

〈論 文〉

# 성형공정의 자유 경계면 접촉에 관한 유한요소 해석

한영원\* · 임용택\*

## Finite Element Analysis of Forming Processes With Free Surface Contact Algorithm

Young-Won Hahn and Yong-Taek Im

### Abstract

In this study, a contact algorithm for the finite element analysis of free surface contact problem in materials forming is presented. The proposed contact algorithm consists of two parts. The first is the contact searching part, and the second, the constraint part. The contact searching algorithm does not require any a priori knowledge of the pairs of contact nodes or segments and the impenetrability constraint is satisfied using the penalty function scheme. Void closure in open-die forging was simulated to verify the accuracy and capability of the currently developed contact algorithm. The simulation results, obtained from ABAQUS simulation, were compared well to the experimental data available in the literature.

**Key Words :** Contact Algorithm (접촉알고리즘), Impenetrability Constraint (불침투 조건), Void Closure (가공폐쇄)

### 1. 서 론

금속성형공정에서 다이와 소재간의 접촉은 필연적이고 소재의 유동양상에 따라서 소재끼리의 자유 경계면 접촉이 이루어질 수도 있다. 이와같은 접촉문제는 해석의 필요성과 복잡성으로 지금까지 많은 연구의 대상이 되어왔다. 특히 최근에는 컴퓨터 하

드웨어의 발전에 따라 유한요소법 (finite element method)을 이용한 금형과 변형체인 소재 사이의 접촉, 변형체인 물체 사이의 접촉 등에 대한 연구가 진행되어 왔다. 그러나 이러한 접촉문제 중 문제의 복잡성으로 인해 자유 경계면에서 발생하는 접촉문제에 대한 연구는 아직도 미약한 편이다.

접촉문제에 관한 연구는 Hertz<sup>(1)</sup>에 의한 탄성접촉문제 해석으로 시작되었다. Hertz는 해석적으로 변위를 구할 수 있는 단순한 형상의 물체에 대하여 접촉압력의 분포를

\*한국과학기술원 기계공학과

가정하여 접촉영역과 접촉압력을 구하였다. Bath 등<sup>(2~4)</sup>은 라그랑지언 방법 (Lagrange multiplier method)을 사용해 접촉문제를 해석하였고, Chandrasekaran 등<sup>(5)</sup>은 접촉하는 절점 (node)과 세그먼트 (segment)를 기하학적으로 구속시켜 불침투 조건을 만족시켰다. 또한, Zhong 등<sup>(6~8)</sup>은 접촉탐색방법에 대해 연구를 하고, 이를 토대로 적용 사례 및 전반적인 접촉문제에 관하여 고찰하였다.

본 연구에서는 성형공정에서 수반되는 자유 경계면 접촉문제에 관한 유한요소 해석 알고리즘을 개발하였다. 개발된 알고리즘은 크게 접촉이 일어나는 부분을 탐색하는 알고리즘과 접촉 후에 접촉된 절점들을 구속시키는 알고리즘의 두 단계로 나뉘어진다. 본 연구에서 접촉을 탐색하는 부분은 단면 알고리즘을 사용하였고, 접촉 구속은 벌칙 방법을 사용하여 불침투조건을 만족시켰다. 개발된 알고리즘의 검증은 위해 내부에 기공을 가지는 플라스틱인 (plasticine) 소재의 압축공정 해석 결과를 상용유한요소 해석프로그램인 ABAQUS를 이용한 해석 결과 및 문헌에 나와있는 실험치와 비교하였다.

## 2. 유한요소 수식화

본 연구에서는 강소성 유한요소 수식화를 사용하였다. 이에 대한 수식화는 이미 일반화되어<sup>(9,10)</sup> 있으므로 여기에서는 간략하게 소개하였다.

평형 방정식과 경계조건의 약형 (weak form)에 비압축조건을 벌칙상수인  $k$ 를 도입하여 정리하면 다음과 같다.

$$\int_V \sigma_{ij} \delta \dot{\epsilon}_{ij} dV - \int_{S_r} \bar{t}_i \delta v_i dS + \int_V k \dot{\epsilon}_{kk} \delta \dot{\epsilon}_{mm} dV = 0, \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} v_i &= \bar{v}_i \quad \text{on } S_U \\ \sigma_{ij} n_j &= \bar{t}_i \quad \text{on } S_F \end{aligned} \right\} S_U \cup S_F = S_{Total}. \quad (2)$$

여기서,  $\sigma_{ij}$ 는 응력,  $\dot{\epsilon}_{ij}$ 는 변형률 속도,  $\bar{t}_i$ 는 마찰력을 포함한 경계하중,  $\dot{\epsilon}_{kk}$ 는 체적변형률속도,  $v_i$ 는 절점속도,  $n_j$ 는 수직방향벡터, 그리고  $V$ 는 해석에 고려되는 소재의 체적이다. 그리고 위의 식을 유한요소 이산화과정 (discretization)을 거치면 절점속도가 미지수인 비선형 방정식이 되므로, 직접 반복법과 Newton-Raphson 반복법을 사용하여 해를 구한다.

