

Fourier 변환을 이용한 불균일 굴절률 Rugate 필터의 설계*

조현주 · 이종오 · 황보창권

인하대학교 이과대학 물리학과

(1995년 5월 8일 받음)

Fourier 변환을 이용하여 불균일 굴절률 박막의 rugate 필터를 설계하였으며, rugate 필터의 반사율, 대역폭, 광학 두께, Q 함수 등을 변화시키며, Fourier 변환의 여러 가지 특성을 조사하였다. 주어진 단선 및 이중 rugate 필터의 과녁 스펙트럼에 불균일 굴절률 박막의 스펙트럼을 맞추기 위하여 merit 함수를 사용하였으며, merit 값이 최소가 되도록 Q 함수를 반복계산하여 수정하였다. Sossi, Bovard, Fabricius가 각각 유도한 세 종류의 Q 함수를 반복계산 횟수, merit 함수의 값, 최적 광학두께 등의 관점에서 비교하였다. 반사율이 높은 rugate 필터 설계에는 반복계산 수정 후 반사율이 과녁스펙트럼에 가까운 Bovard와 Fabricius의 Q 함수가 적당하며, 광학두께는 최소 광학두께만 넘으면 반복계산 수정과정을 이용하여 과녁반사율을 맞출 수 있으므로 반사대역폭이 허용하는 광학두께로 결정하면 될 것이다.

I. 서 론

그림 1에서와 같이 기존의 다층 광학박막이 고굴절률과 저굴절률의 균일(homogeneous) 박막을 교대로 불연속적으로 반복하여 광학적 특성을 얻고 있는 반면에, 불균일(inhomogeneous) 광학박막에서는 굴절률을 박막의 두께가 증가함에 따라 연속적으로 변화시켜 여러가지 새로운 광학적 특성을 나타낼 수 있다.^[1]

불균일 박막은 굴절률이 연속적으로 변하므로 박막이 한 층이고, 불연속 층에서 나타나는 계면이 없으므로 광학적 및 기계적 특성을 감소시키는 결함을 줄일 수 있어 고품위의 광학박막을 증착할 수 있다. 또한 기존의 두 개 혹은 세 물질을 반복하여 설계하는 불연속층 설계 방법에 비해, 설계 시간이 빠르며 두께, 층, 물질 등에 대한 제한이 없어 설계 방법의 다양성을 증가시킬 뿐만 아니라 설계 범위를 넓혀주고 있다. 불균일 광학박막으로는 고반사율 거울, 무반사 코팅, 대역 투과필터, 무편광 광속분리기 등의 기존의 불연속층 설계 방법으로 할 수 있는 코팅 뿐만 아니라 반사영역이 좁고 고차 반사가 없는 rugate 필터 등을 설계할 수 있다. 특히 반사율 혹은 투과율로부터 Fourier 변환법을 이용하여 관심이 있는 영역에서 직접 굴절률 분포를 계산하므로, 임의의 형태로

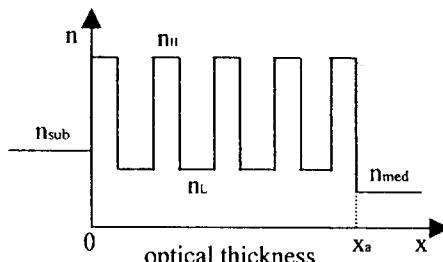
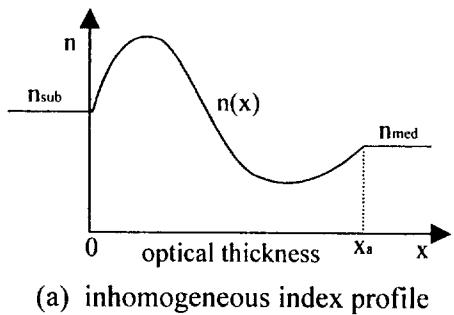


그림 1. 불균일 굴절률 박막과 균일 굴절률 박막의 굴절률 분포 (a) 불균일 굴절률 박막 (b) 균일 굴절률 박막.

*이 연구는 1995년도 교육부 기초과학육성연구비와 1995년도 인하대학교 교내연구비 지원에 의해 수행된 과제임.

