기술강좌

최적화 이론의 수자원공학에의 적용(I)

김 중 훈*

머리말

최적화 이론은 모든 가능한 대안에 대해 일일이 계산하고 평가해 보지 않고도 최선의 대안을 찾아내기 위한 수치계산방법이라 할 수 있다. 전통적으로 공학자의 사명은 기존의 시스템을 보다 효과적으로 운영할 수 있도록 계획을 해야 할 뿐만아니라 보다 경제적이고도 나은 새로운 시스템을 디자인해야 함에 있으므로 최적화과정은 공학과 그뿌리를 같이 한다해도 과언이 아닐 것이다. 모든 경우를 테스트해보지 않고도 최적의 경우를 결정하는 최적화 기법의 진정한 매력은 아주 높은 수준의 수학이 요구되지 않는다는 점과 명확한 논리과정이나 알고리즘을 사용하여 반복적인 수치계산을 컴퓨터로 수행한다는데 있다.

최적화이론은 본래 Operations Research(OR)에서 유래되었으며, OR은 과학적인 방법·수법·기법등을 시스템운용에 관한 문제에 적용하여 의사결정에 대한 계량적기초 즉, 최적해를 제공하는 과학적 방법이라 정의될 수 있다. OR의 개념이 적용되는 분야는 아주 광범위하며, 다양한 수자원공학 분야에도 적용이 될 수 있다.

본 기고에서는 최적화 기법의 간단한 소개와 함께 수자원공학 분야에의 적용예를 살펴보기로한다. 지면관계상 개념설명에 도움이 되는 간단한 예제를 위주로 설명할 계획으로 더 자세한 이론과 실 적용예를 위해서는 참고문헌을 이용하기 바란다. 본 기고의 순서를 요약하면 다음과 같으며 4회에 걸쳐 연재될 계획이다.

1. OR 및 수자원시스템공학의 유래
2. 최적화 기법의 소개
3. 관망 시스템에의 적용
4. 댐 운영에의 적용
5. 지하수 펌핑계획에의 적용
6. 도시 배수설계에의 적용

1. OR 및 수자원시스템공학의 유래

산업혁명은 산업체의 규모를 크고 복잡하게 만들었으며, 특히 노동력의 분업화와 관리책임의 분할을 초래하였다. 이와 같은 산업의 분업화는 몇가지 문제점을 야기시키게 되었다. 예를 들면 산업체의 개개 구성체는 나름대로의 가치시스템과 목표를 추구하게 되고 따라서 전체로서의 기관이 추구해야 할 방향과 목적에 대한 시각을 잃는 폐단과 이와 관련하여 산업체의 전문화와 복잡성이 증가됨에 따라 전체시스템의 입장에서 효과적으로 가용한 자원들을 다양한 작업에 적절히 배정하기가 점점 어려워지게 되었다. 이러한 문제들을 더 나은 방법으로 해결하려는 노력이 OR을 태동시키게 된 것이다. 따라서 OR의 뿌리는 몇세기 전으로 거슬러 올라간다 할 수 있다.

그러나 일반적으로 말해서 소위 Operations Research(작전연구 또는 운용연구)라 불리우는 학문은 제2차 세계대전 초기의 군사활동으로 부터

* 고려대학교 토목환경공학과 조교수

유래되었다. 영국의 과학자들은 부족한 군자재를 여러 군사 작전에 적절히 배치하여 효과적인 작전 수행을 할 수 있도록 하였고, 이어서 미국에서도 군사작전에 응용되었다. 이와 같은 제2차 세계대전에서의 OR의 성공적인 활용의 영향은 전후 여러 산업분야에 파급되기 시작하였고, 전쟁중 OR팀에 합류했었거나 성공담을 접한 학자들이 OR에 관한 연구를 수행하게 되는 동기를 부여하였다. 그 결과 이 분야에 많은 학문적 발전을 가져오게 하였다. 그 대표적인 예를 들면 1947년에 George Dantzig는 선형계획법의 해석을 위한 단체법(simplex method)을 개발하였으며 OR의 대표적인 기법인 선형계획법(linear programming), 동적 계획법(dynamic programing), 재고문제(inventory problem)등은 이미 1950년대말 이전에 비교적 잘 개발되었던 것이다. 이후 일어난 컴퓨터혁명은 이 분야의 발전에 큰 원동력이 되었다.