한편, 마찰력은 전단마찰계수 (shear friction factor)  $m_f$ 를 사용하여 다음과 같이 수식화한다<sup>(9,10)</sup>.

$$\mathbf{F} = -m_f k_f \left( \frac{2}{\pi} \tan^{-1} \left( \frac{|\mathbf{v}_r|}{\mathbf{a}} \right) \right) \frac{\mathbf{v}_r}{|\mathbf{v}_r|}, \quad (3)$$

여기서  $k_f$ 는 전단 항복응력,  $\mathbf{v}_r$ 은 소재와 공구 사이의 상대속도,  $\mathbf{a}$ 는 충분히 작은 상수 ( $10^{-3}$  또는  $10^{-4}$ )이다.

## 3. 접촉 알고리즘

### 3.1 접촉탐색방법

Fig. 1과 같이 시간  $t+dt$ 에서 변형체가 다른 물체의 표면에 접촉되어 있을 때 두 물체 사이의 거리를  $g$ 라 하고, 접촉에 의해서 발생한 수직 접촉힘을  $F_n$ 이라 하면,  $t+dt$ 일 때 접촉 표면에서 수직 방향으로의 접촉조건은 다음 조건을 만족하여야 한다.

$$F_n \cdot g = 0, \quad g \geq 0, \quad F_n \leq 0. \quad (4)$$

이 식들은 접촉하는 두 물체 사이에 작용하는 수직힘과 두 물체 사이의 거리 중 하나는 영이 되어야 한다는 것을 나타내며, 변형체 사이의 요소들 간의 불침투조건을 나타낸다. 또한 접촉면에서 수직힘은 압축력이어야 한다는 것을 의미한다.

경계면에서 요소간의 접촉을 판정하는 방법에 오류가 있을 경우 전체 변형양상에 큰 영향을 미치므로 상당한 신뢰도가 요구되어진다. 현재까지 발표된 연구 논문들을 살펴

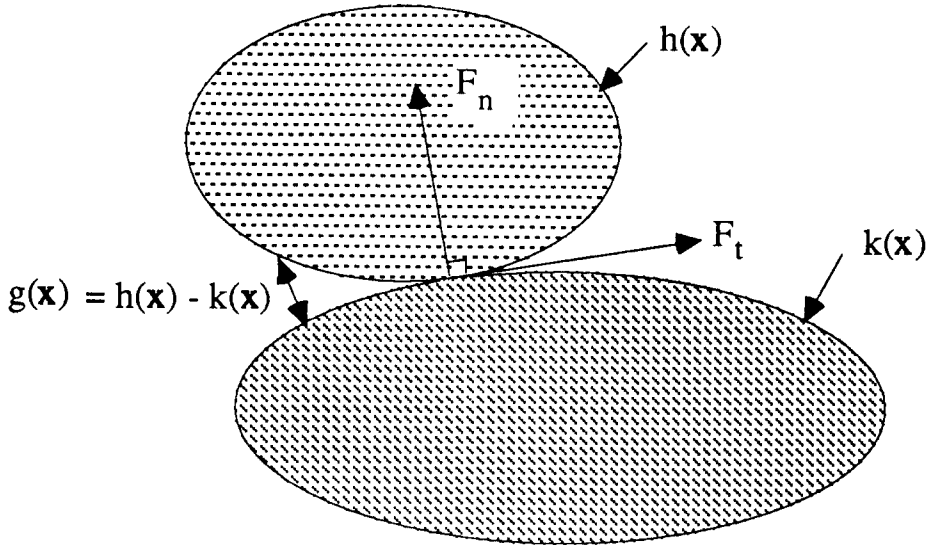
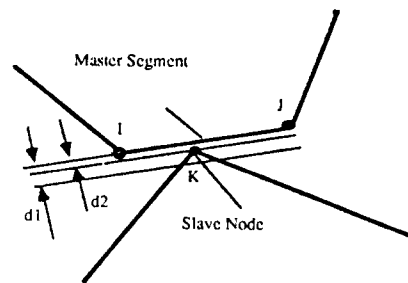


Fig. 1 Schematic diagram for contact condition between the two bodies

보면 접촉이 되어질 부분을 해석 전에 주표면 (master surface)과 종속표면 (slave surface)으로 나누어 종속표면에만 식(4)에 주어진 접촉에 관한 불침투조건을 만족시켜 종속표면이 주표면을 침투하지 않도록 문제를 해결하였다. 이를 접촉경계면의 일회통과 처리방법(one-pass treatment)이라고 부른다. 따라서 이 방법에 의하면 주표면이 종속표면을 침투할 수도 있으므로 주표면이나 종속표면이 상대표면을 서로 침투하지 않도록 동시에 불침투조건을 만족시키는 이회통과처리방법 (two-pass treatment)에 비해 일회통과처리방법은 비효율적이고 부정확한 단점이 있었다. 이를 개선하기 위해 제안된 방법의 하나로 단면 알고리즘(single surface algorithm)이 사용되었는데, 이는 해석 전에 경계면에서의 접촉면을 주표면과 종속표면으로 구분하지 않고 탐색을 할 수 있는 방법이다. 또한, 최근에는 HITA 알고리즘 (hierarchy territory algorithm)이 제안되었다. 이 방법은 접촉하는 물체를 여러 부분—예를 들어, 접촉 절점(contact node), 접촉 세그먼트 (contact

segment), 접촉 면 (contact surface), 접촉 물체 (contact body)—으로 나누어서 각 부분간에 접촉 탐색을 수행하는 방법이다<sup>(11)</sup>.

