

〈연구논문〉

나선형 마이크로 조직체의 수동력학적 저항 및 이동계수 계산에 관한 연구

김윤제 · 김선철* · 배운영*

성균관대학교 기계설계학과, *한국원자력연구소 유체계통설계부
(1995년 1월 9일 접수)

A Calculation of Hydrodynamic Resistivity and Mobility Coefficients for Screw-sensed Microstructural Particles

Y. J. Kim, S. C. Kim* and Y. Y. Bae*

Department of Mechanical Design, Sung Kyun Kwan University, Suwon 440-746, Korea

*Fluid System Design Division, Korea Atomic Energy Research Institute, Taejon 305-353, Korea

(Received January 9, 1995)

요 약

아주 작은 Reynolds수 조건하의 나선형 미세입자가 갖는 저항 및 이동계수를 계산하는 일반적인 방법을 논하였다. 이러한 문제의 해를 구하기 위해서는 입자의 중심선을 따라 분포되어 있는 stokeslet으로 수식화된 유동장을 필요로 한다. 입자에 작용하는 수동력학적 힘과 토크는 이러한 stokeslet의 적분에 의하여 구할 수 있는데, 유동 특성에 따라 2계 이상의 텐서에 비례한다. Johnson에 의하여 유도된 적분 방정식은 LU-분해법을 사용하여 해를 구하였다. 해석 결과의 정확성은 침상체를 모델로 하여 Brenner의 엄밀해와 비교하였으며, 일치된 결과를 얻었다.

Abstract—A general method for computing the resistance and mobility matrices for a screw-sensed microstructural particle, under the condition of vanishingly small Reynolds number, is presented. The solution of this problem requires the formulation of flowfield in terms of stokeslets distribution along the particle centerline. The integral equation found by Johnson is solved by using LU-decomposition method. The accuracy of the method is illustrated by comparing with the analytical formulas by Brenner for a slender needle, and shows good agreement.

Keywords : Slender body theory, screw-sensed filament, stokeslets, resistance tensors

1. 서 론

저 레이놀즈수(low Reynolds number) 유동 현상은 혈액속의 적혈구 운동, 에어졸(aerosol), 운환, 침전(sedimentation), 유변학(rheology) 및 생물리학이나 지구물리학등 여러 분야에 나타나고 있다. 예를들어, 편모충이나 섬모충등의 미생물이 추진운동으로 인하여 받게되는 힘은 미생물의 형상이나 운동 형태에 따라

달라질 수 있다[1]. 유변학 분야로는 단섬유 보강 플라스틱 재료의 사출성형 공정이나 페인트등의 물성치가 혼탁물의 수력학적 전단유동을 내포하는 경우가 있으며, 또한 제지공정의 제지섬유 응집에 따른 유동도 저 Reynolds수 유동현상의 한 예라 할 수 있다[2,3].

본 연구에서는 무한 점성 유체속의 입자가 갖는 운동 범위를 병진운동(translation)과 회전운동(rotation)에 국한시켰는데, 이러한 운동은 左·右螺旋形 絲狀體

(left-handed & right-handed screw-sensed particles: LHP & RHP)에 동일한 영향을 미치지, 라세미산(racemic)과 같은 혼합물의 분리 수단을 제공하지는 않는다. 하지만, 전단흐름과 같은 복잡한 유동장을 통한 분리는 가능하며 이러한 결과는 실질적인 미립자 운동을 분석하는데 기초수단으로 이용될 수 있다[4].

Happel & Brenner[5]는 무한 유체내에서 병진운동과 회전운동으로 구성되는 모든 범주의 운동은 입자가 갖고 있는 선형 및 각속도에 따라 입자에 작용되는 힘과 토크는 3가지 2차텐서(dyadics)를 이용하여 구할 수 있다고 하였다. 이러한 세가지 텐서는 입자가 갖는 기하학적 형상에 좌우되는데, 구형이나 타원형 입자같은 대칭형 구조에서는 저항계수 행렬식의 많은 요소가 제로값을 갖게 되지만, 비대칭형 입자 구조에서는 최대 21개의 행렬요소를 갖게 된다. 3차원 구조를 갖는 나선형 사상체의 저항계수에 대한 실험적인 측정치는 아직 발표된 적이 없지만, 이론적으로 다음과 같은 두가지 근사방법에 의하여 규명할 수 있다. 먼저, 저항력 이론(resistive-force theory)을 들 수 있는데, 이는 사상체 구조를 마치 원통 조각의 연결로 이루어져 있다고 고려하여 각 원통조각 상호간에 영향이 없다고 가정한다. 또한, 단위길이당 입자에 작용하는 힘은 두개의 구성요소, 즉 원통조각의 축을 따라 수직과 수평방향의 운동으로 관련될 수 있는데, 이러한 운동의 비례상수는 Lighthill[1]에 의하여 정의되었으며, Johnson & Brokaw[6]는 추진운동을 할 수 있는 미생물의 운동등의 해석에 적용하였다.