수자원시스템(hydrosystems)이라는 용어는 수문학, 수리학, 수자원공학에 경제학, 최적화기법, 확률론, 통계학, 경영학 등의 개념을 도입한 학문영역을 가리키기 위하여 V.T. Chow에 의해서 처음 사용되었다. 수자원시스템에는 지표수공급시스템, 지하수공급시스템, 물 배분시스템, 홍수관리시스템, 폐수처리시스템 등이 포함된다.

이러한 다양한 수자원시스템문제의 일반적인 형태는 다음과 같다.

① 프로젝트의 적정 개발정도의 결정

② 시스템을 형성하고 있는 다양한 구성체의 적정크기 결정

③ 시스템의 적정운영방법의 결정

2. 최적화 기법의 소개

최적화 문제의 일반적인 형태는 결정 변수 (x)를 이용하여 나타내는데 그 목적함수는

$$\text{Optimize } f(x)$$

이며 다음과 같은 제약조건식

$$g(x)=0$$

과 한계조건식

$$\underline{x} \leq x \leq \overline{x}$$

을 만족시켜야 한다.

여기서 x는 n개의 결정변수(x_1, x_2, …, x_n)를 나타내는 벡터이고, $g(x)$는 m개의 제약조건식을 나타내는 벡터이며, $\underline{x}$와 $\overline{x}$는 각각 결정변수들의 하한과 상한값을 나타낸다. 모든 최적화 문제는 목적함수와 제약조건식들의 두 중요한 부분으로 구성되어 있다. 목적함수는 시스템의 최적화 정도를 나타내는 척도라고 볼 수 있고 그 척도가 비용(경비)일 경우는 최소화(minimizing)문제이며, 이익일 경우는 최대화(maximizing)문제가 된다. 제약조건식은 시스템이 설계 또는 해석되어야 하는 조건들을 수식으로 나타낸 것이며 등식 또는 부등식의 형태로 주어진다. 제약조건식으로는 기술적조건, 경제적 또는 예산에 관련된 조건, 설계조건, 운영조건, 수요조건 등이 있을 수 있다. 가능해영역(feasible region)이란 제약조건식들에 의해 정의되는 가능해의 영역이고, 가능해(feasible solution)는 제약조건식들을 동시에 만족시키는 결정변수값의 집합이며, 최적해(optimal solution)는 가능해 중 최적의 목적함수를 제공하는 해를 말한다.

2.1 재래식 모의방법과 최적화 방법의 비교

재래식설계 및 해석방법은 주로 반복적인 시행착오법에 의한 것인데, 이 방법의 효율성은 공학자의 경험, 기술, 직감, 수자원시스템의 지식정도 등에 좌우된다. 따라서 재래식 방법은 인간적인 요소와 밀접한 관계에 있으며 그 결과 복잡한 시스템의 설계 및 해석에는 비효율적일 경우가 많다. 이에 반하여 최적화 방법은 설계를 계속 변경해야 하는 시행착오과정을 거치지 않고 대신 설계변수를 최적화 모델 자체가 변화시키는 방법이다. 최적화 모델은 어떤 시스템의 구성과 그 시스템이 다양한 설계변수에 따라 어떠한 반응을 보이는가를 수식들로 나타내는데 이들을 제약조건이라 한다. 제약조건식은 설계변수의 한계를 설정하는데 쓰이기도 하는데, 설계되는 시스템의 최적화 정도는 목적함수를 통해

서 평가된다.

재래식 방법의 장점은 공학자의 경험과 육감이 시스템에 개념적으로 변화를 주는데 유용하게 쓰일 수 있고 추가적인 조항을 만들거나 바꾸는 데에도 유용하다는 점이다. 그러나 이 방법은 최적이 아닌 해를 구하기 쉽고 비경제적인 설계나 운영계획을 하게 될 수 있으며 대체로 적정해를 구하는데 아주 많은 시간을 요구하게 된다. 이에 반하여 최적화 방법은 의사결정을 위해 수학적 접근방법을 사용함으로써 논리 전개가 정연하다 할 수 있다. 최적화 방법을 사용하기 위해서는 공학자는 설계변수를 밝히고, 목적함수와 제약조건식을 세워야 하며, 때로는 수식으로 시스템을 나타내는 과정에서 오류를 범할 수도 있으므로 실무적인 견지에서 모델을 개발하도록 노력해야 한다.