본 연구에서는 쉽게 프로그램화할 수 있고 신뢰성이 높은 단면 알고리즘을 사용하여 경계면에 있는 각 절점당 세그먼트와의 수직거리를 계산하고, Fig. 2에서 보듯이 주어진 상수값 ( $d1=0.001$ )보다 수직거리가 작으면, 그 부분은 서로 접촉되어 있다



- d1 : 접촉 여부를 판정하는 상수.
- d2 : 주 세그먼트의 종속 절점간의 수직 거리.

$d2 \leq d1$  : 절점 I,J,K는 접촉.

Fig. 2 Slave node and master segment used in contact searching algorithm

고 가정하였다. 단면 알고리즘에 의하면 자유 경계면 상의 절점 (접촉이 일어날 수 있는 절점)들을 해석 전에 주절점과 종속절점으로 구분하지 않고, 경계면 상의 모든 절점들이 종속절점 (slave node)과 주절점 (master node)으로 인식될 수 있다. 즉, 소재의 경계에 있는 임의의 한 절점을 종속절점으로 가정하면, 경계의 나머지 절점들을 주절점으로 하여 접촉탐색을 수행하게 된다. 그리고, 하나의 종속절점에 대하여 접촉탐색이 완료되면 다음 종속절점에 대하여 같은 방법으로 접촉탐색을 수행하였다. Fig. 3에는 본 연구에서 사용된 접촉탐색 알고리즘의 흐름도를 나타냈다.

### 3.2 구속방법

두 물체가 접촉하는 경계면에서 상대 속도가 주어지면, 이 경계면에 작용하는 수직 접촉힘은 다음과 같이 표현된다.

$$F_n = \alpha \times p, \quad (5)$$

여기서,  $\alpha$ 는 벌칙상수 (penalty constant), 그리고  $p$ 는 접촉이 일어나는 접촉면 경계면에서 두 접촉면의 상대속도를 의미한다. 이 수직접촉힘을 이용해 접촉이 일어나는 소재 경계에서의 강점소성유한요소 해석을 위한 불침투조건의 약형을 만들면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \int_r F_n \delta v_i d\Gamma &= \int_r \alpha p \delta v_i d\Gamma \\ &= \int_r \alpha (v_i - v_{ic}) \delta v_i d\Gamma, \quad (6) \end{aligned}$$

여기서,  $v_i$ 는 식(1)에 사용된 절점의 속도이며  $\Gamma$ 는 접촉이 이루어지고 있는 경계를 의미한다. 위의 식은 두 물체가 접촉을 할 때, 접촉하는 부분의 두 물체 사이의 상대속도를 벌칙상수를 이용하여 영으로 구속함으로써 요소간의 침투를 방지하는 것이다.

한편 식(6)을 적분하기 위해서는 Fig. 4

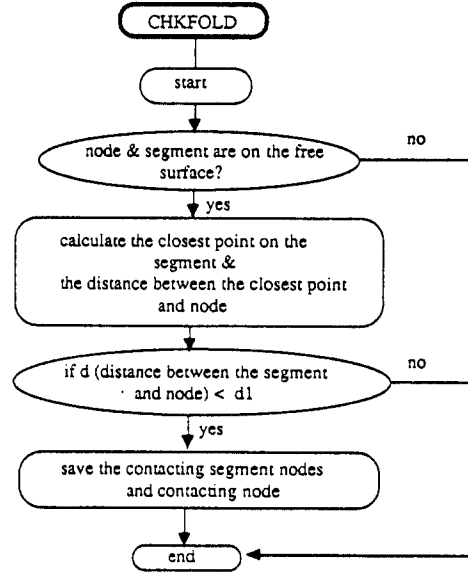


Fig. 3 Flow chart of contact searching algorithm

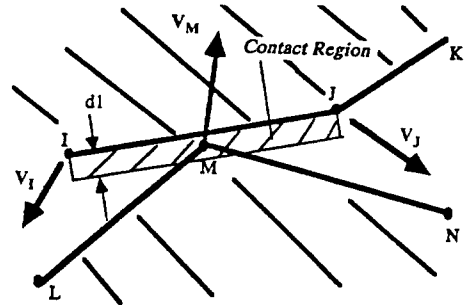


Fig. 4 Configuration of the contact region and determination of global nodal velocities at the contacting region

에서 나타낸 것처럼  $v_{ic} = v_{cx} \vec{i} + v_{cy} \vec{j}$ 를 미리 알아야 하는데 문제를 단순히 하기 위해  $v_{cx} = [((v_{ix} + v_{jx})/2) + v_{mx}]/2$ 와  $v_{cy} = [((v_{iy} + v_{jy})/2) + v_{my}]/2$ 로 가정하여 계산에 사용하였다. 물론 이 방법을 일반적으로 사용하기 위해서는 이에 대한 보다 많은 연구가 이루어져야 할 것이다. 본 연구의 구속방법에 따르면 접촉을 이룬 절점들이 같은 속도로 움직인다고 가정하여서 벌칙상수를 이용하여 절점들의 속도를 구속시키는 방법을 사용하였다. Fig. 4에 나타낸 것과 같이 접촉 전에 여러 방향의 속도를 가지던 절점들

