기술강좌

최적화 이론의 수자원공학에의 적용(Ⅳ)

김 중 훈*

지난 호에서는 최적화 이론이 댐 운영에 어떻게 적용될 수 있는지 살펴보았다. 이번호에서는 지하수 펌핑계획에는 최적화 이론이 어떻게 적용될 수 있는지 알아 보기로 한다.

1. OR 및 수자원시스템공학의 유래
2. 최적화 기법의 소개
3. 관망 시스템에의 적용
4. 댐 운영에의 적용
5. 지하수 펌핑계획에의 적용
6. 도시 배수설계에의 적용

5. 지하수 펌핑계획에의 적용

지하수 흐름해석을 위한 수치모델링은 1960년대 중반부터 활발히 연구되기 시작하여 이후 이 분야에 많은 진전이 있었다. 수치해석모형은 대수층의 흐름특성등의 해석, 지하수의 양정과 주입등에 의한 영향을 예측하는데 주로 사용되어왔다. 수치해석을 이용하는 모의모형들은 여러 시나리오를 고려하면서 그중 제일 나은 결과(목적함수)를 선택하는 전형적인 반복계산과정에 쓰인다. 이에 반하여 최적화모형은 다양한 제약조건과 함께 직접 여러 관리대안의 목적함수를 고려해준다.

본고에서는 독자들의 이해를 돕기위해 될 수 있는대로 간단한 최적화기법의 적용예를 선택하기로 한다. 우선 2차원 지하수흐름(수평방향흐름)의 지배방정식을 나타내면

$$\frac{\partial}{\partial x}(T_x\frac{\partial h}{\partial x})+\frac{\partial}{\partial y}(T_y\frac{\partial h}{\partial y})=S\frac{\partial h}{\partial t}+W \qquad (1)$$

여기서 T_x와 T_y는 각각 x, y방향으로의 Transmissivity로서 피압대수층의 경우에는 투수계수 K와 대수층의 두께(b)의 곱과 같고(T=Kb), 비피압대수층의 경우에는 투수계수와 대수층의 포화두께(h)의 곱과 같다(T=Kh). S는 저류계수, W는 양정율을 나타내며 $W=q/\Delta x\Delta y$로 주어진다. 이때 Δx와 Δy는 각각 흐름해석망의 x와 y방향 크기이다.

5.1 1 차원 정상류 : 피압대수층의 예

피압대수층에 있어서 1차원 정상류 흐름해석의 예가 그림 5.1에 나타나 있다. 양단의 수두는 고정되어 있으며 고려대상 양정위치는 네군데이다. 이 경우 흐름의 지배방정식은 (1)식으로부터

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}=\frac{W}{T_x} \qquad (2)$$

이때 정상류이므로 $\partial h/\partial t=0$ 이다. 윗식을 유한차분법의 형태로 나타내면

$$\frac{h_{i+1}-2h_i+h_{i-1}}{(\Delta x)^2}=\frac{W_i}{T_x} \qquad (3)$$

Aguado등(1974)은 선형계획법을 이용하여 피압대수층에서의 1차원해석으로 최적양정을 위한

* 고려대학교 토목환경공학과 조교수

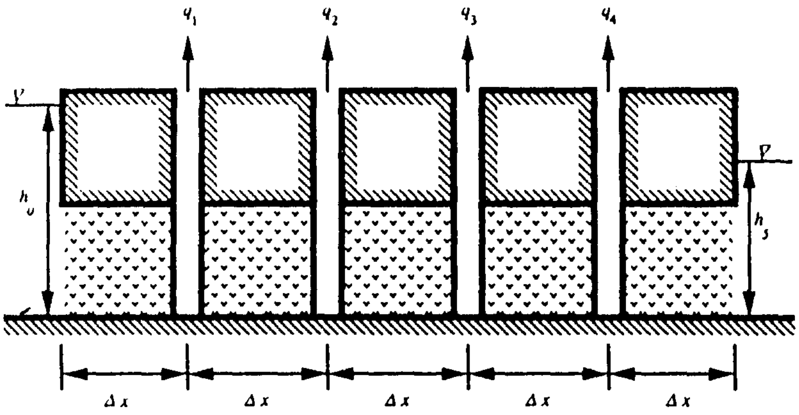

그림 5.1 피압 1차원 대수층

다음과 같은 모형을 개발하였다.

$$Max\ Z = \sum_{i \in I} h_i$$

Subject to
(3)식 (각 양수정에 대하여)

$$\sum_{i \in I} W_i \geq W_{min}$$
$$h_i \geq 0 \quad i \in I$$
$$W_i \geq 0 \quad i \in I$$

여기서 I는 양수정의 집합이고, W_{min}은 최소로 요구되는 모든 양수정에서의 총 양정율이다. 이때 결정변수는 h와 W이다.