이와는 대조적으로, 모든 원통조각 요소별 상호간의 영향을 고려하여 특이값의 분포에 따라 입자에 작용하는 힘과 속도관계를 고려하여 보다 정확한 계산결과를 얻을 수 있는 것이 바로 사상체 이론(slender body theory)이다. Johnson[7]은 점근전개법(matched asymptotic expansion method)을 이용하여 세장비(slenderness ratio, $\epsilon = d/2l \ll 1$)의 제한치, 즉 입자의 직경 d 는 길이 $2l$ 보다 아주 작다는 가정하에 특이값을 지배하는 성분은 stokeslet, $\vec{\alpha}$ 임을 밝혔는데, 본고에서는 그가 유도한 적분방정식을 이용하여 저항텐서를 구하였다.

2. 이론적 배경

저 Reynolds수 유동은 다음과 같은 연속방정식과

Stokes 운동방정식

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0 \tag{1}$$

$$\nabla^2 \vec{V} = \frac{1}{\mu} \nabla \vec{p} \tag{2}$$

에 지배받는다. 입자로 부터 멀리 떨어진 속도와 압력성분은 무한 점성 유동장에서 영이라 놓을 수 있으며, 표면 S_i 에서는 입자가 갖는 병진과 회전속도의 합으로 나타낼 수 있다.

$$\vec{V} = \vec{U} + \vec{\omega} \times \vec{r} \quad \text{on } S_i \tag{3}$$

위 식에서 선형속도 \vec{U} 와 각속도 $\vec{\omega}$ 는 각각 U_{ref} , U_{ref}/l 로 무차원화 하였다. U_{ref} 는 입자에 작용하는 외력의 함수로 구할 수 있는데, 예를 들어 중력장에서는 다음과 같다.

$$U_{ref} = \frac{(m_p - m_f) \vec{g}}{\mu l} \tag{4}$$

여기서 m_p 와 m_f 는 각각 입자의 질량과 입자에 의하여 배제되는 유체질량을 말하며, \vec{g} 는 중력가속도 벡터이다.

본고에서 고려한 선형방정식 (2)의 해법은 전형적으로 많은 해를 갖는 경계치 방법이라기 보다는 경계조건을 만족하기 위하여 기본적인 특이해를 중첩하는 방법이다. 지배방정식이 선형이기 때문에 많은 특이함수의 해를 구하여 중첩시킴으로써 새로운 해를 얻을 수 있는데, 이러한 기본해를 stokeslet 해라 한다. Johnson[7]은 점근전개법을 이용하여 다음과 같은 제 1종의 Fredholm 방정식 형태의 적분식을 유도하였다.

$$V_v(s, t) = \alpha_v(s, t)L_v + \int_{S_A}^{2-S_A} K_v(\vec{r}_0; \vec{\alpha}) ds' \tag{5}$$

(v = n, s, b)

$$K_v(\vec{r}_0; \vec{\alpha}) = \frac{\alpha_v(s', t)}{r_0} + \frac{[\vec{\alpha}(s', t) \cdot \vec{I}_0]_{rov}}{r_0^3} - \frac{D_v \alpha_v(s, t)}{|s - s'|} \tag{6}$$

위 식에서 s, s' 는 각각 작용점(field point)과 근원점(source point)을 말하며, 두 점간의 거리 벡터는

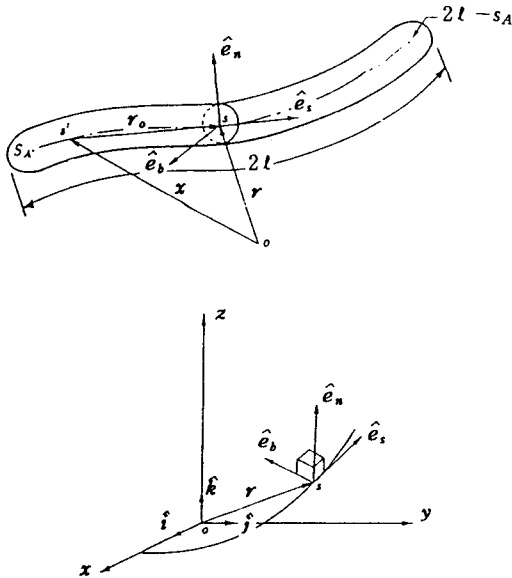


Fig. 1. Slender filament and coordinates.