주어진 스펙트럼에 맞는 굴절률 분포를 설계할 수 있으며, 주어진 스펙트럼으로부터 광학박막을 설계하고 증착까지 완료하는 자동증착기에 사용될 수 있다.

Sossi^[2]가 Fourier 변환을 이용하여 불균일 굴절률 박막의 근사 설계법을 발표한 후, Dobrowolski와 Verly 등^[3-5]은 반복계산법(iteration method)을 이용하여 주어진 스펙트럼에 맞는 굴절률 분포를 얻을 수 있는 방법으로 발전시켰다. 또한 Fourier 변환을 이용하여 불균일 굴절률 박막을 계산하는 방법이 다중반사를 무시한 근사식이므로 이를 보완하기 위하여 주어진 스펙트럼(투과율 혹은 반사율)의 함수인 Q함수를 다양하게 유도되었다. Bovard^[6-8]는 기존의 고굴절률과 저굴절률 다층박막의 반사율로부터 Q함수를 유도하고 왜곡파수를 Fourier 변환시켜 주어진 반사율에 보다 균질하게 설계할 수 있게 하였다. 특히 Fourier 변환의 선형성을 이용하여 단선(single line) 및 다선(multiline) rugate 필터, 무반사 코팅, 대역 필터 등을 설계할 수 있으며, 이는 불균일과 균일 박막을 모두 포함할 수 있는 방법으로 발전하여 무편광 광속분리기, 대역투과필터 등을 설계하게 되었다.^[9] Fabricius^[10,11]는 근사식인 Fourier 변환법을 보완하기 위하여 Q함수의 진폭과 위상을 새로이 정의하여 반복계산법을 개선하였으며, 불균일 굴절률 박막을 flip-flop 방법을 사용하여 분산을 고려한 불연속인 두 물질로 바꾸어 기존의 증착 방법으로 불균일 굴절률 박막의 실제 제작이 가능하도록 하였다.^[12]

본 연구에서는 Fourier 변환 방법을 이용한 불균일 박막의 설계와 제작에 관한 첫 단계의 연구로 불균일 박막을 설계하는 프로그램을 작성하였으며, 불균일 박막 설계시 반사율, 반사영역, 광학두께 등이 굴절률분포와 스펙트럼에 미치는 여러가지 특성을 조사하였다. 주어진 스펙트럼에 맞는 rugate 필터를 설계하기 위하여 Q함수를 반복계산하여 수정하였으며, 과녁 스펙트럼과 계산 스펙트럼의 차이인 merit 함수를 사용하여 Sossi, Bovard, Fabricius가 각각 유도한 세 종류의 Q함수를 비교하였다.

II. 기본 이론

1. Fourier 변환 방법

흡수가 없는 유전체 불균일 박막에 빛이 수직으로 입사할 경우 투과율 혹은 반사율의 함수로 정의된 Q함수는 $r(x)$ 와 다음과 같은 Fourier 변환 관계를 갖는다.^[2,7]

$$Q(k)e^{i\Phi(k)} = \int_{-\infty}^{+\infty} r(x)e^{ikx} dx \quad (1)$$

여기서 $Q(k)$ 는 투과율 혹은 반사율에 의해 정의된 스펙트럼이며, $\Phi(k)$ 는 $Q(k)$ 함수의 위상, k 는 $k=2\pi/\lambda$ 로 파장이 λ 인 파동의 파수이다. $r(x)$ 는 굴절률 함수인 $n(x)$ 와

미분함수인 $n'(x)$ 에 의해

$$r(x) = \frac{1}{2} \frac{n'(x)}{n(x)} \quad (2)$$

과 같이 정의된다. $r(x)$ 는 굴절률이 각각 n_a , n_b 인 균일 매질의 경계면에서 Fresnel 반사계수가 $r=(n_a-n_b)/(n_a+n_b)$ 인 것과 같이, 불균일 굴절률 박막 $n(x)$ 의 위치 x 에서의 Fresnel 반사 계수이다. x 는 중심이 원점에 있는 $[2\times \text{광학두께}(\text{optical thickness})]$ 이며 물리두께(physical thickness)가 z 일 경우

$$x = 2 \int_0^z n(u) du \quad (3)$$

로 정의된다.