위의 모형을 그림 5.1의 예에 적용시켜보면

$$Max\ Z = h_1 + h_2 + h_3 + h_4 \tag{4}$$

Subject to

$$-2h_1 + h_2 - \frac{(\Delta x)^2}{T} W_1 = -h_0$$
$$h_1 - 2h_2 + h_3 - \frac{(\Delta x)^2}{T} W_2 = 0$$
$$h_2 - 2h_3 + h_4 - \frac{(\Delta x)^2}{T} W_3 = 0$$
$$h_3 - 2h_4 - \frac{(\Delta x)^2}{T} W_4 = -h_5$$
$$W_1 + W_2 + W_3 + W_4 \geq W_{min}$$
$$h_1,\ h_2,\ h_3,\ h_4 \geq 0$$
$$W_1,\ W_2,\ W_3,\ W_4 \geq 0$$

위의 문제에서 결정변수는 h_1, h_2, h_3, h_4, W_1, W_2, W_3, W_4이고, 일단 최적해가 구해지면 양정율은 $q_i = W(\Delta x_i)^2$로부터 구해질 수 있다. 위 문제의 목적함수 (4)식은 대수층의 관리라는 측면에서 설득력이 있으나, 예를 들면 양수비용을 최소화한다든가의 다른 형태의 목적함수도 생각할 수 있다.

5.2 1차원 정상류 : 비피압 대수층

비피압대수층에 있어서 1차원 정상류해석의 예가 그림 5.2에 있다. 양단의 수두는 고정되어 있으며 그림에서 보는 바와 같이 고려대상 양정위치는 네군데이다. 이 경우 흐름의 지배방정식은 (1)식으로부터

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(T_x \frac{\partial h}{\partial x}\right) = W \tag{5}$$

$T_x = Kh$이므로

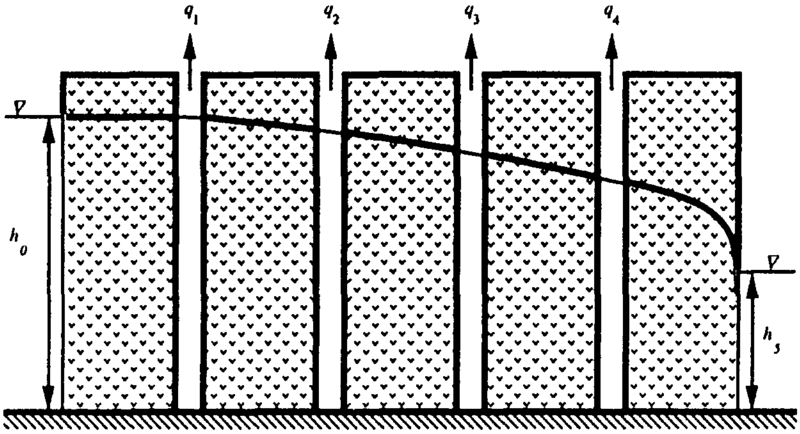

그림 5.2 비피압 1차원 대수층

$$\frac{d^2h^2}{dx^2} = \frac{2W}{K} \qquad (6)$$

문제를 간략화하기위해 w=h²으로 치환하면 문제를 선형화시킬 수 있으며, 따라서 흐름방정식은 다음과 같은 유한차분형태로 나타낼 수 있다.

$$\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{w_{i+1} - 2w_i + w_{i-1}}{(\Delta x)^2} = \frac{2W_i}{K} \qquad (7)$$

최적양정을 위한 모형을 그림 5.2의 경우에 적용시키면 다음과 같다.

$$Max\ Z = w_1 + w_2 + w_3 + w_4$$

Subject to

$$-2w_1 + w_2 - \frac{2(\Delta x)^2}{K}W_1 = -w_0$$

$$w_1 - 2w_2 + w_3 - \frac{2(\Delta x)^2}{K}W_2 = 0$$

$$w_2 - 2w_3 + w_4 - \frac{2(\Delta x)^2}{K}W_3 = 0$$

$$w_3 - 2w_4 - \frac{2(\Delta x)^2}{K}W_4 = -w_5$$

$$W_1 + W_2 + W_3 + W_4 \geq W_{min}$$

$$w_1,\ w_2,\ w_3,\ w_4 \geq 0$$

$$W_1,\ W_2,\ W_3,\ W_4 \geq 0$$

5.3 1차원 부정류 : 피압대수층의 예

1차원 피압대수층에서의 흐름방정식은 다음과 같이 주어진다.