2.2 선형계획법(Linear Programming)

개발된 최적화 모델의 목적함수와 제약조건식 모두가 선형함수로 주어지면 이 최적화문제는 선형계획법문제(linear programming problem)라 불리우며, 선형계획법에 의해 풀이될수 있다.

선형계획법문제의 일반적인 형태는 다음과 같이 나타내어질 수 있다.

$$Max(\text{or } Min)\ x_0 = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{2.1a}$$

subject to

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \ \text{ for } i = 1,2,\cdots,m \tag{2.1b}$$

$$x_j \ge 0 \qquad \text{for } j = 1,2,\cdots,n \tag{2.1c}$$

여기서 (2.1a)식은 목적함수식, c_j는 목적함수계수이며 (2.1b)식은 기술적 제약조건식, a_{ij}는 기술적 계수, b_i는 우변(RHS)계수, (2.1c)식은 비음조건(nonnegativity constraint)이다.

제약조건식들이 전부 선형함수이므로 가능해영역은 다각형의 내부와 경계선으로 주어지게 되는데 이 다각형의 꼭지점을 가능꼭지점(feasible extreme point)이라 한다. 이와 관련해서 선형계획법은 다음과 같은 세가지의 중요한 특성을 가진다.

특성 1-선형계획법문제의 최적해가 하나만 존재한다면 그것은 어떤 한 꼭지점이다. 만약 최적해가 여러개 존재한다면 그중 적어도 두 개는 인접한 꼭지점들이다.

특성 2-가능꼭지점의 갯수는 유한하다.

특성 3-어떤 한 가능꼭지점이 인접해 있는 두 가능꼭지점보다 낮다면(목적함수로 비교해서) 그 꼭지점은 바로 인접해 있는 다른 어떤 꼭지점보다도 낮다.

위의 세가지 특성으로 미루어 선형계획법의 최적해는 항상 가능꼭지점에서만 발생함을 알 수 있고 일단 어떤 한 가능꼭지점에서의 목적함수값을 인접한 주위의 두 가능꼭지점에서의 값과 비교하기만 하면 되며, 일단 특성3이 만족되기만 하면 현재의 가능꼭지점이 전체최적해(global optimum)임을 알 수 있고, 더 이상 다른 가능 꼭지점을 조사할 필요가 없게 된다. 위와 같은 선형계획법의 특성3이 유효하기 위해서는 가능해영역이 볼록(convex)하여야 하며, 만약 그렇지 못할 경우 얻어진 최적해는 전체최적해라고 할 수는 없으며 국지최적해(local optimum)라 불리운다. 이런 현상은 특히 비선형계획법(nonlinear programming)문제에서 흔히 일어나는데, 다행히도 선형계획법 문제에서는 가능해영역이 거의 언제나 볼록(convex)으로 주어진다.

2.2.1 선형계획법문제의 예(공장폐수처리문제, Mays & Tung 1992)

어떤 한 제조공장과 폐수처리장으로 되어 있느 시스템을 생각해 보자. 이 제조공장의 완제품은 개당 \$10,000에 팔린다. 개당 제조비용은 \$3,000이다. 그러나 이 제품의 제조과정에서 1개의 완제품 제조를 위해서는 2개단위의 폐수가 발생된다. 이 시스템의 매니져는 얼마나 많은 완제품을 만들 것인가 결정해야 함은 물론 발생되는 폐수중 얼마를 처리하지 않고 방류할 것인가를 결정하여 강하류의 수질조건을 범하지 않는 범위내에서 회사의 총 순이익을 극대화 하여야 한다. 폐수처리장은 최대 10개 단위의 폐수를 처리할 용량을 가지고 있

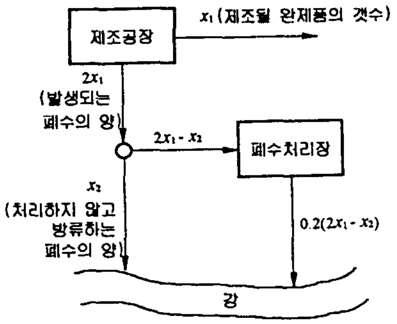

그림 2.1 시스템 구성체간의 관계를 나타내는 모식도

으며 처리효율은 80%이다. 처리에 드는 비용은 폐수 1개 단위당 $600이다. 처리되지 않고 방류되는 폐수에 대해서는 1개 단위당 $2,000 의 환경세금을 부과한다. 이 지방 환경청은 각 공장이 배출할 수 있는 폐수의 최대 방류허용치를 4개 단위로 규제하고 있다. 이 문제를 선형계획법으로 수식화하라.

