Chaos이론 및 Fractal Dimension의 수문학에의 적용에 관하여

허 준 행*

Q 최근들어 국내에도 수문학관련 논문에 Chaos(혼돈)이론이나 Fractal Dimension을 적용한 내용이 자주 등장하고 있습니다. Chaos이론에 나오는 Attractor와 Fractal Dimension에 대해 좀 자세히 알고 싶습니다.

A 혼돈이론의 개념은 외관상으로는 추계학의 개념과 비슷하나 실제적으로는 결정론적 과정입니다. 즉 혼돈이란 randomness가 없다든지 예측할 수 없는 입력량은 존재하지 않는 결정론적인 계(deterministic system)란 점에서 추계학적인 계(stochastic system)와 구별됩니다. 다시 말해 Chaos동력계에서는 어떤 계에서 쉽게 예측할 수 없는 복잡성속에서 그 계만이 가지고 있는 규칙성(order)을 찾아내 이를 다른 계에 응용하고자 하는 것입니다. 그럼 혼돈이론과 Fractal Dimension에 대해 설명을 하겠습니다.

1. Chaos 란 무엇인가?

여러가지 동력계중에는 예측이 가능한 것과 불행하게도 예측이 불가능한 것이 있습니다. 달의 운동, 진자의 운동과 같은 질점의 운동은 뉴톤의 운동법칙의 발견에 힘입어 예측가능한 동력계들로 잘 알려진 것들입니다. 그러나 기상의 변화 등은 예측불가능한 동력계의 대표적인 것들입니다. 과거에 이들 동력계가 예측불가능한 이유를 우리는 이들 계가 너무나 많은 변화요인을 가지고 있어서 변화의 기본법칙을 발견하기가 어렵기 때문이라고 믿었습니다. 예를 들면 기상상태의 예측에서 시간이 변하면 한 지역의 온도, 습도, 풍속, 압력, 구름낀 정도, 햇빛이 비치는 정도 등이 변하고 이들이 그 지역의 기후를 변화시키는 요인이 되고 있기 때문에 우리는 기후의 변화는 많은 변화요인를 가지고 있다고 생각하였습니다. 그러나 최근에 와서 비록 한 가지 변화요인만을 가지고 있는 간단한 동력계에도 기후의 변화처럼 예측불가능한 것이 있다는 새로운 사실이 발견되었으며, 여기서 수학자들은 이처럼 간단한 동력계마저도 예측불가능한 변화를 하도록 하는 원인에 대해 의문을 제기하기에 이르렀는데 이와 같이 간단한 동력계마저도 예측불가능한 변화를 하도록 하는 것을 '혼돈(Chaos)'이라고 합니다.

2. Attractor 란 무엇인가?

동력계에서 계의 전개는 상태공간(state space)에서의 궤적으로 묘사될 수 있습니다. 상태공간의 좌표는 계를 나타낼 수 있는 변수로 정해지며, 궤적은 이 공간안에서 전개됩니다. 서로 다른 초기조건에서 출발한 궤적이 궁극적으로는 상태공간내에서 수렴할 때 이를 'Attractor'라 부릅니다. 즉 Attractor란 위상공간의 한 영역으로서 어떤 계에 자석처럼 끌어당기는 효과를 나타내서 그 계를 그곳으로 끌어들이는 것처럼 나타납니다. 이 Attrac-

* 연세대학교 토목공학과 조교수

tor는 수렴하는 형태에 따라 묶인점 Attractor, 한계순환 Attractor, 토러스(torus)로 구분되며 이들 Attractor들은 계의 특성에 따라 초기조건에 상관없이 일정한 Attractor를 갖는 것도 있지만 변수에 따라 다른 형태의 Attractor를 갖는 것도 있습니다. 묶인점 Attractor의 대표적인 예로는 마찰이 있는 공기중에서의 단진자운동을 들 수 있는데 단진자를 운동시키면 초기조건에 상관없이 항상 한점으로 수렴하게 됩니다.