식 (1)을 역Fourier 변환하여 $r(x)$ 를 계산하고, 식 (2)를 이용하여 $r(x)$ 를 x 에 대해 적분하여, 상수항을 n_0 로 정의하면

$$n(x) = n_0 \exp \left[\frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Q(k)}{k} e^{i[\Phi(k)-kx]} dk \right] \quad (4)$$

가 된다. 여기서 n_0 는 굴절률이 실제 증착이 가능한 적당한 범위 내에 존재하도록 조절할 수 있다. 굴절률 함수 $n(x)$ 는 실수이어야 하므로, $Q(k)$ 와 $\Phi(k)$ 는 각각

$$\begin{aligned} Q(k) &= Q(-k) \\ \Phi(k) &= -\Phi(-k) \end{aligned} \quad (5)$$

의 특성을 만족해야 하며, 이 조건을 이용하여 식 (4)를 정리하면

$$n(x) = n_0 \exp \left[\frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{Q(k)}{k} \sin[kx - \Phi(k)] dx \right] \quad (6)$$

로 표현된다. 즉 식 (6)에서 주어진 파수 혹은 파장 구간에서 투과율 혹은 반사율의 함수로 표현된 Q함수를 적분하면 불균일 박막의 굴절률 분포를 구할 수 있다. 식 (6)에서 박막의 두께는 무한대이나 실제 증착할 박막의 총 광학두께는 x_a 로 유한하므로, 실제 적분에서는

$$x = 2y - x_a \quad (7)$$

로 치환한 y 를 사용하였다. 이때 y 는 물리두께가 z 일 때

$$y = \int_0^z n(u) du \quad (8)$$

가 되며 0부터 x_a 까지 변한다. 즉 식 (6)은

$$n(y) = n_0 \exp \left[\frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{Q(k)}{k} \sin[k(2y - x_a) - \Phi(k)] dx \right] \quad (9)$$

로 표현할 수 있으며, 실제 전산 계산에서는 편리한 식 (9)를 사용하였다.

2. Q 함수

식 (10)이 근사식이므로 Q함수의 정의는 주어진 스펙트럼에 가장 잘 맞는 함수가 되어야 한다. Q함수는 투과율(T)과 반사율(R)의 함수이며, 현재까지 정의된 여러 Q함수 중 rugate 필터의 설계에 사용되고 있는 다음의 세 Q함수를 서로 비교하고자 한다.

$$Q_1(k) = \sqrt{\frac{1}{2} \left[\frac{1}{T(k)} - T(k) \right]} \quad (10)$$

$$Q_2(k) = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sqrt{R(k)}}{1 - \sqrt{R(k)}} \quad (11)$$

$$Q_3(k) = \frac{Q_2}{\frac{Q_2}{\pi} + \sqrt{1 + \left(\frac{Q_2}{\pi} \right)^2}} \quad (12)$$

식 (10)은 Sossi가 반사율이 작을 경우 박막 내에서의 다중반사를 무시하여 처음 유도한 Q함수이며, 이 함수의 변형된 형태도 많이 사용되고 있다.^[2-5] 식 (11)은 Bovard가 고굴절률과 저굴절률의 균일 다층박막을 Fourier 변환하여 Q함수를 얻고 이를 최대 반사율과 비교하여 유도한 식이다.^[6-8] 식 (12)는 Fabricius가 rugate 필터의 반사대역폭을 다시 계산하여 유도한 Q함수다.^[10-12]

Q 함수의 위상을 나타내는 $\Phi(k)$ 는 주어진 스펙트럼으로부터 결정되지 않으므로 임의의 함수이며, 식 (9)에서와 같이 $\Phi(k)$ 는 굴절률 함수에 영향을 주는 중요한 인자 중의 하나이다. 예를 들면 위상을 변화시켜 굴절률의 변화폭을 감소시키거나 굴절률을 분산시켜, 반사율의 조정, 반사대역폭의 축소 혹은 광학두께의 감소에 사용하기도 한다. Verly와 Dobrowolski^[3,5]는 Q 함수의 위상을 일관적으로 여러 종류의 함수로 변화시키거나 반사진폭계수와 투파진폭계수의 비를 이용하였으며, Fabricius^[10-12]는 경험적으로 사인 함수에 가까운 Q 위상 함수를 사용하고 있다. 본 연구에서도 rugate 필터의 위상함수 $\Phi(k)$ 가 주어진 과녁스펙트럼으로부터 결정되지 않으므로 $\Phi(k)=0$ 으로 하였다.