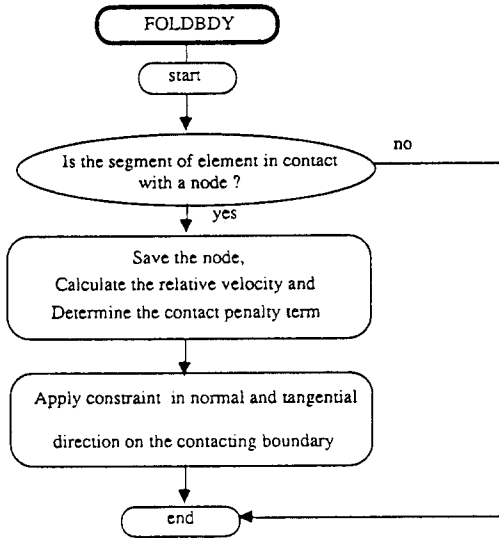


Fig. 5 Flow chart of contact constraint algorithm

이 접촉을 이루면 접촉을 이루는 절점들은 같은 속도  $v_{ic}$ 를 갖게 되며, 이들 경계면에서는 식(6)으로 주어진 불침투조건을 식(1)에 첨가하여서 문제를 해석하였다. 본 해석 방법에 따른 요소간의 불침투조건은 접촉 영역에서의 국부적인 좌표변환을 필요로 하지 않는 장점이 있다. Fig. 5에는 본 불침투조건을 만족시키기 위한 흐름도를 나타내 주었다.

#### 4. 프로그램의 검증

앞에서 소개된 접촉처리 알고리즘을 포함하는 프로그램의 검증을 위하여 원형의 내부 기공을 가지는 실린더 형상 소재의 압축 거동을 해석하였다. 초기의 실린더 바깥 지름은 27.5 mm이고, 기공의 지름은 1.87 mm였다. 상·하부 다이는 모두 평판이며, 상부 다이의 하강속도는 0.0825 mm/sec로 하였고, 하부 다이는 고정시켰다. 소재는 열간가공에서 강과 상사성을 가지는 플라스틱인 (plasticine)을 사용하였다. 해석에 사용된 플라스틱인의 물성치<sup>(12)</sup>는 다음과 같다.

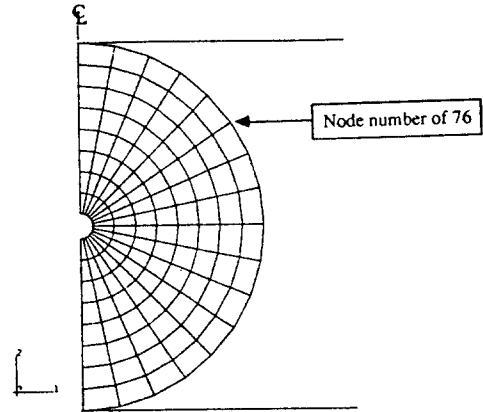
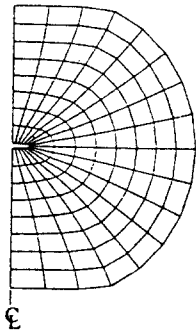


Fig. 6 Initial mesh configuration used for void closure analysis

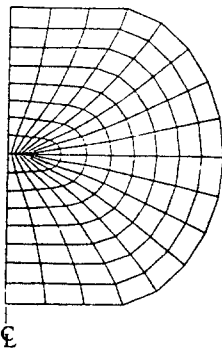
$$\bar{\sigma} = 0.21168 \bar{\epsilon}^{0.23} \epsilon^{0.062} (\text{MPa}), \quad (7)$$

Fig. 6에는 초기의 요소구성상태를 보였으며, 압축이 진행되면서 기공이 폐쇄되는 양상은 Fig. 7에 보였다. Fig. 7로부터 기공의 폐쇄 시, 요소간의 접촉처리가 잘 되고 있음을 알 수 있었다. Fig. 8에는 상용 유한요소해석 프로그램인 ABAQUS를 이용해 동일한 문제를 해석한 결과를 보였다. 두 해석결과를 비교해 볼 때 거의 일치하는 형상을 보이고 있음을 알 수 있었다. 이러한 결과는 Fig. 9에서도 알 수 있었다. Fig. 9에는 소재를 구성하는 절점 중 76번 절점의  $x$ 좌표의 변화를 도표로써 보였다. ABAQUS를 이용한 해석결과와 비교할 때 압축이 진행되면서 다소의 오차가 발생하였으나 전체적으로 서로 유사한  $x$ 좌표의 값을 가지고 있음을 알 수 있었다.

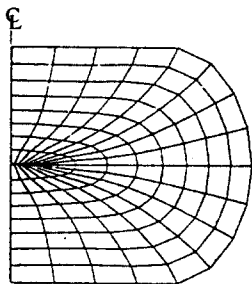
Fig. 10과 Fig. 11에는 개발된 프로그램과 ABAQUS를 이용한 해석결과 중 기공폐쇄상태를 높이감소율이 각각 20%와 50%일 때로 나눠 비교하였다. 높이감소율이 20%일 때의 기공폐쇄형상은 ABAQUS를 이용한 해석결과와 차이를 보였다. 이러한 오차는 두 해석 프로그램에서 사용하는 접촉알고리즘의 차이와 소재의 유동응력식을 프