$$T\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = S\frac{\partial h}{\partial t} + W \qquad (8)$$

윗 식을 유한차분의 형식으로 나타내면

$$T\left[\frac{h_{i+1,\,t} - 2h_{i,\,t} + h_{i-1,\,t}}{2(\Delta x)^2} + \frac{h_{i+1,\,t-1} - 2_{i,\,t-1} + h_{i-1,\,t-1}}{2(\Delta x)^2}\right] - S\left[\frac{h_{i,\,t} - h_{i,\,t-1}}{\Delta t}\right] - \frac{W_{i,\,t} + W_{i,\,t-1}}{2} = 0 \qquad (9)$$

정리하면

$$h_{i+1,\,t} - 2h_{i,\,t} + h_{i-1,\,t} + h_{i+1,\,t-1} - 2h_{i,\,t-1} + h_{i-1,\,t-1} - \frac{2(\Delta x)^2}{T(\Delta t)}S[h_{i,\,t} - h_{i,\,t-1}] - \frac{(\Delta x)^2}{T}(W_{i,\,t} + W_{i,\,t-1}) = 0 \qquad (10)$$

그림 5.1에 있는 1차원 부정류 피압대수층에서의 최적양정을 위한 선형계획법을 적용하는 예를 들어본다. 시간단계는 2기간을 고려하고, 양단에서의 경계조건 h_0와 h_s는 시간 t=0, t=1, t=2에

대해 각각 주어진다고 하면 목적함수는

$$Max\ Z = h_{1,2} + h_{2,2} + h_{3,2} + h_{4,2} \tag{11}$$

가 되며 (10)식을 양정위치 i=1에서 시간단계 t =1일 경우에 대하여 다시쓰면

$$h_{2,1} - 2h_{1,1} + h_{0,1} + h_{2,0} - 2h_{1,0} + h_{0,0} - \frac{2(\Delta x)^2}{T(\Delta t)} S(h_{1,1} - h_{1,0}) - \frac{(\Delta x)^2}{T}(W_{1,1} + W_{1,0}) = 0$$

여기서 $h_{0,1}$은 경계조건이며, $W_{1,0}$, $h_{2,0}$, $h_{1,0}$, $h_{0,0}$등은 초기조건으로 주어지는 값이다. 윗 식에서 미지항만 좌변으로 모으면

⟨i=1, t=1⟩

$$h_{2,1} - 2h_{1,1} - \frac{2(\Delta x)^2}{T(\Delta t)} S\, h_{1,1} - \frac{(\Delta x)^2}{T} W_{1,1} = -h_{0,1} - h_{2,0} + 2h_{1,0} - h_{0,0} - \frac{2(\Delta x)^2}{T(\Delta t)} S\, h_{1,0} + \frac{(\Delta x)^2}{T} W_{1,0} \tag{12}$$

⟨i=2, t=1⟩

$$h_{1,1} + h_{3,1} - 2h_{2,1} - \frac{2(\Delta x)^2}{T(\Delta t)} S\, h_{2,1} - \frac{(\Delta x)^2}{T} W_{2,1} = -h_{3,0} + 2h_{2,0} - h_{1,0} - \frac{2(\Delta x)^2}{T(\Delta t)} S\, h_{2,0} + \frac{(\Delta x)^2}{T} W_{2,0} \tag{13}$$

⟨i=3, t=1⟩

$$h_{2,1} + h_{4,1} - 2h_{3,1} - \frac{2(\Delta x)^2}{T(\Delta t)} S\, h_{3,1} - \frac{(\Delta x)^2}{T} W_{3,1} = -h_{4,0} + 2h_{3,0} - h_{2,0} - \frac{2(\Delta x)^2}{T(\Delta t)} S\, h_{3,0} + \frac{(\Delta x)^2}{T} W_{3,0} \tag{14}$$

⟨i=4, t=1⟩

$$h_{3,1} - 2h_{4,1} - \frac{2(\Delta x)^2}{T(\Delta t)} S\, h_{4,1} - \frac{(\Delta x)^2}{T} W_{4,1} = -h_{5,0} - h_{5,1} + 2h_{4,0} - h_{3,0} - \frac{2(\Delta x)^2}{T(\Delta t)} S\, h_{4,0} + \frac{(\Delta x)^2}{T} W_{4,0} \tag{15}$$