III. 불균일 굴절률 박막 설계 프로그램

1. 프로그램의 흐름도

불균일 박막의 굴절률 계산 프로그램의 흐름도는 그림 2와 같다. 입력은 과녁(target) 스펙트럼으로 주어진 광장

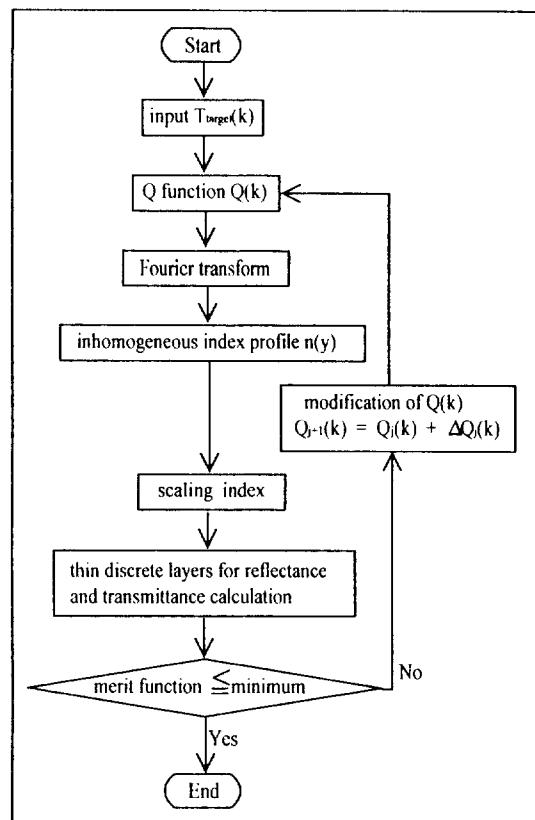


그림 2. 불균일 굴절률 박막 설계 프로그램의 흐름도.

혹은 파수 영역에서의 투과율 혹은 반사율과 박막의 광학두께이다. 적분은 사다리꼴 공식을 사용하였으며 적분구간은 16385개로 나누었다. 식 (9)에서 $n_0=1.0$ 일 때 굴절률 함수 $n(y)$ 를 계산하면 평균 굴절률이 1.0 근처에서 변하므로, 이를 증착 가능한 물질의 굴절률 범위로 바꾸기 위해 상수를 곱하여 굴절률을 증가시켜 준다. 굴절률 증가에 사용하는 상수는 cryolite과 ZnS의 굴절률을 이용하여 $\sqrt{1.35 \times 2.35 / n_{min} n_{max}}$ 로 정의하였으며, n_{min} , n_{max} 는 각각 굴절률의 최소 및 최대치이다.^[3] 불균일 굴절률의 투과율 혹은 반사율은 연속 굴절률 분포를 501개의 얇은 광학두께의 층으로 나누어 기존의 광학박막 계산 방법인 행렬식을 이용하여 계산한다. 입사광과 기판은 불균일 박막의 평균굴절률과 일치시켰다. 광학두께를 3000 nm부터 18000 nm까지 변화시켰으므로 균일층의 광학두께는 6 nm에서 36 nm까지이다. 얇은 층 수를 증가시켜도 스펙트럼의 변화가 없도록 균일층의 수는 충분히 증가시켰다. 불균일 굴절률 분포로부터 계산한 스펙트럼이 주어진 과녁 스펙트럼과 일

치하는 정도를 측정하기 위하여 merit 함수를 이용하였다. Merit 함수(MF)는 굴절률을 분포로부터 계산한 투과율과 과녁 투과율의 차이로부터 계산하며, MF는

$$MF = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [T_{target}(k_i) - T_{cal}(k_i)]^2} \quad (14)$$

로 정의하였다. 여기서 $T_{target}(k_i)$ 는 주어진 과녁 투과율이고 $T_{cal}(k_i)$ 는 Q함수를 Fourier 변환하여 얻은 $n(y)$ 로부터 박막의 행렬식을 이용하여 계산한 투과율이며, N 은 스펙트럼 파수의 갯수이다. MF의 값이 최소가 될 때까지 Q함수를 수정하여 다시 $n(y)$ 를 계산하는 반복계산 과정을 거치게 된다.