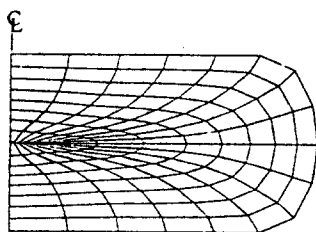
(a) 17.3% reduction



(b) 20% reduction

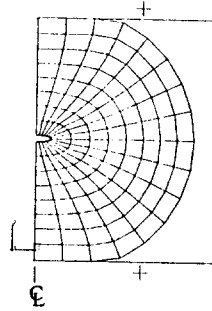


(c) 36% reduction

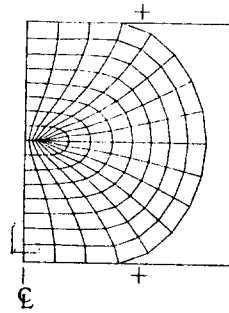


(d) 50% reduction

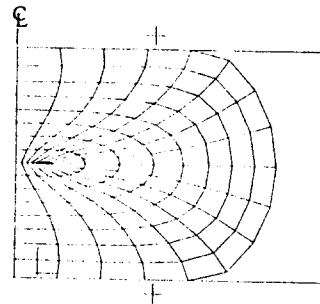
**Fig. 7** The cross-sectional shapes of the cylindrical plasticine bar at four stages of compression obtained from the presently developed contact algorithm



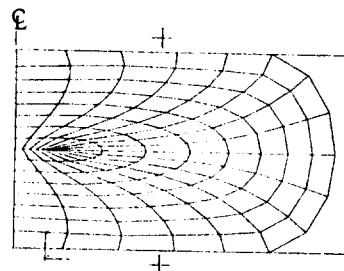
(a) 16.9% reduction



(b) 20% reduction



(c) 39.7% reduction



(d) 50% reduction

**Fig. 8** The cross-sectional shapes of the cylindrical plasticine bar at four stages of compression obtained from ABAQUS

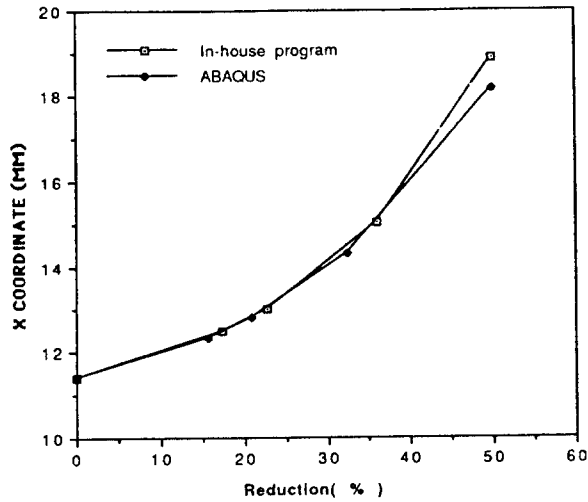


Fig. 9 The current location of node number of 76 in the x-direction (See initial nodal point of 76 in Fig. 3)

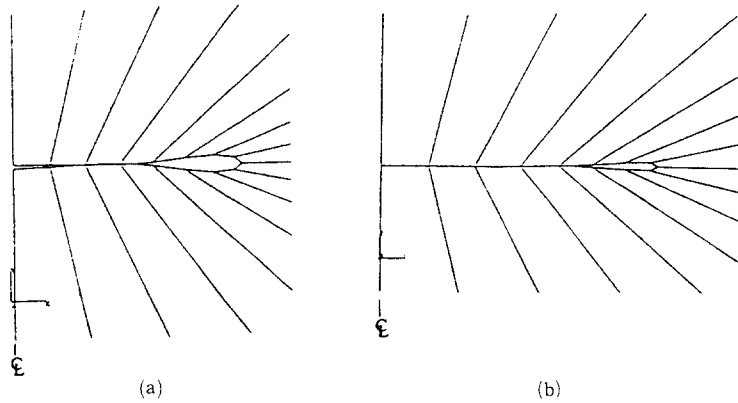


Fig. 10 Comparison of the magnified cross-sectional views of the void at 20% reduction between (a) the program with the presently developed contact algorithm and (b) ABAQUS

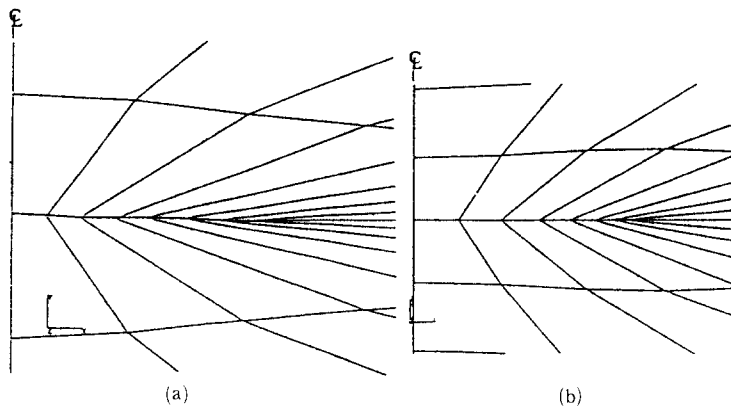


Fig. 11 Comparison of the magnified cross-sectional views of the void at 50% reduction between (a) the program with the presently developed contact algorithm and (b) ABAQUS

성형공정의 자유 경계면 접촉에 관한 유한요소 해석

그림에 입력할 때 프로그램이 요구하는 유동응력식의 입력형식 차이에 의하여 발생한 오차로 생각되어진다. 실제로 ABAQUS에서는 응력과 변형률을 불연속적인 수치 데이터로 받아 프로그램 내에서 내삽 및 외삽을 하여 사용함으로 실제 소재의 유동특성을 정확히 반영하는 데는 어려움이 있었다. 한편, 높이감소율이 50%일 때는 ABAQUS를 이용한 해석결과와 비교할 때 거의 일치하는 기공폐쇄형상을 보였다.

