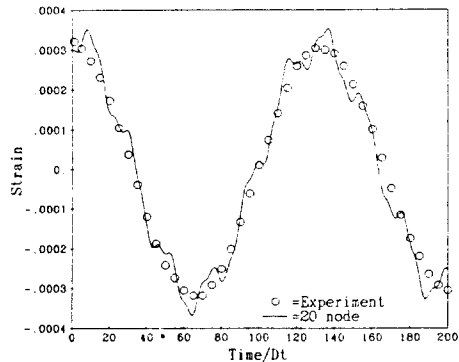


Fig.13 Computed and measured strains of a cantilever plate with initial displacement

3.3.2 수정된 16절점 요소를 이용한 강제진동 해석

등방성 단층판의 강제진동에 의한 시간함수적인 응답 해석에 있어서 16절점 요소를 사용할 때의 가우스 적분점 수정식(11)의 효율성을 보기 위하여 Fig.12(c)와 같이 16절점 요소로 모델링을 하였으며, 수치 해석시의 시간 증분 Δt 는 $200\mu\text{sec}$ 이다.

16절점 요소 모델의 초기 변위는 20절점 요소의 경우와 같이 시험편 끝단에 5.1mm의 초기 변위를 준 다음, 이 구속 조건을 갑자기 제거할 때 발생하는 변위 응답 및 strain 응답을 5차의 진동 모우드를 중첩하여 구하였다. 이 때의 감쇠계수는 20절점 요소의 경우와 같이 1차 모우드의 감쇠계수를 실험에 의해 구한 0.01을 사용하였고, 나머지 4개 차 모우드의 감쇠계수는 0을 사용하였다.

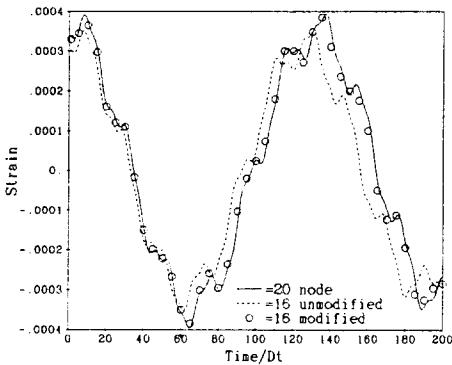


Fig.14 Computed strains of a cantilever plate with initial displacement

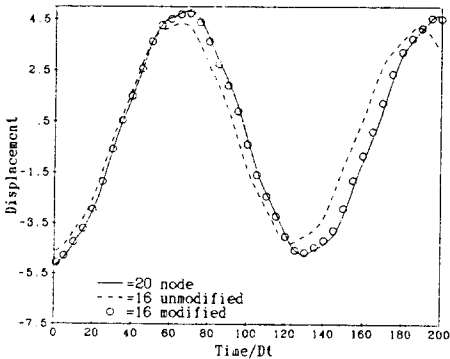


Fig.15 Displacements of a cantilever plate with initial displacement

해석의 결과를 20절점 요소의 같은 해석 결과와 함께 Fig.14에 변형을 응답을, Fig.15에 변위 응답을 함께 비교하였다. Fig.14와 Fig.15 모두에서 시간함수적인 응답의 해석에서도 가우스 적분점 수정 적용한 경우가 수정 적용하지 않은 경우보다 20절점 요소에 의한 해석 결과와 잘 일치함을 알 수 있다.

3.3.3 적층 등방성 판의 강제진동 해석

적층 등방성 판에 대한 시간함수적인 응답 해석에서의 가우스 적분점 수정식(9)과 inplane 전단탄성 계수 수정식(10)의 효율성을 확인하기 위하여 Fig.16과 같이 3층으로 적층된 판을 20절점 요소와 16절점 요소로 모델링하여 해석하였다. 초기하