〈풀이〉

제일 먼저 할 일은 이 시스템의 구성체를 밝히고 서로간의 관계를 규명하는 것인데 이 예제의 경우 시스템구성체는 제조공장, 폐수처리장, 강으로 볼 수 있다. 문제 설명에서 볼 때 이 문제는 다음과 같은 두 개의 결정변수를 가짐을 알 수 있다. 즉, (1)제조해야 할 완제품의 갯수, x_1;(2)처리하지 않고 방류할 폐수의 양, x_2. 이 문제의 시스템 구성체간의 연관 관계는 그림 2.1과 같이 도식화될 수 있다.

모델을 세우기 전에 목적함수와 제약조건식을 밝힐 필요가 있다. 이 예제의 경우 목적은 이윤을 최대화 시키는 것이며, 제약조건은 주로 폐수처리장의 처리용량의 한계 그리고 지방환경청에 의해 정해진 폐수방류 최대허용한계에 의해 정해진다. 이것을 수학적 식으로 나타내는 것을 수식화한다고 한다.

다음의 네가지가 공장주의 이윤과 관련된다: (가)완제품의 판매(단위: $1,000), $10x_1$; (나)제품제조비용, $3x_1$; (다)폐수처리에 드는 비용, $0.6(2x_1-x_2)$; (라)처리되지 않고 방류되는 폐수에 대한 세금, $2[x_2+0.2(2x_1-x_1)]$. 공장주의 이윤은 총 판매수입에서 총 비용을 뺀 것과 같으므로 이 문제의 목적함수는 (가)-{(나)+(다)+(라)}를 최대화 하는 것이다. 즉, $10x_1-\{3x_1+0.6(2x_1-x_2)+2[x_2+0.2(2x_1-x_2)]\}=5x_1-x_2\}$이다. 따라서 목적함수는 다음과 같이 나타내진다.

$$Max\ x_0=5x_1-x_2$$

그림 2.1에 의하면 폐수처리장의 처리용량한계에 의한 제약조건식은

$$2x_1-x_2\leq 10$$

로 주어지며, 폐수처리장으로 보내지는 폐수는 10개 단위를 초과할 수 없다는 의미이다. 마찬가지로 폐수처리방류 최대허용한계에 관한 제약조건식은

$$x_2+0.2(2x_1-x_2)\leq 4$$

로 나타내어지며, 윗식에서 좌변은 강으로 방류되는 폐수의 총량이며 우변의 4는 방류허용치이다.

이상에서 정의한 두 개의 명확한 제약조건식 외에 이 문제와 관련해서 제약조건식을 하나 더 추가한다면 폐수처리장으로 가는 폐수의 양은 음수일 수가 없다는 것이다. 다시말해서 $2x_1-x_2$에 대한 비음조건이며, 다음과 같이 주어진다.

$$2x_1-x_2\geq 0$$

마지막으로 두 결정변수 x_1과 x_2는 실제적으로 음의 값을 가질 수 없다는 비음조건 즉, $x_1\geq 0$과 $x_2\geq 0$이 추가되어야 한다. 따라서 최종적으로 이 문제에 대한 수학적 모델은 아래와 같이 요약된다.

$$Max\ x_0=5x_1-x_2$$

subject to

$$2x_1-x_2\leq 10$$
$$0.4x_1+0.8x_2\leq 4$$

$2x_1 - x_2 \geq 0$

$x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0$

위에서 개발된 최적화 모델의 목적함수와 제약조건식들로부터 이 문제는 선형계획법문제임을 알 수 있다. 이와 같은 문제의 해를 위해서는 도해법(graphical method)과 단체법(simplex method)이 있다.

2.2.2 도해법

도해법은 선형계획법의 풀이를 위한 제일 간단한 방법이지만 결정변수가 3개 이상이 되면 거의 풀이가 불가능해진다. 앞절의 공장폐수처리 예제의 최적해를 도해법으로 구해보기로 한다.