\vec{r}_0 로 표기하였다. $D_n = D_b = 1$, $D_s = 2$ 이고, 입자의 세장비 정의로부터 L_n 는 다음과 같다(Fig. 1 참조).

$$L_n (= L_b) = 2L + 1, \quad L_s = 2(2L - 1), \quad L = \ln\left(\frac{2}{\epsilon}\right) \quad (7)$$

사상체의 중심선을 따라 분포되어 있는 특이값을 수식화하기 위하여 Chwang & Wu[8]는 곧은 회전타원체(prolate spheroid)를 이용하여 양끝부분에 위치한 두 초점(focus) 거리 사이에서만 영이 아닌 Stokeslet이 존재한다고 가정하였으며 입자의 편심성(eccentricity) $s_A = l[1 - \sqrt{1 - \epsilon^2}]$ 을 정의하였다. 따라서 매질속에 놓여있는 입자가 받는 힘과 토크는 일정한 힘(point force)으로 나타낼 수 있는 단위 힘, 즉 입자 중심선을 따라 분포되어 있는 Stokeslet 적분에 의하여, 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \vec{F} &= -8\pi\mu \int_{S_f} \vec{\alpha}(s) ds \\ \vec{T}_0 &= -8\pi\mu \int \vec{r}(s) \times \vec{\alpha}(s) ds \end{aligned} \quad (8)$$

저 Reynolds수 유동장에 놓여있는 입자에 작용하는 힘은 매질의 점성과 유속에 비례한다. 일반적인 Stokes 유동 방정식이 적용 가능한 경우 입자는 전술한 바와 같이 병진과 회전운동을 병행하며 움직이는데, 기준 좌표계의 원점으로부터 입자 표면, 즉 \vec{r} 에 미치는 수

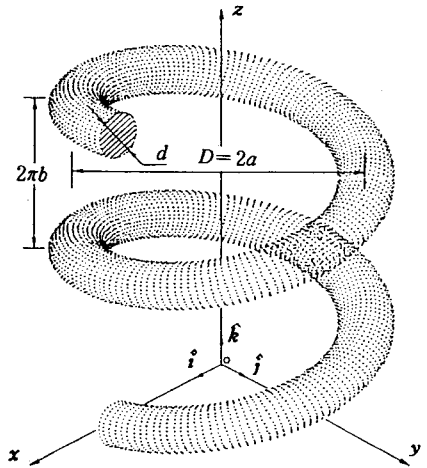


Fig. 2. Geometry of a right-handed screw-sensed filament.

동력학적 힘과 토크는 유동장에 따라 2계 이상의 다텐서(polyadics)에 비례한다. 예를 들어, 무한 유체 속의 입자가 받는 힘과 토크는 세가지 기본적인 2차텐서, 즉 병진텐서(translational) K , 회전텐서(rotational) Ω , 그리고 연결텐서(coupling) C 및 선형과 각속도 벡터를 이용하여, 다음식으로 나타낼 수 있다[9].

$$\begin{aligned} \vec{F} &= -[K \cdot \vec{U} + C \cdot \vec{\omega}] \\ \vec{T}_0 &= -[C_0 \cdot \vec{U} + \Omega_0 \cdot \vec{\omega}] \end{aligned} \quad (9)$$

여기서 상첨자^T는 전치행렬(transpose matrix)을 나타낸다. 텐서 K , C_0 , Ω_0 는 각각 l, l^2, l^3 , 그리고 \vec{F}, \vec{T}_0 는 각각 $\mu U_{ref} l, \mu U_{ref} l^2$ 로 무차원화하였다. 따라서 저항계수는 식 (8)과 (9)로부터 6-자유도(degree of freedom) 단위운동을 고려하여 구할 수 있다. 위 식에서 세개의 서로 다른 2계 텐서는 입자의 기하학적 형상에 따라 크게 지배되는데, 일반적으로 총 21개의 요소값을 갖게 된다. 즉, 각 6요소의 병진텐서와 회전텐서, 그리고 9요소의 연결텐서가 있는데, 병진 및 회전텐서는 일반적으로 대칭행렬의 성질을 내포하고 있다[10]. 또한, 회전 및 연결텐서는 좌표계의 기준점에 따라 각기 다른값을 갖게되지만, 병진텐서는 기준점에 무관한 성질을 갖고 있다. 하지만, 모든 2계 텐서는 입자의 기하학적 형상에 따라 영향을 받는다.

Fig. 2는 본고에서 고려한 나선형 사상체의 기하학적 구조를 나타내는데, 사상체의 전체길이 $2l$ 과

구분하기 위하여 코일의 직경과 높이를 각각 D, L 로 하였으며, 다음과 같이 나타내었다.

$$x = a \cos u, y = R_L a \sin u, z = bu; 0 \leq u \leq 2\pi n \quad (10)$$

위 식에서 R_L 은 기하학적 특성을 나타내는 변수로서 +1은 우나선형을, -1은 좌나선형 사상체를 의미한다. 따라서, 입자가 갖는 기하학적 회전수를 n 이라 하면, 코일의 전체 높이는 $L = 2\pi nb$ 이다. 그리고 u 는 작용점에서 입자가 xy - 평면과 만드는 형상각을 말한다. 사상체의 중심선을 따라 접선, 법선, 그리고 중법선(binormal) 방향을 나타내는 단위벡터는 Serret-Frenet 식을 이용하여 구할 수 있다[11].

$$\begin{aligned} \hat{e}_s &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \\ \hat{e}_b &= \frac{1}{k} \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial s^2} \\ \hat{e}_n &= \hat{e}_s \times \hat{e}_b \end{aligned} \quad (11)$$