그러나 Strange Attractor는 결코 반복되지도, 수렴하지도 않기 때문에 예측에 한계가 있다. 이러한 Attractor는 혼돈이론에서 아주 중요한 부분을 차지하고 있고 Fractal Dimension과 아주 밀접한 관계가 있기 때문에 Fractal Dimension 설명에서 자세히 설명하겠습니다. 대부분의 상태공간내의 궤적은 그 현상이 매우 복잡하여 규칙성을 찾기가 힘듭니다. 때때로 상태공간내의 한 단면을 선택하여 그 단면위에 나타나는 궤적들을 고찰함으로써 문제를 쉽게 구명할 수 있는 경우가 많은데, 이러한 단면을 푸앙카레의 단면(Poincare' Section)이라 부릅니다. 위상공간내의 차원에 대한 제한은 없지만 한 평면을 선택하여 이 평면위에 나타나는 궤도의 교차점들은 푸앙카레의 단면을 이루고 있으며 한점에서 다음점으로의 변환은 연속적인 그림으로 표시되는데 이를 푸앙카레의 그림(Poincare' map)이라 한다.

3. Fractal Dimension 이란 무엇인가?

어떤 동력계는 궤적이 결코 교차, 반복되지도 않으면서 묶인점 Attractor도 한계순환 Attractor도 아닌 어떤 형태로 수렴하는 비주기성 운동을 하는 것이 있습니다. 이러한 Attractor는 아주 기이한 것으로서 유클리드수학에서 차원은 정수를 갖는다는 사실과는 달리 비정수를 차원으로 갖는데 이러한 Strange Attractor에 의한 차원을 'Fractal Dimension' 이라 부릅니다. 'Fractal'이란 말은 1982년 Mendelbrot에 의해 처음으로 소개되었으며 이러한 성질을 갖는 대표적인 도형을 소개하면 다음과 같습니다.

① 칸토르의 3분집합(Cantor's ternary set)

선분을 3등분하여 중앙부분을 제거시키고 다시 남은 부분의 선분들에 대해 계속적으로 3등분하여 중앙부분을 제거시켜 나가면 무한히 많은 점들로 구성되는 하나의 점집합이 된다. 이와 같은 도형(점집합)을 칸토르의 3분집합(Cantor's ternary set)이라고 한다.

② 지르핀스키의 삼각형(Sierpinski's triangle)

한 삼각형에서 내부 1/4 크기의 삼각형을 중심부에서 들어내 버린다. 나머지 3개의 삼각형 각각에 대해 이들 크기의 1/4 만큼의 삼각형을 중심부에서 다시 들어내 버리는 작업을 무한히 진행하였을 때 남아있는 점들의 집합이 나타내는 도형을 지르핀스키의 삼각형(Sierpinski's triangle)이라고 한다.

칸토르의 3분집합과 지르핀스키의 삼각형은 각각 완벽하게 그릴수는 없고 다만 우리의 머리속에서 이렇게 생겼을 것이라고 추정만 할 수 있을 뿐인 복잡하고 오묘한 도형입니다.

이들 도형에는 다음과 같은 두가지 공통성을 가지고 있음을 쉽게 발견할 수 있습니다. 즉, 자기유사성(Self-similarity)인데 이는 어느 일부분을 떼어 보아도 전체의 모습과 닮아 있다는 것입니다. 두번째로 자기 복잡성(Self-complexity)인데 이는 어느 일부분을 떼어 보아도 복잡하고 오묘한 구조를 갖추고 있다는 것입니다.

그럼 혼돈이론과 Fractal은 어떻게 접합되는가를 알기쉬운 예를 들어 설명해보겠습니다. 우리는 어떤 나라의 인구를 추정함에 있어, 그 나라의 최대인구 증가율이 20% 일 때, 이 나라의 인구추정 문제는 결국 $f(x)=\lambda x(1-x)$함수에 대하여 수열 0.2, $f(f(0.2)$이 어떤 수에 수렴하는가를 알아보는 문제로 전환됨을 알 수 있습니다. 그런데 이 수열은 λ의 값에 따라 유한개의 값에 접근 할 경우도 있고, 무한히 많은 값에 접근 할 경우도 있음을 우리는 발견할 수 있습니다. 이때 이 수열이 무한히 많은 값에 접근하도록 하는 λ값을 우리는 동력계

$f(x)=\lambda(1-x)$을 혼돈으로 이끄는 값이라고 합니다. 그런데 이와 같은 λ값의 전체집합을 A라고 하고, A를 컴퓨터 그래픽으로 수직선위에 하나의 도형으로 나타내어 보면 A는 하나의 차원분열도형, 즉 Fractal임이 발견되는 것을 볼때 혼돈이론과 Fractal는 서로 불가분의 관계가 있음을 알 수 있습니다.