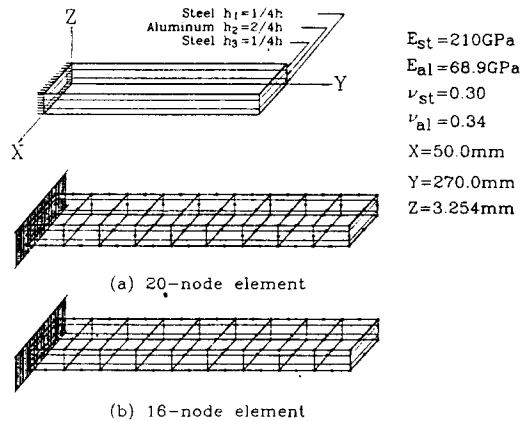


Fig.16 Geometry, material properties and finite element models of three layer cantilever plate with initial displacement

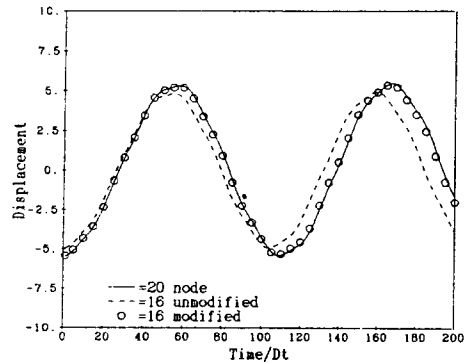


Fig.17 Displacements of three layer cantilever plate with initial displacement

중은 끝단에 10N(step function)을 가하였으며, 이 때의 시간 증분 Δt 는 200 μ sec이며, 5차의 진동 모우드를 중첩하였고, 각 모우드에서의 감쇠계수는 0을 사용하였다.

20절점 요소의 해석 결과와 수정한 16절점 요소의 변위 응답 해석 결과를 Fig.17에 나타내었다. 해석 결과를 살펴보면 적층의 경우에 있어서도 가우스 적분점을 수정 적용한 경우가 20절점에 의한 해석 결과와 더 잘 일치함을 알 수 있다.

4. 결 론

2차원 적층 등방성 보의 자유도를 줄이기 위하여, 8절점 요소에서 자유도를 줄인 6절점 요소를 사용하여 굽힘 문제를 해석할 때 발생하는 상대적 강성과잉 현상을 해결하기 위한 방법으로 2차원 6절점 요소에서의 가우스 적분점 수정식을 확장하여, 2차원 등방성 적층보와 3차원 적층판의 가우스 적분점 수정식을 유도하였다. 이 수정식의 타당성을 확인하기 위하여 감쇠 또는 비감쇠 시간함수적 응답해석을 수행하였으며, 강제진동 실험을 수행하여 해석 결과와 비교하여 가우스 적분점 수정식과 횡탄성 계수 수정식의 타당성을 확인하였으며, 몇가지 모델에 대해 실제 적용을 해본 결과를 요약하면 다음과 같다.

1. 2차원 적층 등방성 보에 대해서 6절점 요소 사용시의 가우스 적분점 수정식을 유도하였다.

1) 단층 등방성 보의 시간함수적 응답해석 문제에서 적분점 수정식은 효과적임이 확인되었다.

2) 적층 등방성 보의 시간함수적 응답 해석 문제에서도 가우스 적분점 수정식은 효과적임을 해석을 통해서 밝혔다.

2. 3차원 적층 등방성 판의 16절점 요소 사용시의 가우스 적분점 수정식과 비틀림 모우드 수정을 위한 횡탄성계수의 수정식을 유도하였다.

1) 단층 등방성 판의 시간함수적 응답 해석에서 가우스 적분점 수정식과 함께 횡탄성계수의 수정식이 효과적임을 밝혔다.

2) 적층 등방성 판에 대한 강제진동에 의한 시간함수적인 응답 해석에서도 16절점 요소 사용시 가우스 적분점 수정식과 횡탄성 계수의 수정식이 효과적임을 밝혔다.