여기서 k 는 사상체의 중심선이 만들어 내는 곡률이다. 따라서, 식 (11)을 이용하여 곡면좌표계(nsb- 좌표계)에서 사상체가 갖는 단위 벡터는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \hat{e}_n &= R_L \frac{b}{c} \sin u \hat{i} - \frac{b}{c} \cos u \hat{i} + R_L \frac{a}{c} \hat{k} \\ \hat{e}_s &= -\frac{a}{c} \sin u \hat{i} + R_L \frac{a}{c} \cos u \hat{i} + \frac{b}{c} \hat{k} \\ \hat{e}_b &= -\cos u \hat{i} - R_L \sin u \hat{j} \end{aligned} \quad (12)$$

위 식에서 $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ 로 정의되기 때문에 사상체의 전체길이는 $2l = cu$ 이다. 또한, 단위 벡터 $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ 는 식 (12)를 역전환(reverse transformation)하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \hat{i} &= R_L \frac{b}{c} \sin u \hat{e}_n - \frac{a}{c} \sin u \hat{e}_s - \cos u \hat{e}_b \\ \hat{j} &= -\frac{b}{c} \cos u \hat{e}_n + R_L \frac{a}{c} \cos u \hat{e}_s - R_L \sin u \hat{e}_b \\ \hat{k} &= R_L \frac{a}{c} \hat{e}_n + \frac{b}{c} \hat{e}_s \end{aligned} \quad (13)$$

식 (12)를 이용하여, 근원점의 거리 벡터 \vec{r} 은 곡면좌표계에서 다음과 같다.

$$\vec{r} = R_L \frac{ab}{c} u \hat{e} + \frac{b^2}{c} u \hat{e}_s - a \hat{e}_b \quad (14)$$

그리고, 근원점과 작용점간의 거리벡터 \vec{r} 성분은 작용점을 기준으로 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned} r_{on} &= R_L \frac{ab}{c} [(u-u') - \sin(u-u')] \\ r_{os} &= \frac{a^2}{c} \sin(u-u') + \frac{b^2}{c} (u-u') \\ r_{ob} &= a [\cos(u-u') - 1] \end{aligned} \quad (15)$$

위 식에서 u' 는 근원점에서 입자가 갖는 형상각을 말한다. 따라서, 입자가 갖는 속도 성분은 작용점 기준의 단위벡터 ($\hat{e}_n, \hat{e}_s, \hat{e}_b$)를 이용하면 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} V_n(u) \\ V_s(u) \\ V_b(u) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} R_L \frac{b}{c} \sin u - \frac{b}{c} \cos u & \frac{a}{c} \\ -\frac{a}{c} \sin u & R_L \frac{a}{c} \cos u & R_L \frac{b}{c} \\ -\cos u & -R_L \sin u & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_x \\ U_y \\ U_z \end{Bmatrix} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{l} \left\{ \frac{b^2}{c} u \cos u + R_L \frac{a^2}{c} \sin u \right\} \left\{ R_L \frac{b^2}{c} u \sin u - \frac{a^2}{c} \cos u \right\} \\ + \frac{ab}{c} (\sin u - R_L \cos u) - \frac{ab}{c} (u \sin u + R_L \cos u) \\ R_L b u \sin u \qquad \qquad \qquad - b u \cos u \\ - \frac{ab}{c} \\ R_L \frac{a^2}{c} \\ 0 \end{array} \right] \begin{Bmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

Fig. 3 은 입자가 x - 방향으로 단위 병진운동 ($U_x=1$) 을 할 때 중심선을 따라 분포되어 있는 속도를 nsb-좌표계의 성분으로 도시하였다.

작용점과 근원점의 위치가 근접한 특수한 경우에는 Taylor 급수 전개를 통하여 다음과 같은 거리벡터 크기를 구할 수 있다.

$$|r_o| = |s-s'| \sqrt{1 - \frac{a^2}{12c^4} (s-s')^2 + \dots} \quad (17)$$

위와 같은 특수한 경우 식 (6)의 kernel은 다음과 같다.

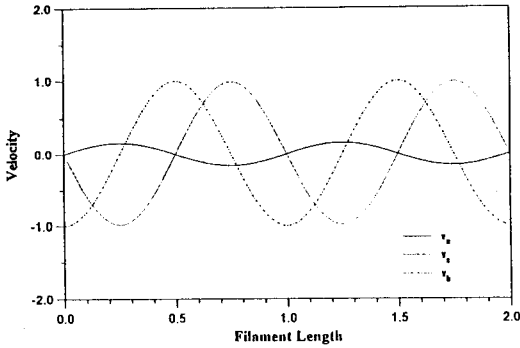


Fig. 3. Velocity distribution along the filament centerline for $U_s = 1$.

$$K_n = 0$$

$$K_s = -\frac{a}{2c^2} \alpha_s(s) \quad (18)$$

$$K_b = -\frac{a}{2c^2} \alpha_b(s)$$

위와 같은 특수식을 갖게 되는 주된 이유는 모든 작용점이 실질적으로 입자와 매질의 접촉면에 위치하지만, 모든 근원점은 입자의 중심선을 따라 존재하기 때문이다.