2. Q 함수의 반복계산 과정

설계하고자 하는 과녁 스펙트럼, Q함수와 식 (9)를 이용하여 굴절률 $n(y)$ 를 계산하고, 이를 두께가 매우 얇은 불연속층으로 나누고 행렬식을 이용하여 다층박막의 투과율 혹은 반사율을 계산하면 과녁 스펙트럼과 차이가 나는 것을 알 수 있다. 이는 식 (1)이 주어진 스펙트럼으로부터 굴절률을 계산하는 근사식이기 때문이다. 이 차이를 줄이기 위한 한 방법으로 과녁스펙트럼을 얻을 때까지 Q함수를 아래와 같이 반복 계산하여 수정 변화시키는 방법이 사용되고 있다.^[2,3] 즉

$$Q_{j+1}[T_{j+1}(k)] = Q_j[T_j(k)] + \Delta Q_j(k), \quad (j=1, 2, 3, \dots) \quad (15)$$

여기서

$$Q_j(k) = Q_0[T_{target}(k)] - Q_{j,n}[T_{j,n}(k)] \quad (16)$$

이고

$$Q_1[T_1(k)] = Q_0[T_{target}(k)] \quad (17)$$

이다. $Q_0[T_{target}(k)]$ 는 과녁 스펙트럼의 Q함수이고, $Q_0[T_1(k)]$ 는 j번째 반복 스펙트럼의 Q함수이며, $Q_{j,n}[T_{j,n}(k)]$ 는 $Q_j[T_j(k)]$ 에서 구한 굴절률 함수 $n_j(y)$ 로부터 계산한 $T_{j,n}(k)$ 의 Q함수이다. $Q_j(k)$ 는 과녁스펙트럼의 Q함수와 $n_j(y)$ 로부터 계산한 Q함수와의 차이이다. 식 (15)에서는 이 차이를 $Q_j[T_j(k)]$ 에 더하여 새로운 $Q_{j+1}[T_{j+1}(k)]$ 를 생성하고 있다.

Q함수의 반복계산 과정의 초기 출발은 다음과 같다. 먼저 과녁스펙트럼($T_{target}(k)$)으로부터 $Q_0[T_{target}(k)]$ 을 구하고, 식 (9)로부터 $n_1(y)$ 를 계산한다. $n_1(y)$ 를 얇은 두께의 층으로 나누어 각 층의 행렬을 계산하여 다층박막의 투과율 $T_{1,n}(k)$ 과 $Q_{1,n}[T_{1,n}(k)]$ 을 구한다. 식 (16), (17)

로부터 과녁 Q함수와의 차이인 $\Delta Q_1(k)$ 을 계산한다. 식 (15)을 이용하여 $Q_2[T_2(k)]$ 를 계산하고 다시 식 (9)로부터 $n_2(y)$ 를 계산한다. 계산한 스펙트럼이 과녁 스펙트럼에 가까이 접근할 때까지 위와 같은 방법을 반복하여 새로운 Q함수와 $n(y)$ 를 계산한다.

IV. Rugate 필터의 설계 및 논의

Rugate 필터는 굴절률이 사인함수로 반사율이 높고 대역폭이 좁으며 고차반사가 없는 반사거울이다.^[4,6,8,9] 위의 식들을 이용하여 수직으로 입사하는 빛에 대해 흡수가 없는 유전체 박막으로 이루어진 rugate 필터의 굴절률 분포 함수를 유도하고, Fourier 변환 방법의 여러 가지 특성을 설명하고자 한다.