참 고 문 헌

1. Zienkiewicz, O.C., *The Finite Element method*, 3rd Ed., McGraw-Hill, New York, 1977.
2. Mondakor, D.P. and Powell, G.H., "Evaluation of Solution Schemes for Nonlinear Structure", *Computers & Structures*, Vol.9, pp. 223-236, 1980.
3. Kim, Y.H. and Lee, S.W., "A Solid Element Formulation for Large Deflection Analysis of Composite Shell Structures," *Computers & Structures*, Vol.30, no.1/2, 1988, pp.269-274.
4. Liao, C.L., Reddy, J.N., and Engelstad, S.P., "A Solid-Shell Transition Element for Geometrically Nonlinear Analysis of Laminated Composite Structures", *Int. J. Num. Method. Eng.*, Vol.26, 1988, pp.1843-1854.
5. Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L., and Too, M., "Reduced Integration Techniques in General Analysis of Plates and Shells", *Int. J. Num. Method. Eng.*, Vol.3, 1971, pp.275-290.
6. Pugh, E.D.L., Hinton, E., and Zienkiewicz, O.C., "A Study of Quadrilateral Plate Bending Elements with Reduced Integration", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol.12, 1978, pp.1059-1079.
7. Bathe, K.J., and Bolourchi, S., "A Geometric and Material Nonlinear Plate and Shell Element", *Computers & Structures*, Vol.11, 1980, pp.23-48.
8. Wood, R.P., and Zienkiewicz, O.C., "Geometrically Nonlinear Finite Element Analysis of Beams, Frames, Arches and Axisymmetric Shells", *Computer & Structures*, Vol.7, 1976, 724-735.
9. Bathe, K.J., and Bolourhi, S., "Large Displacement Analysis of Three-Dimensional Beam Structures", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol.14, 1979, pp.961-981.
10. Pawsey, S.F., and Clough, R.W., "Improved Numerical Integration of Thick Shell Finite Elements", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol.3, 1971, pp.575-586.
11. Huges, T.J.R., Cohen, M., and Haroun, M., "Reduced and Selective Integration Techniques in the Finite Analysis of Plates", *Nuclear Eng. Design*, Vol.46, 1978, pp.206-222.

12. Belytschko, T., Liu, W.K., Ong., S.J., and Lam, D., "Implementation and Application of a 9-Node Lagrange Shell Element with Spurious Mode Control", *Computer & Structures*, Vol.20, No.1-3, 1985.
13. Prathap, G. and Babu, C.R., "An Isoparametric Quadratic Thick Curved Beam Element", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol.23, 1986, pp.1583-1600.
14. Surana, K.S., "Geometrically Nonlinear Formulation for the Curved Shell Element", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol.19, 1983.
15. Yang, T.Y. and Saigal, S., "A Simple Element for Static and Time-Dependent Response of Beams with Material and Geometric Nonlinearities", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol.20, 1984, pp.851-867.
16. 김정운, 권영두, "특이 경계조건을 갖는 보의 동적 비선형해석", *대한기계학회논문집*, 제15권, 제3호, 1991, pp.799-808.
17. Irons, B. and Loikkanen, M., "An Engineers' Defence of The Patch Test", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol.19, 1983, pp.1381-1401.
18. Taylor, R.L., Simo, J.C., Zienkiewicz, O.C., and Chan, A.C., "The Patch Test-A Condition for Assessing FEM Convergence", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol.22, 1986, pp.39-62.
19. 김정운, 정래훈, 권영두, "6절점 Isoparametric 요소의 가우스 적분점 수정에 관하여", *대한기계학회 논문집*, 제17권, 제12호, 1993, pp.3007-3019.
20. 김정운, 경진호, 권영두, "가우스 적분점을 수정한 2차원 6절점 요소 및 3차원 16절점 요소에 의한 자유진동해석", *대한기계학회 논문집*, 제18권, 제11호, 1994, pp.2922-2931.
21. Bathe, K.J., *Finite Element Procedure in Engineering Analysis*, Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1982.
22. Blevins, R. D., *Formulas for Natural Frequency and Mode Shape*, Van Nostrand Reinhold Ltd., New York, NY, 1979.

(접수일자 : 1995. 6. 22)