우선 제약조건들을 이용하여 그림 2.2와 같이 가능해영역을 그리도록 한다. 그림2.2와 같이 가능해영역은 빗금친 사각형(테두리 포함)이다. 굵은 실선은 각각의 제약조건식을 등식으로 놓았을 경우를 나타내며 실제로 이 문제의 제약조건식은 부등식이므로 그림상에는 반쪽평면(half-plane)으로 나타내야하며 이를 위해 화살표 표시를 하였다. 비음조건을 포함한 제약조건식들을 동시에 만족하는 영역이 가능해영역이고, 이 문제의 경우 가능꼭지점은 A, B, C, D의 4개이다.

우선 $x_0=0$인 직선을 그린다. 즉, 목적함수식이 원점을 지나도록 한다. 수학적으로 말하면 $5x_1-x_2=0$ 선상의 모든 점은 총순이익이 0임을 의미한다. 이들 점중에서 빗금친 가능해영역 안에 해당되는 점들에게만 우리의 관심이 있음은 물론이다. 총순이익이 증가될 수 있는 지 알아보기 위해 $x_0=0$인 선을 평행하게 좌우로 움직이면 목적함수의 값이 변하는 것을 알 수 있다. 목적함수 x_0의 값을 증가시킨다는 것은 $x_2=5x_1$인 직선의 절편을 "-" 방향으로 증가시킴을 의미하므로 목적함수의 값을 증가시키기 위해서는 직선을 계속해서 오른쪽으로 평행하게 움직여야 함을 알 수 있다. 목적함수직선이 적어도 가능해영역의 한 점을 통과해야 하므로 C점보다 더 이상 오른쪽으로 간다는 것은 의미가 없다. 따라서 C점을 통과하는 직선이 최적의 목적함수값을 나타내는 선이며 C점에서 $x_1=6$, $x_2=2$이므로 이 제조공장은 6개의 완제품을 만들고, 부

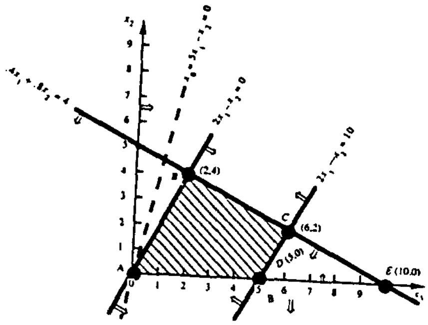

그림 2.2 공장폐수처리문제의 가능해 영역과 목적함수

수적으로 생기는 12개단위의 폐수중 2개단위를 처리하지 않고 직접 강으로 방류할 때 총 순이익 $x_0 = 5x_1 - x_2 = \$28{,}000$(모델을 수식화 할 때 화폐단위를 $1,000으로 했으므로)임을 알 수 있다.

2.2.3 단체법

선형대수학에서 미지수 즉, 결정변수의 갯수(n)가 식의 갯수(m)보다 많을 경우 (n-m)개의 미지수를 0으로 놓고 나머지 m개의 미지수에 대해 해를 구한다. 이와 같이 해서 구한 해를 기본해(basic solution)라 하고, 이 m개의 미지수를 기본변수(basic variable)라 부른다. 한편 0으로 놓는 (n-m)개의 결정변수를 비기본변수(nonbasic variable)라 부른다. 앞절의 예제에서 결정변수는 x_1과 x_2 두개였으나 실제로 선형대수로 해석하려면 부등호인 3개의 제약조건식을 등호로 바꾸어 주기 위해 3개의 여유변수(slack variable)를 추가로 고려해야 하므로 총 5개의 결정변수에 대하여 3개의 제약조건식(등식)이 있는 것이다. 따라서 비기본변수의 갯수는 5-3=2개이고 기본변수의 갯수는 3개이다. 이경우 이론상 총 ${}_nC_m={}_5C_3=10$개까지의 기본해가 존재할 수 있으며, 기하학적으로 각각의 기본해는 두 제약조건식간의 교차점이라 할 수 있다. 그림 2.2에서의 경우 총6개의 기본해가 존재함을 알 수 있으며 이중 4개만이 가능꼭지점이다.

단체법의 기본 풀이방법은 각 가능꼭지점과 이에 근접한 두 가능꼭지점에서의 목적함수값의 크기를 비교해 가면서 순차적으로 최적값을 찾아가는 것이다. 단체표(simplex tableau)를 작성하여 변수를 가능꼭지점마다 기본해와 비기본해로 나누어서 차

례로 목적함수값을 구하여 최적값을 구한다.