기준 파수 k_0 , 반사대역폭 k 인 반사거울의 Q함수가

$$\begin{aligned} Q(k) &= Q_0 \left[rect\left(\frac{k+k_0}{\Delta k}\right) + rect\left(\frac{k-k_0}{\Delta k}\right) \right] \\ \Phi(k) &= \Phi_0 \left[rect\left(\frac{k+k_0}{\Delta k}\right) - rect\left(\frac{k-k_0}{\Delta k}\right) \right] \end{aligned} \quad (18)$$

라 하자.^[13] 여기서 Q_0 는 반사대역에서의 반사율에 의해 주어진 값이며, Φ_0 는 반사대역에서의 위상값이다. 식 (1)을 이용하여 식 (18)을 역 Fourier 변환하고 $r(x)$ 를 구하면

$$r(x) = Q_0 \frac{\Delta k}{\pi} \operatorname{sinc}(\Delta k x) \cos(k_0 x + \Phi_0) \quad (19)$$

이 되고 $\Delta k \ll k_0$ 일 때

$$r(x) = Q_0 \frac{\Delta k}{\pi} \cos(k_0 x + \Phi_0) \quad (20)$$

이 된다. 따라서 $n(x)$ 는

$$n(x) = n_{av} \exp \left[\frac{2Q_0 \Delta k}{\pi k_0} \sin(k_0 x + \Phi_0) \right] \quad (21)$$

으로 표현할 수 있으며, 여기서 n_{av} 는 평균 굴절률이다. $\Delta k \ll k_0$ 이고 Q_0 가 매우 작으면

$$n(x) = n_{av} \left[1 + \frac{2Q_0 \Delta k}{\pi k_0} \sin(k_0 x + \Phi_0) \right] \quad (22)$$