3. 수치해석 방법

전술한 적분방정식(5)는 Newton-Cotes 적분 방법을 수정하여 해를 구할 수 있는데, 등간격으로 일정한 값을 가중함수(weighting function)에 곱하여 입자의 중심선을 따라 분포되어 있는 특이점, 즉 stokeslets 을 적분하면 다음과 같은 행렬식을 얻게 된다.

$$\begin{Bmatrix} V_{n1} \\ V_{s1} \\ V_{b1} \\ V_{n2} \\ V_{s2} \\ V_{b2} \\ \vdots \\ \vdots \\ V_{nk} \\ V_{sk} \\ V_{bk} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & \cdots & \cdots & \cdots & M_{1m} \\ M_{21} & M_{22} & \cdots & \cdots & \cdots & M_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \vdots \\ M_{k1} & M_{k2} & \cdots & \cdots & \cdots & M_{km} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_{n1} \\ \alpha_{s1} \\ \alpha_{b1} \\ \alpha_{n2} \\ \alpha_{s2} \\ \alpha_{b2} \\ \vdots \\ \vdots \\ \alpha_{nm} \\ \alpha_{sm} \\ \alpha_{bm} \end{Bmatrix} \quad (19)$$

위 식에서, 행렬의 각 요소 M_{ij} 은 3×3 의 부행렬(submatrix)을 갖게 되는데, 부행렬의 각 요소는 근원점과 작용점의 짝으로 이루어져 있으며, 단지 입자의 기하학적 형상에 좌우된다.

행렬식의 비대각선(off-diagonal) 요소는 다음과 같이 Johnson의 적분방정식으로 부터 구할 수 있다.

$$[M_{km}]_{k \neq m} = \Delta s W_T(s'_m) \begin{pmatrix} \frac{1}{r_o} + \frac{r_{on}^2}{r_o^3} & \frac{r_{on} r_{os}}{r_o^3} & \frac{r_{on} r_{ob}}{r_o^3} \\ \frac{r_{os} r_{on}}{r_o^3} & \frac{1}{r_o} + \frac{r_{os}^2}{r_o^3} & \frac{r_{os} r_{ob}}{r_o^3} \\ \frac{r_{ob} r_{on}}{r_o^3} & \frac{r_{ob} r_{os}}{r_o^3} & \frac{1}{r_o} + \frac{r_{ob}^2}{r_o^3} \end{pmatrix} \quad (20)$$

여기서, r_{ov} 와 r_o 는 전술한 바와 같이 각각 작용점 기준좌표계의 근원점과 작용점간의 벡터성분과 크기를 나타낸다.

행렬식의 대각선 요소는 적분방정식의 kernel로 부터, 근원점과 작용점이 동일한 특수한 경우에 다음식으로 표현할 수 있다.

$$[M_{kk}] = \begin{bmatrix} L_n & 0 & 0 \\ 0 & L_s & 0 \\ 0 & 0 & L_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & 0 \\ E_{12} & 2E_{11} & 0 \\ 0 & 0 & E_{11} \end{bmatrix} \quad (21)$$

위 식에서 행렬 요소 E_{11} 과 E_{12} 는 다음과 같이 구할 수 있는데, E_{11} 은 근원점과 작용점이 동일할 때 제로 값을 갖는다.

$$E_{11} = \sum_{m=1}^{n'} \frac{-\Delta s W_T(s'_m)}{s_k - s'_m} \quad (22)$$

$$E_{12} = -\Delta s W_T(s'_m) \frac{a}{2c^2}$$

위 식에서 n' 는 적분 패널(Panels)을 분리하는 이산점(discrete points)의 전체수를 말하며, m 과 k 는 각각 근원점과 작용점을 나타낸다.

이상과 같은 행렬식을 이용하여 사상체가 갖는 속도와 특이값(stokeslet)은 다음과 같다.

$$\{V_i\} = [M_{ij}] \{\alpha_j\} \quad (23)$$

Johnson[7]의 적분방정식은 입자 표면 임의의 작

용접을 기준으로 하여 유도한 식이기 때문에, 다른 좌표계를 기준으로 할 때에는 반드시 좌표계 상호간에 미치는 영향을 고려해야 한다. xyz- 공간좌표계와 nsb- 국소좌표계의 단위 벡터를 고려하면, 다음과 같은 식을 유도할 수 있다.