이 방법을 행렬(matrix)형태로 나타내어 수정단체법(revised simplex method)으로 설명하면 다음과 같다.

목적함수:

$$Max(\text{or } Min)\ x_0=c^T x$$

제약조건;

$$(A,I)\ x=b$$
$$x\geq 0$$

여기서 I는 단위행렬, c는 목적함수 계수벡터이고, A는 제약조건식의 계수벡터, x는 변수이다. 목적함수식과 제약조건식을 전개하면

$$Max\ x_0=c_B^T x_B+c_N^T x_N$$
$$Bx_B+Nx_N=b$$

첨자 B는 기본해(basic variable)를 의미하고 첨자 N은 비기본해(nonbasic variable)를 의미한다. 벡터 B와 N은 제약조건식의 기본해와 비기본해에 관계되는 계수값이다. 풀이과정에서 비기본해는 0이므로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$Max\ x_0=c_T^B x_B$$
$$Bx_B=b$$

윗식의 해가 최적해이며 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\begin{pmatrix} 1 & c_B^T B^{-1}A-c_I^T & c_B^T-c_{II}^T \\ 0 & B^{-1}A & B^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_I \\ x_{II} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_B^T B^{-1}b \\ B^{-1}b \end{pmatrix}$$

여기서 x_I는 초기 비기본변수 벡터이고 x_{II}는 초기 기본변수 벡터이다.

2.3 비선형계획법(Nonlinear Programming)

목적함수와 제약조건이 선형이라는 선형계획법에서의 조건은 많은 실제 문제에서도 적용되지만 그렇지 못한 경우도 많이 있다. 비선형계획법 문제의 예를 들기 위해서 선형계획법에서의 예제를 다시 생각해 보기로 한다. 이 문제에서 다른조건은 다 동일하되 한 개의 완성품생산당 폐수발생량이 $2x_1$인 대신에 $2x_1^{0.8}$ 으로 주어진다고 가정하면 이 문제는 아래와 같은 비선형계획법 문제가 된다.

$$Max\ x_0=-2x_1^{0.8}+7x_1-x_2$$

subject to

$$2x_1^{0.8}-x_2\leq 10$$
$$0.4x_1^{0.8}-0.8x_2\leq 4$$
$$2x_1^{0.8}-x_2\leq 0$$
$$x_1\geq 0,\ x_2\geq 0$$

비선형계획법 문제의 형태는 아주 다양하기 때문에 선형계획법에서의 단체법과는 달리 어떤 한 알고리즘이 모든 형태의 비선형계획법 문제에 적용될 수는 없다. 따라서 비선형계획법의 알고리즘들은 다양한 문제의 형태에 맞추어 개발되어 왔다. 이들 중 가장 중요하다고 생각되는 것들만 소개해 보기로 한다.

2.3.1 제약조건이 없는(unconstrained) 경우의 최적화

이 경우 목적함수는 x의 모든값에 대하여

$$Max(\text{or } Min)\ f(\mathrm{x})$$

여기서 $x=(x_1, x_2,\cdots, x_n)$이다. $f(\mathrm{x})$가 미분가능할 때 어떤 해 x가 최적해 x*이기 위한 필요충분

조건은

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}=0 \text{ at } x^*=x \text{ for } j=1,2,\cdots,n. \qquad (2.2)$$

단, 최대화 문제일 경우 $f(x)$는 오목(concave), 최소화 문제일 경우 $f(x)$는 볼록(convex)이어야 한다. (convexity에 관한 자세한 설명은 Hillier & Lieberman 1990, Appendix 1 참조). 그러면 (2.2)식의 n개의 편미분방정식을 풀면 x^*의 해를 구할 수 있다. 그러나 비선형함수 $f(x)$의 미분방정식들도 비선형일 경우가 많으며, 이 경우 해석적으로 풀기가 난해해지므로 어떤 알고리즘을 이용한 탐색과정을 거쳐서 x^*를 구하게 된다. 이러한 탐색과정들은 제약조건식이 있는 최적화문제의 해석에서도 유용하게 쓰이는 경우가 많다. 대체로 제약조건식이 있는 문제의 해석을 위한 알고리즘들은 매 반복계산 때마다 제약조건이 없는 최적화문제의 형태로 계산하기 때문이다.