Fig. 12와 Fig. 13에는 각각 20%와 50%

압축시의 유효변형률 분포를 비교한 결과를 보였다. 높이감소율이 20%일 경우에는 최대 변형률 값이 유사하였으나 압축이 계속 진행되어 높이감소율이 50%가 되었을 때는 최대 변형률 값에 오차가 있음을 알 수 있었다. 이러한 결과는 앞서 언급한 식의 입력형식이나 접촉처리 알고리즘의 차이에서 발생하는 오차로 생각되어진다. 그러나, 높이감소율 20%와 50% 모두 기공의 끝부분에서 최대 변형률이 발생함으로써 응력집중 현상이 나타남을 알 수 있었다.

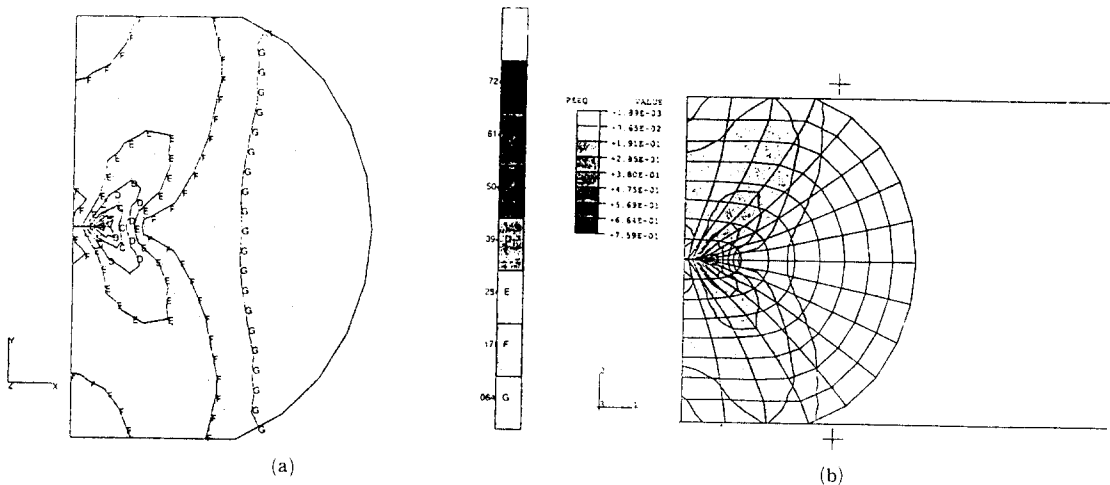


Fig. 12 Comparison of the effective strain distributions at 20% reduction between (a) the program with the presently developed contact algorithm and (b) ABAQUS

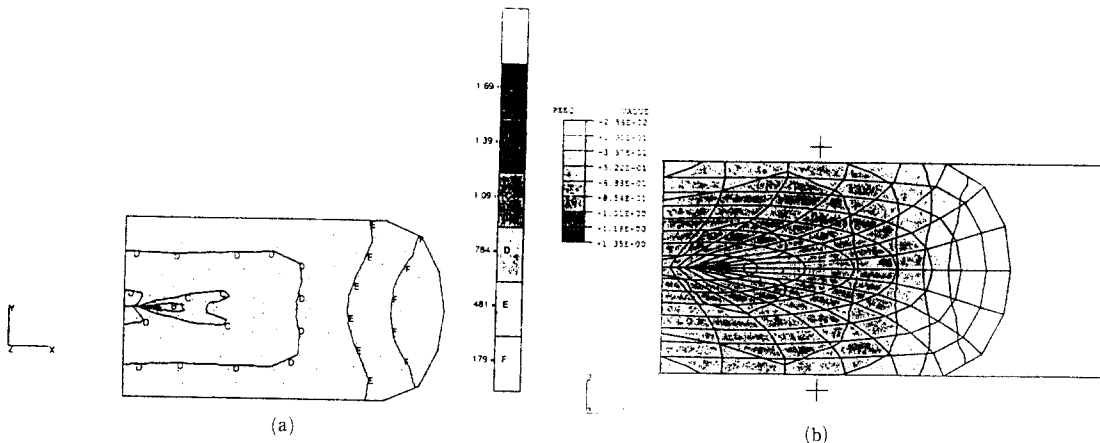


Fig. 13 Comparison of the effective strain distributions at 50% reduction between (a) the program with the presently developed contact algorithm and (b) ABAQUS



Fig. 14에는 기공의 감소율을 나타내었다. 실험<sup>(13)</sup>에서 측정된 값은 높이감소율 20%까지만 보였고, 50% 압축까지는 ABAQUS와 개발된 프로그램에서 얻은 결과를 보였다. 종감소율 (minor reduction)

의 비교로부터 해석과 실험이 모두 일치하고 있음을 알 수 있었다. 높이감소율 20% 이후에 변형률이 -1로 일정하게 유지되는 것은 높이감소율 20%에서 기공이 폐쇄됨을 나타내는 것이다. 이러한 결과는 Fig. 10에