$$\begin{pmatrix} \hat{i} \\ \hat{j} \\ \hat{k} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} R_l \frac{b}{c} \sin u' - \frac{a}{c} \sin u' & -\cos u' & \\ -\frac{b}{c} \cos u' & R_l \frac{a}{c} \cos u' & -R_l \sin u' \\ R_l \frac{a}{c} & \frac{b}{c} & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \hat{e}_n(s') \\ \hat{e}_s(s') \\ \hat{e}_b(s') \end{pmatrix} \quad (24)$$

$$= [A(u')] \hat{e}_v(s')$$

여기서, 행렬 $[A(u')]$ 의 전치행렬은 역행렬(inverse matrix)과 같기 때문에 unitary 행렬이라 말할 수 있다. 또한, stokeslet, α 의 각 성분도 기준 좌표계에 적합하게 변환해야 한다. 예를 들어, 근원점 3 으로부터 작용점 4 에 미치는 영향을 고려하여 속도성분을 구하면 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} V_{n4} \\ V_{s4} \\ V_{b4} \end{pmatrix} = [M_{43}] [A_4^{-1}] [A_3] \begin{pmatrix} \alpha_{n3} \\ \alpha_{s3} \\ \alpha_{b3} \end{pmatrix} \quad (25)$$

위 식에서, $[M_{43}]$ 은 작용점을 기준으로 나타낼 수 있는 적분방정식의 kernel 값을 말한다.

행렬식 (25)의 해를 구하기 위하여 stokeslet 성분이 아닌 속도성분 V_v 이 주어졌다고 가정하면, stokeslet 을 새로운 좌표계로 변환하기 위하여 $[A_4^{-1}][A_3]$ 를 미리 곱하는 대신, 선형 대수학적으로 풀기 위한 형태를 갖기 위하여 $[M_{43}]$ 에 $[A_4^{-1}][A_3]$ 을 나중에 곱하는 방법을 택하였다. 결과식은 식 (23)의 형태로 나타낼 수 있는데, LU 분해법 (LU-decomposition method)에 의하여 해를 구하였다[12]. 이상은 모든 사상체 표면을 따라 분포되어 있는 stokeslet을 구하기 위한 일반적인 방법인데, 특히 A_m 은 입자의 기하학적 형상에 따라 좌표변환을 하는 행렬식이라 말할 수 있다.

Fig. 4 와 Fig. 5 는 각각 nsb- 와 xyz- 좌표계 기준의 stokeslets 분포를 나타내는데, Fig. 3의 결과와 비교해 볼 때 특이값의 크기는 국소 속도 성분과 비

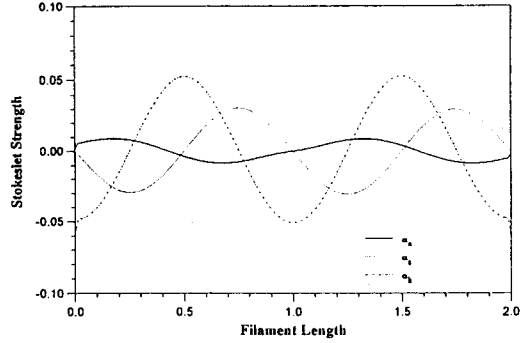


Fig. 4. Singularity distribution in the nsb-coordinates along the filament centerline for $U_x = 1$.

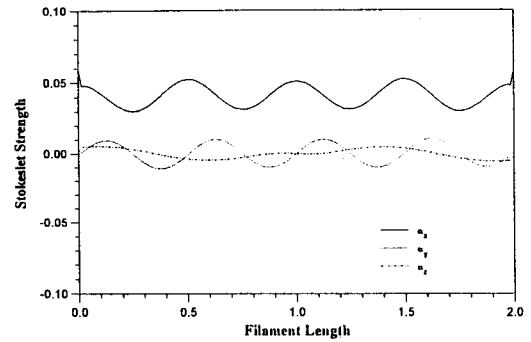


Fig. 5. Singularity distribution in the cartesian coordinates along the filament centerline for $U_x = 1$.

례함을 유추할 수 있다. 하지만 이러한 유사성이 항상 존재한다면 관계 비례상수식을 유도하는 것도 Stokes 유동 해석에 좋은 결과를 가져올 것이다.

4. 결과 및 고찰

임의점에서 입자가 갖는 병진텐서는 항상 동일한 상수값을 갖게 되지만 회전 및 연결텐서는 기준점에 따라 다른값을 갖는다. Brenner[9]는 임의점 p 에서 연결텐서와 회전텐서가 갖는 일반적인 관계식을 다음과 같이 유도하였다.

$$\begin{aligned} C_p &= C_o - \vec{r}_{op} \times K \\ \Omega_p &= \Omega_o - \vec{r}_{op} \times K \times \vec{r}_{op} + C_o \times \vec{r}_{op} - \vec{r}_{op} \times C_o' \end{aligned} \quad (26)$$

Table 1 은 본고에서 고려한 좌·우나선형 기준입자

Table 1. Comparison of resistance matrices at the center of mass for screw-sensed filaments with $L/D=1, n=2, d/2a=0.01$