⟨i=1, t=2⟩

$$h_{2,2} - 2h_{1,2} + h_{2,1} - 2h_{1,1} - \frac{2(\Delta x)^2}{T(\Delta t)} S(h_{1,2} - h_{1,1}) - \frac{(\Delta x)^2}{T}(W_{1,2} + W_{1,1}) = -h_{0,2} - h_{0,1} \tag{16}$$

⟨i=2, t=2⟩

$$h_{1,2} + h_{3,1} + h_{3,2} - 2h_{2,1} - 2h_{2,2} - \frac{2(\Delta x)^2}{T(\Delta t)} S\,(h_{2,2} - h_{2,1}) - \frac{(\Delta x)^2}{T}(W_{2,1} + W_{2,2}) = 0 \tag{17}$$

⟨i=3, t=2⟩

$$h_{2,1} + h_{2,2} + h_{4,1} + h_{4,2} - 2h_{3,1} - 2h_{3,2} - \frac{2(\Delta x)^2}{T(\Delta t)} S\,(h_{3,2} - h_{3,1}) - \frac{(\Delta x)^2}{T}(W_{3,1} + W_{3,2}) = 0 \tag{18}$$

⟨i=4, t=2⟩

$$h_{3,1} + h_{3,2} - 2h_{4,1} - 2h_{4,2} - \frac{2(\Delta x)^2}{T(\Delta t)} S\,(h_{4,2} - h_{4,1}) - \frac{(\Delta x)^2}{T}(W_{4,1} + W_{4,2}) = -h_{5,1} - h_{5,2} \tag{19}$$

⟨양정에 관한 제약조건⟩

$$W_{1,1} + W_{2,1} + W_{3,1} + W_{4,1} \geq W_{min,1} \tag{20}$$

$$W_{1,2} + W_{2,2} + W_{3,2} + W_{4,2} \geq W_{min,2} \tag{21}$$

⟨비음조건⟩

$$h_{i,t} \geq 0 \quad i=1,2,3,4 \quad t=1,2 \tag{22}$$

$$W_{i,t} \geq 0 \quad i=1,2,3,4 \quad t=1,2 \tag{23}$$

따라서 위의 문제는 (11)식의 목적함수와 (12)~(23)식의 제약조건식들로 이루어진다.

이제까지는 1차원 지하수흐름으로 해석한 최적 양정관리를 위한 모형을 살펴보았다. 유사한 형태의 모형도 2차원적 흐름해석으로 유도가 가능하며 이인모등(1995)은 2차원 부정류를 이용한 최적모형을 이용하여 다단계 굴착시 각 굴착단계의 목표지하수위를 만족시키기 위하여 필요한 최적펌핑량을 산정하였다.

8.4 최적제어이론을 이용한 방법

이상에서 지하수의 최적펌핑을 위한 모형을 개발함에 있어 지하수의 흐름방정식이 제약조건식에 포함되는 것을 보았다. 이렇게 유도된 최적화모형의 최적해는 GAMS(General Algebraic Modeling System)와 같은 프로그램에 의해 바로 구해질 수 있다. 이때 그 흐름방정식(Hydraulic constraints)은 제약조건식에 embed 되었다고 하며, 이와같은 모형화기법을 embedding approach라 부른다. 그러나 이와같은 방법은 지하수의 수리학과 관련한 관리문제에 주로 쓰이며 모든 형태의 지하수 관리문제에 범용될 수 없는 단점을 가지고 있다. 예를들면 대규모의 대수층(특히 비피압대수층)의 관리문제에 있어서는 최적화문제의 규모(결정변수와 제약조건식의 갯수)가 급격히 증가하므로 현존의 수학적프로그램(알고리즘)으로는 해석이 불가능하게 된다.

이에반해 optimal control approach(최적제어이론식 접근방법)는 제약조건식의 대부분을 차지하는 흐름방정식들을 지하수흐름해석모형(수리모형)을 이용하여 해석함으로써 최적화프로그램(optimizer)의 부담을 덜어주는 방법이다. 즉, 최적제어이론에 의거하여 optimizer와 hydraulic simulator를 연계(interface)시키는 방법으로서 이미 지난 8월호 강좌(II)에서 관망시스템의 경우에 대하여 언급되었던 바 있다. Wanakule, Mays 그리고 Lasdon(1986)은 미국 텍사스주의 Edwards 대수층에 위의 방법을 적용하였으며, 비선형계획법 해석을 위한 GRG2 프로그램과 지하수 흐름해석을 위한 GWSIM을 연계시켰다.