그럼 이제 Fractal차원을 결정하는 방법중 널리 사용되는 Hausdorff 차원 D 와 상관성차원(correlation dimension) ν에 대해서 알아보겠습니다. Hausdorff 차원 D는 다음과 같이 정의됩니다.

$$D=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)} \tag{2}$$

여기서 ε는 각 절점의 길이이고 $N(\varepsilon)$ 은 ε의 총수.

앞에서 Fractal의 예로 설명한 칸토어의 집합(cantor set)의 경우, 한 직선을 매단계당 중앙의 1/3 절점을 제거해 나가 궁극적으로는 무수한 점으로 구성되는데 이에 따른 ε는 각각 1/3, $(1/3)^2$, $(1/3)^3$, ……, $(1/3)^m$ 이고 $N(\varepsilon)$는 2, 2^2, 2^3, ……, 2^m이 되므로 차원 D는 다음과 같습니다.

$$D=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\ln 2^m}{\ln 3^m}\fallingdotseq 0.63 \tag{3}$$

또한 지르핀스키의 도형(Sierpinski carpet)의 차원 D는,

$$D=\lim_{m\to 0}\frac{\ln 8^m}{\ln 3^m}\fallingdotseq 1.89 \tag{4}$$

그러나 Hausdorff 차원은 차원이 2 보다 큰 경우 그 수렴이 매우 느려 실제로는 상관성차원 ν를 많이 사용합니다.

푸앙카레의 단면과 같은 평면위에 있는 일련의 점들을 생각해 보면, 임의의 반경 r 내에 있는 점들의 수를 N(r) 이라 할 때 다음과 같은 관계가 있습니다.

$$N(r)\simeq r^{\nu} \tag{5}$$

예를 들어 직선인 경우 $\nu=1$, 평면인 경우 $\nu=2$, 칸토어의 집합(cantor set)인 경우 $\nu=0.63$ 을 얻게 됩니다. 이와 같이 차원을 정하는 중요한 이유는 그것이 Fractal차원이던 아니던 어떤 자연현상을 설명하기 위해서 사용될 모형의 제약변수의 수를 정한다는 점에서 중요합니다. 예를 들어 D=4.56인 경우 적어도 5개의 변수를 갖는 5개의 상미분방정식이 필요하다는 것입니다. 실제로는 자연현상을 설명하기 위한 정확한 수학적 형태가 없는 경우가 많은데 이러한 경우 상태공간은 그 계로부터 관측 가능한 하나의 변수로 된 위상공간으로 변환할 수 있습니다.

Q 혼돈이론과 Fractal Dimension이 수문학에는 어떻게 적용이 되고 있는지 알고싶습니다.

A 현재 Chaos이론을 도입하여 수문학적 현상을 구명하려는 노력은 최근 4~5년 사이에 급격히 증가하고 있지만 아직도 그 적용범위가 그리 넓은 것같지는 않습니다. 국내에서도 이를 이용한 논문들이 소개가 되기 시작했으며 여러분야에 대해 새로운 접근방법으로 적용이 되고 있으나 아직 시작단계에 불과하기에 여기서는 수문학에의 적용 예를 외국사례중심으로 주요분야에 대해 간단히 알아보기로 합니다.

1. 유역형태학에의 적용

유역형태학이란 수문관측지점이 부족한 어떤 유역에 대해 형태학적 관찰을 하므로써 수문학적 혹은 형태학적인 추론을 하여 그 지역 수자원의 잠재량을 판단하려는 수문학의 한 분야이다. 이러한 노력은 Horton (1945)이나 Gupta 등(1983, 1989)에 의해 오래전부터 계속되어 왔고 수로망

(river network)을 체계적으로 분류하고 지형적인 유사성에 대한 이론을 계속 발전시켰습니다. 지형학적 유사성에 대한 식의 이해에 Mandelbrot (1982)가 소개한 Fractal차원개념이 적용되었습니다. 이러한 Mandelbrot의 개념을 바탕으로 Hjelmfelt(1988)은 Missouri에 있는 8 개의 강을 대상으로 유로길이와 집수유역에 대한 Fractal차원의 특성을 연구했는데 그는 이 지역에서 하천길이와 유역면적에 대한 평균 Fractal차원은 각각 1.158, 1.105 라고 제시했습니다. 이는 Mandelbrot의 가정사항인 1.136에 근사함을 보이고 Mandelbrot가 제시한 유역면적과 유로길이와의 관계는 하천길이측정의 Fractal 특성에 따라 설명할 수 있다는 그의 이론을 증명해 주는 것입니다. 그 후 Feder(1988)는 유로길이의 Fractal차원 DL은 Bifurcation ratio (R_B)와 유로길이비(stream length ratio) R_L로 부터 관계식을 얻을 수 있다고 제안했습니다.