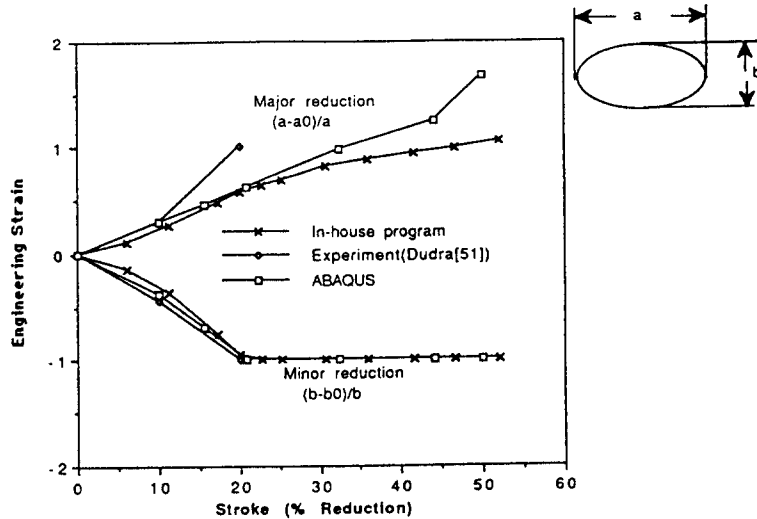


Fig. 14 Comparison of major and minor strain values among experiment from the reference,<sup>(13)</sup> the program with the presently developed contact algorithm, and ABAQUS simulations

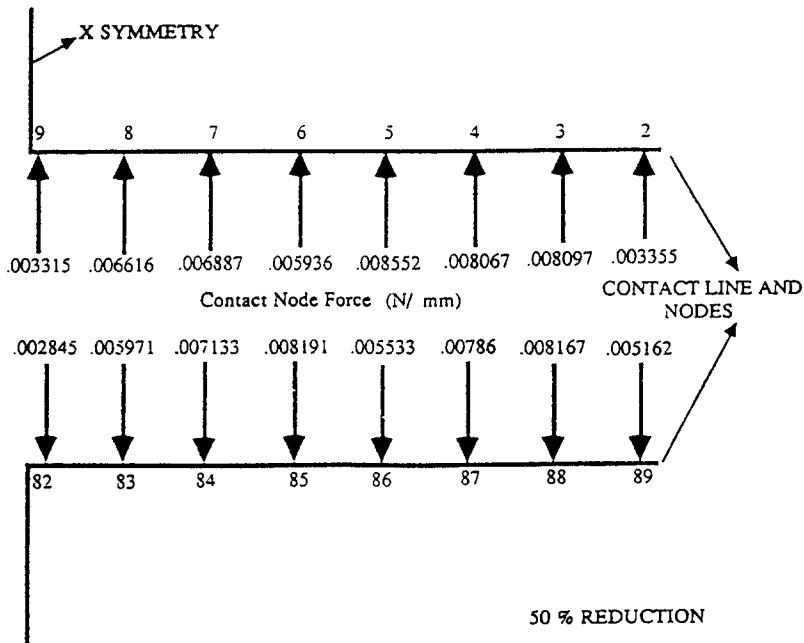
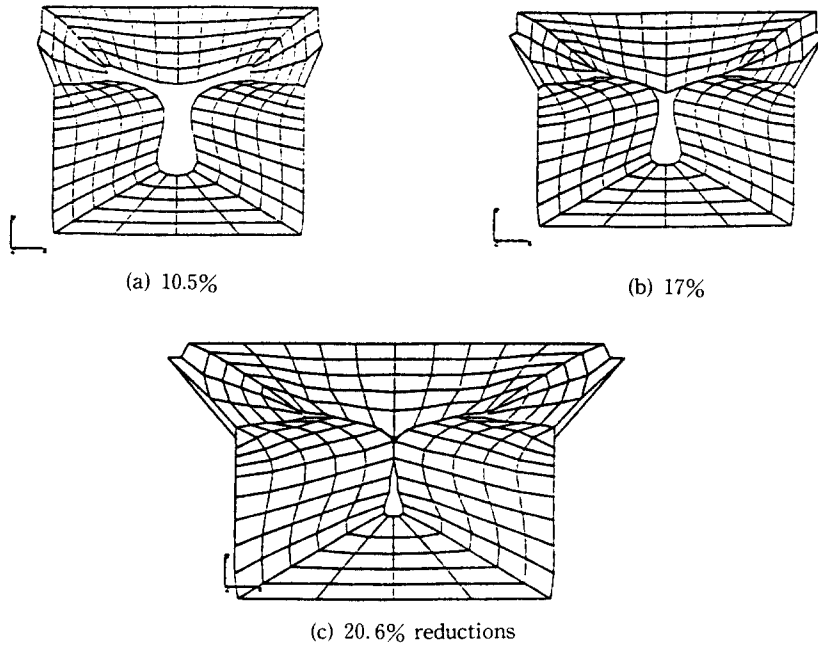


Fig. 15 Reaction forces of nodes at the contact region



**Fig. 16** The deformed shapes of the material at three stages of compression using the proposed contact algorithm

서도 볼 수 있었으며, 주감소율 (major reduction)에 따르면 실험과 해석 결과가 오차를 보이고 있음을 알 수 있었다. 20% 압축까지는 ABAQUS와 개발된 프로그램의 주감소율 결과가 거의 같은 양상을 나타내었지만, 20% 이후로는 ABAQUS를 이용한 해석으로부터 구한 주감소율이 개발된 프로그램에서 얻은 결과보다 좀 더 큰 값을 나타내고 있음을 알 수 있었다.