이상에서 최적화이론이 지하수관리문제에 적용될 수 있음을 살펴보았다. 참고문헌 목록이 미흡한 설명을 대신할 수 있기를 바라며, 다음호에서는 이 강좌 시리즈의 마지막으로 최적화이론의 도시배수 설계에의 적용에 대해 알아보기로 한다.

참 고 문 헌

서정복, 김중훈, 이인모(1993), "Well Point 공법에서의 최적 펌프용량 결정에 관한 연구", 대한토목학회, 학술발표회.

이인모, 김중훈, 이주공(1995), "다단계 굴착시 단계별 최적 펌핑량 산정", 대한토목학회, 학술발표회.

Aguado, E., and I. Remson(1980), "Ground-water Management with Fixed Charges," J. Water Resour. Plann. Manage. Eiv., Am. Soc. Civ. Eng., 106, 375-382.

Aguado, E., I. Remson, M. F. Pikul, and W. A. Thomas(1974), "Optimum Pumping for Aquifer Dewatering," J. Hydraul. Div., Am. Soc. Civ. Eng., 100, 860-877.

Aguado, E., N. Sitar, and I. Remson(1977), "Sensitivity Analysis in Aquifer Studies,: Water Resour. Res., 13, 733-737.

Bear. J.(1979), Hydraulics of Groundwater, McGraw-Hill, Inc., New York.

Bouwer,H.(1978), Groundwater Hydrology, McGraw-Hill,Inc., New York.

Freeze, R. A. and J. A. Cherry(1979), Groundwater, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J..

Gorelick, S. M.(1983), "A Review of Distributed Parameter Groundwater Management Modeling Methods," Water Resources Res., 19, 305-319.

Haimes, Y. Y. and Y. C. Dreizen(1977), "Management of Groundwater and Surface Water Via Decomposition." Water Resources Res. AGU, 13(1):69-77.

Heidari, M.(1982), "Application of Linear Systems Theory and Linear Programming to Groundwater Management in Kansas," Water Resour. Bulletin, 18, 1003-1012.

Klemt, W. B., T. R. Knowles, G. R. Elder, and

T. W. Sieh(1979), "Groundwater Resources and Model Applications for the Edwards (Balcones Fault Zone) Aquifer in the San Antonio Region, Texas," Report 239, Texas department of Water Resources, Austin, Oct..

Lasdon, L. S., A. D. Warren, A. Jain, and M. Ratner(1978), "Design and Testing of a Generalized Reduced Gradient Code for Nonlinear Programming," Assoc. Comput. Mach. Trans. Math. Software, 4, 34-50.

Morel-Seytoux, H. J., and C. J. Daly(1975), "A Discrete Kernel Generator for Stream-Aquifer Studies," Water Resour. Res., 11, 253-260.

Reely, B. T., and A. K. Tyagi(1993), "A unified optimization-simulation aquifer management model," Proceedings of Hydraulic Engineering, ASCE, Vol.1, pp.466-470.

Remson, I., G. M. Hornberger, and F. J. Molz (1971), Numerical Methods in Subsurface Hydrology, Wiley-Interscience, New York.

Texas Water Development Board(1974), "GWSIM -Groundwater Simulation Program," Program Document and User's Manual, UM S7405, Austin, Texas.

Todd, D. K.(1980) Ground Water Hydrology, 2d ed., Wiley, New York.

Wanakule, N., L. W. Mays and L. S. Lasdon (April 1986), "Optimal Management of Large scale Aquifers: Methodology and Application," Water Resource Research, vol. 22, no. 4, 447-465.

Wang, H. F., and M. P. Anderson(1982), Introduction to Groundwater Modeling: Finite Difference and Finite Element Models, W. H. Freeman, San Francisco.

Wang, M., Zheng, C., Karr, L., and Sun, M. (1995), "Application of genetic algorithms to groundwater manegement and remediation problems," EOS 76(17), p.S136.

Willis, R., and P. Liu(1984), "Optimization Model for Ground-Water Planning," J. Water Resour. Plann. Manage. Div., Am. Soc. Civ. Eng., 110, 333-347.

Wills, R., and B. A. Newman(1977), "Management Model for Groundwater Development," J. Water Resour. Plann. Manage. Div., Am,. Soc. Civ. Eng., 13, 159-171.

Willis, R., and W. W.-G. Yeh(1987), Groundwater Systems Planning and Management, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J.