	RHP			LHP		
K_{ij}	1.311E+01	4.546E-04	6.040E-04	1.320E+01	-4.546E-04	6.040E-04
	4.546E-04	1.320E+01	3.299E-01	-4.546E-04	1.320E+01	-3.299E-01
	6.040E-04	3.299E-01	1.499E+01	6.040E-04	-3.299E-01	1.499E+01
$C_{c, ij}$	7.181E-01	-9.775E-03	-1.607E-03	-7.181E-01	-9.775E-03	1.607E-03
	4.483E-04	1.008E-01	8.450E-01	8.450E-02	4.473E-04	8.450E-02
	2.080E-03	-9.700E-02	-8.108E-01	-2.080E-03	-9.700E-02	8.108E-01
$\Omega_{c, ij}$	1.867E-01	1.454E-03	-1.581E-02	1.867E-01	-1.454E-03	-1.581E-02
	1.454E-03	1.875E+01	1.834E-00	-1.454E-03	1.875E-04	-1.834E-00
	-1.581E-02	1.834E+00	1.525E-01	-1.581E-02	-1.834E+00	1.525E+01

Table 2. Center of hydrodynamic reaction points and the related coupling tensors for screw-sensed filaments with $L/D=1, n=2, d/2a=0.01$

		RHP			LHP		
Unique point	c_1/a	-0.0064			-0.0064		
	c_2/a	-0.0001			0.0001		
	c_3/a	1.0004			1.0004		
C_R		0.71820	-0.00463	0.00042	-0.71820	-0.00463	-0.00042
		-0.00463	0.09871	-0.01200	-0.00463	-0.09871	-0.01200
		0.00042	-0.01200	-0.80870	-0.00042	-0.01200	0.80870

Table 3. Comparison of resistance tensors for a slender needle with $R_p=100$

	Brenner(1964)			Slender Body Theory		
K_{ij}	4.334	0	0	4.334E+00	8.025E-11	1.692E-07
	0	4.334	0	8.025E-11	4.334E+00	-5.389E-04
	0	0	2.619	1.692E-07	-5.389E-04	2.619E+00
$C_{c, ij}$				-8.389E-11	4.768E-07	7.743E-03
		0		-9.537E-07	2.910E-10	2.384E-07
				-1.282E-04	9.537E-07	0
$\Omega_{c, ij}$	1.746	0	0	1.747E+00	3.492E-10	9.537E-07
	0	1.746	0	3.492E-10	1.747E+00	-5.487E-04
	0	0	1.676E-03	9.537E-07	-5.487E-04	-4.768E-07

($L/D=1, n=2, d/2a=0.01$) 의 저항텐서를 입자의 질량중심점에서 구하였는데, 병진텐서와 회전텐서는 임의점에서도 항상 대칭성을 갖게됨을 알 수 있다.

입자는 특별한 경우 유일점(unique point), 즉 수력학적 반작용점(center of hydrodynamic reaction)을 갖게 되는데, 이는 연결계수의 각 요소가 대칭성을 갖게 될 때를 말한다. 따라서 유일점에서의 연결텐서 C_R 은 다음식으로 구할 수 있다.

$$C_R = C_p + \vec{r}_{Rp} \times K \tag{27}$$

여기서 C_p 는 임의점에서의 연결텐서를 말하며, \vec{r}_{Rp} 는 임의점 p 와 유일점 R 간의 위치 벡터를 나타낸다. 기준 나선형 입자의 유일점과 그 점의 연결텐서 값은 Table 2에 기술하였다.

사상체 이론의 제한점으로는 입자가 갖는 곡률 반경이 반드시 임경보다 커야되며, 입자의 양단부는 회전타원체의 형상을 가져야 하는 것이다. 또한, 완벽하게 곧은 입자에는 적용할 수 없는데, 이는 모든 회전운동의 저항계수를 구할때 사상체 이론이 유도된 근저에는 입자가 일부분 임의의 곡률을 갖는다고 가정

하기 때문이다. 따라서 침상체의 경우 중심선에 관하여 회전운동하는 저항계수 값이 제로인 것을 사상체 이론에서는 부정확하게 예측하게 된다. 하지만, 다른 모든 저항계수값은 정확하며 이를 검증하기 위하여 본 고에서는 Jeffery의 침상체를 모델로 하여 Brenner가 유도한 다음의 엄밀해와 비교하였다[9, 13].

$$K = 16\pi \left[\frac{1}{\Psi + a_1^2 \chi_1} \hat{c}_1 \hat{c}_1 + \frac{1}{\Psi + a_2^2 \chi_2} \hat{c}_2 \hat{c}_2 + \frac{1}{\Psi + a_3^2 \chi_3} \hat{c}_3 \hat{c}_3 \right] \quad (28)$$

$$C_c = 0$$

$$\Omega_c = \frac{16\pi}{3} \left[\frac{a_2^2 + a_3^2}{a_2^2 \chi_2 + a_3^2 \chi_3} \hat{c}_1 \hat{c}_1 + \frac{a_3^2 + a_1^2}{a_3^2 \chi_3 + a_1^2 \chi_1} \hat{c}_2 \hat{c}_2 + \frac{a_1^2 + a_2^2}{a_1^2 \chi_1 + a_2^2 \chi_2} \hat{c}_3 \hat{c}_3 \right]$$