Fig. 15에는 50% 압축 시, 개발된 프로그램의 해석 결과로서 기공에서 접촉된 절점의 반력을 나타내었다. 전체 접촉면에 대해서 압축력을 가짐으로 접촉면에서 볼침투 조건을 만족시킴을 알 수 있었다.

본 접촉 알고리즘을 이용하여 절점과 세그먼트 사이의 접촉을 해석한 예로 Fig. 16에 T형상의 기공을 갖는 직사각형 봉재의 단조공정을 나타내었다. 이 그림을 보면 압축이 진행됨에 따라 절점과 세그먼트 상의 접촉이 이루어지는 것을 본 알고리즘이 원만하게 해석하는 것을 알 수 있었다.

## 5. 결론

본 연구에서는 경계면에서의 자유 요소간의 상호 침투방지 알고리즘을 개발하였다. 개발된 알고리즘은 접촉탐색부분과 접촉이 이루어진 절점에 구속조건을 부과하는 부분으로 나누어져 있으며, 접촉탐색부분은 간단하고 신뢰도가 높은 단면 알고리즘을 사용하였고, 구속조건을 부과하는 부분은 별첨방법을 사용하였다. 개발된 프로그램의 검증을 위하여 내부기공을 가진 원기둥형상 플라스틱의 압축해석을 수행하였으며 이를 통해 얻은 결론을 정리하면 다음과 같다.

(1) 기공 폐쇄해석에서 얻은 실험 결과와 ABAQUS에 의한 해석 결과를 개발된 접촉 알고리즘을 이용한 해석 결과와 비교함으로써, 개발된 접촉알고리즘의 유용함을 입증하였다. 그러나, 압축비에 따른 비교에서 다소의 오차가 발생하였으며, 이러한 실험

결과와 개발된 접촉알고리즘을 이용한 해석 결과의 차이는 프로그램에 입력하는 불확실한 소재의 유동 응력식에 의한 오차로 생각되어졌고, 개발된 프로그램의 해석 결과와 ABAQUS에 의한 해석 결과의 오차는 접촉 알고리즘의 차이에 의한 오차로 생각되어졌다.

(2) 공정해석 결과에서 개발된 알고리즘은 접촉이 일어나는 부분을 효과적으로 탐색하였고, 소재의 자유 경계면에서 접촉에 의한 만족스러운 소재의 변형형상을 해석해 주었다.

### 후 기

본 연구는 Cray슈퍼컴퓨터사에서 제공한 연구비로 연구가 진행되었으며, 본 연구에 많은 도움을 주신 서강대학교의 김낙수 교수님께 감사를 드립니다.

### 참고문헌

- (1) Johnson, K. L., 1985, "Contact Mechanics," Cambridge University Press.
- (2) Bathe, K. J. and Chaudhary, A., 1985, "A Solution Method for Planar and Axisymmetric Contact Problems," Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 21, pp. 65~88.
- (3) Chaudhary, A. B. and Bathe, K. J., 1986, "A Solution Method for Static and Dynamic Analysis of Three-Dimensional Contact Problems with Friction," Computers & Structures, Vol. 24, No. 6, pp. 855~873.
- (4) Eterovic, A. L. and Bathe, K. J., 1991, "On the Treatment of Inequality Constraints Arising from Contact Conditions in Finite Element Analysis," Computers & Structures, Vol. 40, No. 2, pp. 203~209.
- (5) Chandrasekaran, N., Haisler, W. E., and Goforth, R. E., 1987, "A Finite Element Solution Method for Contact Problems with Friction," Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 24, pp. 477~495.
- (6) Zhong, Z. H. and Nilsson, L., 1989, "A Contact Searching Algorithm for General Contact Problems," Computers & Structures, Vol. 33, No. 1, pp. 197~209.
- (7) Zhong, Z. H. and Nilsson, L., 1994, "Automatic Contact Searching Algorithm for Dynamic Finite Element Analysis," Computers & Structures, Vol. 52, No. 2, pp. 187~197.
- (8) Zhong, Z. H., 1993, "Finite Element Procedures for Contact-Impact Problems," Oxford University Press.
- (9) Kobayashi, S., Oh, S. I., and Altan, T., 1989, "Metal Forming and the Finite Element Method," Oxford University Press.
- (10) 김현영, 김중재, 김낙수, 1993, "단조 하중 감소를 위한 열간 형단조공정 해석," 대한기계학회논문집, 제17권, 제12호, pp. 2970~2980.
- (11) Zhong, Z. H. and Nilsson, L., 1992, "A Static Contact Problems—A Review," Engineering Computations, Vol. 9, pp. 3~37.
- (12) 이근안, 임용택, 이종수, 홍성석, 1992, "모델링재료를 이용한 축대칭형 돔형상의 폐쇄단조 성형연구(Ⅰ)," 대한기계학회논문집, 제16권, 제11호, pp. 2082~2089.
- (13) Dudra, S. P., 1988, "Analysis of Metal Flow in Massive Hot Open-Die Forging," M. S. Thesis, The Ohio State University, pp. 52~55.