$$D_L = 2\frac{\log R_L}{\log R_B} \tag{6}$$

이에 대해 Rosso(1991)는 일부유역에서는 잘 맞지 않는다고 주장하면서 R_L과 면적비(area ratio) R_A를 사용하여 보다 일반화된 다음과 같은 식을 제안하였습니다.

$$D = \mathrm{MAX}[1,\ 2\frac{\log R_L}{\log R_A}] \tag{7}$$

또한 그는 하천망의 Fractal차원 D_N은 R_B와 R_A로부터 아래와 같은 식으로 구할 수 있다고 제안하였습니다.

$$D_N = \mathrm{MAX}[2,\ 2\frac{\log R_B}{\log R_A}] \tag{8}$$

지금까지 유로길이와 유역면적과의 관계에서 유역의 기하학적 유사성을 Fractal개념으로 설명하였습니다.

2. 강수현상과 기후변화에의 적용

지금까지 혼돈이론의 강수현상에의 적용은 대부분이 강수현상이나 기후변화의 연구에서 Attractor의 존재여부를 알아보는 정도입니다. 기후변화 연구에 혼돈이론을 처음 도입한 사람은 Nicolis 등(1984)인데 이들은 앞에서 소개한 상관성차원 개념을 도입하여 과거 수백년간의 장기간 기후변화에 Attractor가 존재하며 Fractal차원(D)은 3이라는 것을 제시했습니다. 그는 이처럼 낮은 차원의 기후변화에 Attractor가 존재한다는 것은 장기간의 기후변화에도 어떤 제한된 수의 변수를 가진 결정론적 동력계의 존재를 입증한다고 했습니다. 이와 같이 기후변화 양상에서 Attractor의 존재여부를 연구한 문헌은 상당수가 있지만 대표적인 것을 살펴보면, Friedrich (1986)는 어떤 지역의 압력(local pressure), relative sunshine duration 에서의 Attractor의 차원에 대한 연구를 하였고 Gabriel 등(1988)은 인공위성 영상(satellite image)에서 Attractor에 대한 연구를 하였으며, Kurths 등(1987)은 관측된 태양복사파동(solar radio pulsation) 에서 낮은 차원의 Attractor에 대한 연구를 하였으며 Nicolis (1987)은 해양의 평균수온 변화에 혼돈계가 존재한다는 것을 연구했습니다. 또한 Osborne 등(1986)은 보다 큰 규모의 태평양 해상에서 시간변화에 따른 부표(buoy)의 위치변화를 분석하여 상관성차원이 1.4 인 Attractor가 있다고 주장한 바 있습니다.

상대적으로 짧은 시간에 대한 연구는 Tsonis 등(1988), Rodriguez-Iturbe 등(1989), Sharifi 등(1990)에 의해서 이루어졌는데 Tsonis 등은 10초 간격의 11시간 동안의 고도에 따른 풍속자료(vertical wind velocity data)로 Attractor가 존재하는지를 연구하였고 이 자료에서 7.3 의 차원을 갖는 기이한 Attractor가 존재하며 이러한 동력계는 적어도 8 이상의 자유도(즉 8개이상의 미분방정식)을 갖는 계가 필요하다고 제시했습니다. 또한

그는 짧은 시간에서의 동력계는 더욱 복잡하고 예측하기도 힘들다고 했습니다. Rodriguez-Iturbe 등(1989)은 15초 간격의 강우자료에서 Attractor의 차원을 연구하였고 Sharifi 등(1990)은 폭우(intense rainfall)는 통상 단기간에 발생하기 때문에 이에 대한 연구가 필요하며 차원이 4 보다 적은 Attractor가 존재한다는 것은 장기간 강우예측이 가능하다는 것을 입증한다고 주장하였습니다.

이상으로 혼돈이론과 Fractal Dimension이 수문학 주요분야에 어떻게 적용되고 있는 지를 살펴보았는데 결론적으로 수문학에서의 적용은 혼돈 동력계가 가지고 있는 규칙성을 찾아내고 나아가 이를 수문모형에 어떻게 응용하는가의 문제로 요약할 수 있겠습니다. 앞으로 수문학에서의 혼돈이론 연구는 순수 혼돈이론의 발전과 함께 더욱 연구가 활발하리라 믿습니다.