우선 결정변수가 하나인 경우 (n=1), (2.2)식에서 x^*의 탐색과정은 x의 탐색구간을 정해놓고 하는 반복계산이다. 즉 그 구간의 일부분을 삭제하여 탐색구간을 줄여 나가는 과정이다. 따라서 이러한 방법들을 구간제거법(interval elimination techniques)이라 부르며, Golden section method, Half-interval search method (Bolzano search plan) 등이 있다. 결정변수의 갯수가 $n>1$인 경우를 위한 알고리즘들은 아래와 같은 기본 단계를 거친다.

(0) 시작점을 결정한다. $x^{k=0}=(x_1^0, x_2^0,\cdots,x_n^0)$

(1) 탐색방향 d^k를 결정한다

(2) 다음식을 이용하여 새로운 점을 구한다.
$x^{k+1}=x^k+\beta^k d^k$ β^k는 $f(x^k+\beta^k d^k)$를 최적화 시키는 step size이다.

(3) 계산을 종료할 지 결정한다.(convergence criteria)
아직 만족스럽지 못하면 $k=k+1$로 놓고 다시 (1)단계로 간다.

알고리즘의 종류는 (2)단계에서의 선분탐색(line search), $x^{k+1}=x^k+\beta^k d^k$ 에서 탐색방향벡터 d^k를 결정하는 방법에 따라 크게 descent methods, Newton's methods, quasi-Newton methods, conjugate direction methods의 네 부류로 나뉘게 된다. 이들 중 제일 단순한 방법은 steepest descent method 로서 d^k를 최대화 문제에서는 $f(x)$, 최소화 문제에서는 $-\nabla f(x)$로 하는 방법이다. 더 자세한 설명과 다른 방법들에 대해서는 참고문헌에 잘 나와있다.

2.3.2 제약조건이 있는(constrained) 경우의 최적화

제약조건이 있는 경우의 최적화 문제에서는 가능해영역이 유한한 공간에 국한된다. 따라서 제약조건이 없는 경우의 최적조건이 제약조건이 있는 경우에도 항상 적용이 되지는 않는다. 다시말해서 제약조건이 있는 최적화 문제의 최적해는 (2.2)식의 gradient vector가 0이 아닌 가능해 영역의 경계나 꼭지점에서 발생할 수도 있는 것이다. 이에 따라 제약조건이 있는 비선형문제의 최적조건이 따로 개발되었는데 그것이 바로 KKT조건(Karush-Kuhn-Tucker conditions)이다. 이 KKT조건들은 제약조건이 있는 어떠한 선형이나 비선형계획법 문제에서 국지 또는 전체최적해가 되기 위해서는 꼭 만족이 되어야 한다.

모든 제약조건식이 선형이고 목적함수만 비선형인 문제를 linearly constrained optimization 이라고 하며, 비선형 목적함수를 고려하기 위해 단체법을 연장하는 방법들이 개발되었다. 이들중 하나가 quadratic programming이며 목적함수가 어떤 변수의 자승 또는 다른 변수와의 곱과 같이 2차 함수로 주어지는 특별한 경우에 해당된다.

Convex programming 이란 모든 제약조건식이 convex이고 목적함수는 최대화 문제에서는 concave, 최소화문제에는 convex인 최적화문제에 해당된다. 이러한 유형의 모든 문제에 적용되는 하나의 표준알고리즘은 없으며 제각기 다른 장단점을 지닌 알고리즘들이 개발되었는데 이들은 다음의 세가지 부류로 나뉜다. 첫째는, gradient algorithms 으로 2.3.1절의 경사 탐색과정을 수정하여 탐색경로가 제약조건식의 경계를 넘어가지 않도록 하는 방법으로서 generalized reduced gradient(GRG)

표 2.1 사용화된 최적화 프로그램 리스트

프로그램	풀이가능
AMPL	LP, NLP, MILP
GAMS	LP
GAMS/MINOS	LP, NLP
GAMS/OSL	LP, MILP
GAMS/DICOPT	LP, NLP, MILP, MINLP
LONDO	LP, QP, MILP
GRG2	NLP
GINO	NLP
LINGO	LP, NLP
MINOS	LP, NLP
OSL	LP, QP, MILP
CPLEX	LP, MILP