여기서 $\hat{c}_1, \hat{c}_2, \hat{c}_3$ 는 입자의 중심점을 기준으로 한 단위벡터를 말한다. 또한, $a_i (i=1, 2, 3)$ 은 타원형 입자의 3축을 나타내며, 함수 $\chi_i (i=1, 2, 3)$ 와 Ψ 는 다음식으로 정의된다.

$$\chi_i = \int_0^{\infty} \frac{d\lambda}{(a_i^2 + \lambda) \sqrt{(a_1^2 + \lambda) + (a_2^2 + \lambda) + (a_3^2 + \lambda)}} \quad (29)$$

$$\Psi = \int_0^{\infty} \frac{d\lambda}{\sqrt{(a_1^2 + \lambda) + (a_2^2 + \lambda) + (a_3^2 + \lambda)}}$$

위 식에서 λ 는 임의의 변수를 나타내며, 침상형의 기하학적 구조를 고려하면 $a_1 = a_2 = d/2$, $a_3 = l$ 이다. 따라서, 본고에서는 이미 알려진 침상체의 엄밀해와 비교하기 위하여 $L/D = 1$, $n = 0.0001$, $d/2a = 0.01$ 을 갖는 나선형 사상체를 고려하였는데, 형상비(aspect ratio)

$R_n (\equiv \frac{1}{\epsilon}) = 100$ 을 갖는 침상체에 대응된다고 할 수

있다. Table 3은 침상체의 저항계수를 엄밀해와 비교한 결과인데, 일치됨을 보여주고 있어 사상체이론의 타당성을 검증한다고 할 수 있다.

5. 결론

무한 점성 유체속에 놓여있는 마이크로 입자의 저유변학, 제 7 권 제 2 호, 1995

Reynolds수 유동 구멍에 필요한 저항계수 행렬식을 구하였다. 저항계수의 대행렬식(grand resistance matrix)은 입자의 운동에 따른 힘과 토크와 유관성이 있으며 3조의 3×3 부행렬식으로 구성된다. 이러한 3가지 행렬식은 병진운동에 따라 입자에 미치는 힘을 나타낼 수 있는 병진 행렬식(translational matrix)과, 토크에 의하여 유발되는 입자의 회전운동으로 부터 규명할 수 있는 회전 행렬식(rotational matrix), 그리고 토크에 의한 입자의 병진운동, 또는 힘에 의한 회전운동을 나타내는 연결 행렬식(coupling matrix)이 있다. 이러한 행렬식의 요소들은 Johnson의 사상체 이론을 이용하여 입자에 미치는 힘과 토크에 의하여 반응되는 선형속도나 각속도를 계산함으로써 구할 수 있었다.

입자의 항력은 속도에 비례하며, 이동계수는 단위 힘에 대한 속도의 비로 정의할 수 있기 때문에 저항계수의 역행렬식은 이동계수 행렬식이 됨을 알 수 있다. 입자가 갖는 기하학적 형상 및 힘과 토크에 의하여 유발되는 선형 및 각속도에 관계되는 저항계수 또는 이동계수 행렬식이 결정되면 다양한 유동장에 놓여진 입자의 운동을 묘사할 수 있게 된다.

본고에서는 특히 대칭형 구조가 아닌 나선형 사상체 구조를 고찰하였기 때문에 실용적인 분야에 접근할 수 있는 토대를 마련하였다고 할 수 있다. 보다 실질적인 현상을 고려할 수 있도록 향후에는 단일 입자가 아닌 입자와 입자간의 상호작용(interaction)이나 벽면 영향(wall effect), 또는 곡관에서 일어나는 Dean 유동과 같은 복잡한 유동장에서의 입자운동에 대하여 광범위한 연구를 해야할 것이다.

참고문헌

1. M. J. Lighthill, *SIAM Rev.*, **18**, 161 (1976).
2. H. Brenner, *Progress in Heat and Mass Transfer*, **6**, 509 (1973).
3. C. A. Stover and C. Cohen, *Rheol. Acta*, **29**, 192 (1990).
4. D. W. Howard, E. N. Lightfoot, and J. O. Hirschfelder, *AIChE*, **22**, 794 (1976).
5. J. Happel and H. Brenner, "Low Reynolds Number Hydrodynamics", Martinus Nijhoff Publishers, Boston (1986).
6. R. E. Johnson and C. J. Brokaw, *J. Biophys.*, **25**, 113 (1979).

7. R. E. Johnson, Ph.D. Thesis, California Institute of Technology (1977).
8. A. T. Chwang and T. Y. Wu, *J. Fluid Mech.*, **67**, 787 (1975).
9. H. Brenner, *Chem. Eng. Sci.*, **19**, 599 (1964).
10. L. D. Landau and E. M. Lifshitz, "Fluid Mechanics", Pergamon Press (1959).
11. D. J. Struik, "Differential Geometry", Addison-Wesley Press, Cambridge, Massachusetts (1950).
12. W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky, and W. T. Vetterling, "Numerical Recipes", Cambridge University Press (1986).
13. G. B. Jeffery, *Pro. Roy. Soc.*, **A102**, 161 (1922).