LP: Linear Programming
QP: Quadratic Programming
NLP: Nonlinear Programming
MILP: Mixed-Integer Linear Programming
MINLP: Mixed-Integer Nonlinear Programming

method가 가장 대표적이다. 둘째로는, sequential unconstrained algorithms로서 penalty function method 와 barrier function method가 있다. 이 방법들은 제약조건을 목적함수에 포함시킴으로써 unconstrained 문제를 연속적으로 푸는 것으로 제약조건을 어기는 변수값에 대해서 목적함수에 벌점을 주는 방법이다. 셋째 부류는 sequential-approximation algorithms으로서 이에는 선형근사법(linear approximation)과 2차함수 근사(quadratic approximation)법이 있다. 이 방법들은 비선형 목적함수를 연속적인 linear(또는 quadratic) approximation으로 대체하는 것이다. 만약 제약조건식들이 전부 선형일 경우는 선형계획법이나 quadratic programming을 반복적으로 푸는 것일 것이다. 이 두가지 중 전자의 대표적인 방법이 Frank-Wolfe algorithm 이다.

위에서 소개된 convex programming의 방법들은 전체최적해를 목표로 하는 방법들이지만 불행히도 실무에서 대하게 되는 비선형계획법 문제에서는 제약조건식과 목적함수의convexity에 관한 convex programming의 가정이 잘 적용되지않는 경우가 많다. 이러한 nonconvex programming을 위한 방법은 시작점을 계속 바꾸어서 여러번 convex programming을 시도한 뒤, 얻어진 여러 국지최적해중 제일 나은 것을 채택하는 것이다. SUMT(sequential unconstrained minimization technique)는 이런 방법중의 하나이다.

맺음말

이상에서 수자원시스템공학의 유래와 최적화기법의 간단한 소개를 마쳤다. 지면이 부족한 관계로 최적화이론에 대한 설명으로 미흡한 점이 많으나, 최적화 기법이란 무엇이며 대표적인 알고리즘에는 어떤 것들이 있는지 소개하는데 역점을 두었음을 밝힌다. 각 알고리즘의 기본이론과 상세한 서술을 위해서는 참고문헌을 활용하기를 적극 권장하는 바이다. 다음호부터는 이러한 최적화기법들이 수자원공학분야에는 어떻게 적용이 될 수 있는 지 살펴보기로 한다.

참 고 문 헌

Brooke, A., Kendrick, D., and Meerhaus, A. (1988). *GAMS: A User's Guide.* boyd & fraser, Danvers, M.A.

Cunningham, K. and Schrage, L. (1989). *The LINGO Modeling Language.* Lindo Systems, Chicago, I.L.

Dantzig, G.B. (1963). *Linear Programming and Extensions.* Princetion University Press, Princetion, N.T.

Edgar, T.F. and Himmelblau, D.M. (1988). *Optimization of Chemical Process.* McGraw-Hill, New York, N.Y.

Fourer, R., Gay, D.M., and Kernighan, B.W. (1993). *AMPL A Modeling Language for Mathematical Programming.* The Scientific Press, San Francisco, C.A.

Hillier, F.S., and Lieberman, G.J. (1990). *Introduction to Operations Research.* 5th ed., McGraw-Hill, New York, N.Y.

IBM (1990). *Optimization Subroutine Library Guide and Reference.* IBM Corp., New York, N.Y.

Lasdon, L. S., Waren, A.D., Jain, A., and

Ratner, M. (1978). "Design and Testing of a Generalized Reduced Gradient Code for Nonlinear Programming." *Design and Implementation of Optimization Software*, *H.J.* Greenberg ed., Sijthoff and Noordhoff, pp. 363–397.

Liebman, J.S., Lasdon, L.S., Schrage, L., and Waren, A. (1986). *Modeling and Optimization with GINO*. The Scientific Press, Palo Alto, C.A.

Luenberger, D.G. (1984). *Introduction to Linear and Nonlinear Programming*. Addison–Wesley, Reading, M.A.

Mays, L.W. and Tung, Y.K. (1992). *Hydrosystems Engineering and Management*. McGraw–Hill, New York, N.Y.

Murtagh, B.A. and Saunders, M.A. (1987). *MINOS 5.1 User's Guide*. Report SOL 83–20R, Stanford University, Stanford, C.A.

Schrage, L. (1987). *User's Manual for Linear, Integer, and Quadratic Programming with LINDO*. The Scientific Press, San Francisco, C.A.

Taha, A.T. (1987). *Operations Research: An Introduction*. 4th ed., Macmillan, New York, N.Y.