로 근사할 수 있으며, 이를 rugate 필터의 굴절률 분포 인

$$n(x) = n_{av} + \frac{n_p}{2} \sin(k_0 x + \phi_0) \quad (23)$$

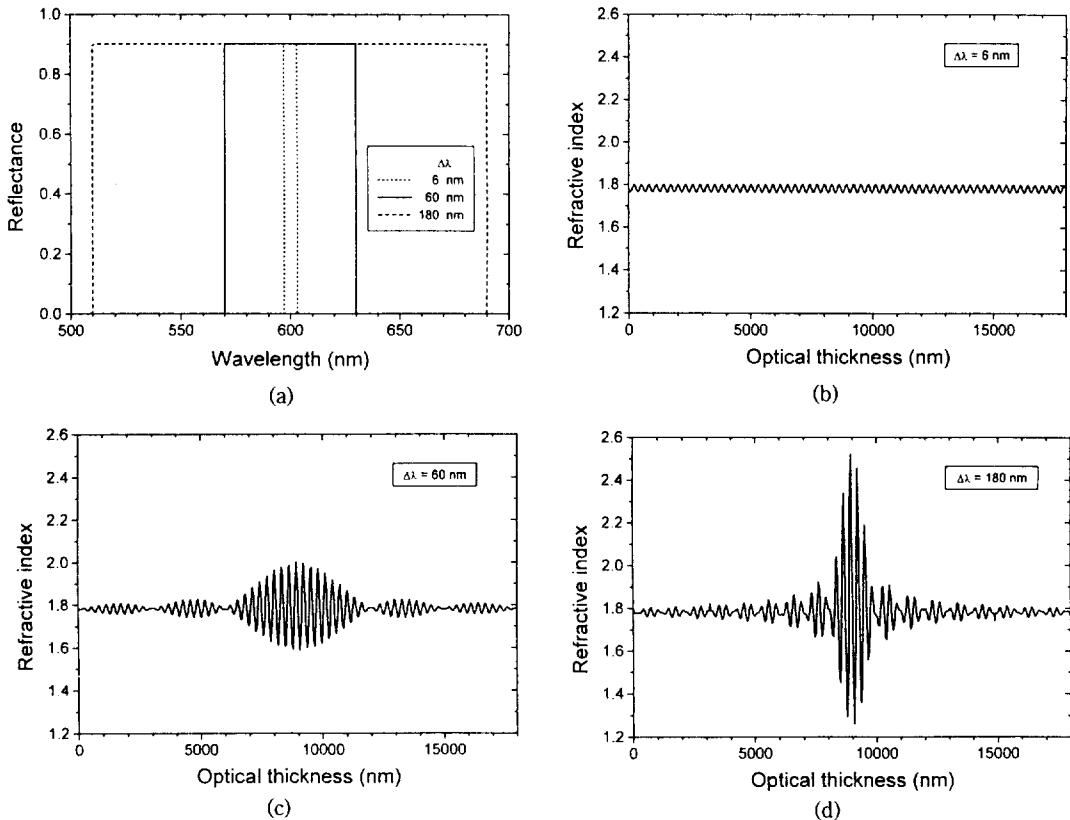


그림 3. 반사율이 일정($R=0.9$)하고 반사대역폭이 다른 rugate 필터의 반사대역과 굴절률 함수 (a) 반사대역이 다른 거울 (b) $\Delta\lambda=6 \text{ nm}$ (c) $\Delta\lambda=60 \text{ nm}$ (d) $\Delta\lambda=180 \text{ nm}$.

로 표현하면, 평균굴절률 n_{av} 와 최대굴절률과 최소굴절률의 차이 n_p 는

$$\frac{n_p}{2n_{av}} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} \frac{2Q_0}{\pi} \quad (24)$$

의 관계를 갖는다. 식 (24)로부터 최대반사율에 의해 결정되는 Q_0 가 크거나 반사대역폭($\Delta\lambda$)이 증가할 수록 굴절률의 변화폭이 커짐을 알 수 있다.

1. 반사율이 일정하고 대역폭이 다른 거울

그림 3은 반사율(R)이 $R=0.9$ 로 일정할 때 식 (9)에 의해 계산된 대역폭이 다른 거울의 굴절률 분포를 나타내고 있다. 그림 3(a)에서와 같이 기준파장은 600 nm 이고 반사대역폭($\Delta\lambda$)을 기준파장의 1%, 10%, 30%로 각각 6 nm , 60 nm , 180 nm 로 변화시켰다. Q 함수는 식 (11)의 Q_2 를 사용하였으며 광학두께(x_d)는 18000 nm 이다. $\Phi(k)$ 는 주어진 파데스펙트럼으로부터 결정되지 않는 임의의 함수이므로 본 연구에서는 $\Phi(k)=0$ 으로 하였다.

그림 3(b), (c), (d)로부터 최대굴절률과 최소굴절률의 차이인 n_p ($n_p=n_{max}-n_{min}$)는 $\Delta\lambda=6 \text{ nm}$ 일 때 $n_p=0.041$ 이고, $\Delta\lambda=60 \text{ nm}$ 일 때 $n_p=0.413$ 이며, $\Delta\lambda=180 \text{ nm}$ 일 때 $n_p=1.247$ 이 되어, $\Delta\lambda$ 가 커질수록 n_p 가 거의 선형으로 증가하고 있다. 즉 대역폭이 작을 때는 굴절률의 변화폭이 작아 사인함수에 가까우나, 대역폭이 증가할 수록 굴절률의 변화폭이 커지고 사인함수로부터 멀어지며 굴절률이 심하게 변조되고 있다. 대역폭을 기준파장의 30%보다 크게하면 굴절률이 1 이하이거나 3 이상이 되어 굴절률의 변화폭이 매우 크므로 가시광선과 극적외선에서는 현실적으로 제작이 불가능하다. 또한 굴절률 변조폭이 큰 중심부분의 광학두께는 대역폭이 증가할 수록 작아지고 있다.

만약 식 (23)의 사인함수를 이용하여 rugate 필터를 설계할 경우 Q_2 를 사용하면 $R=0.9$ 일 때 $Q_0=1.818^\circ$ 므로 $\Delta\lambda=6 \text{ nm}$ 일 때 $n_p=0.041$ 이고, $\Delta\lambda=60 \text{ nm}$ 일 때 $n_p=0.412$ 이며, $\Delta\lambda=180 \text{ nm}$ 일 때 $n_p=1.236$ 이 되어 위에서 식 (9)의 Fourier 변환법을 이용하여 중심부분에서

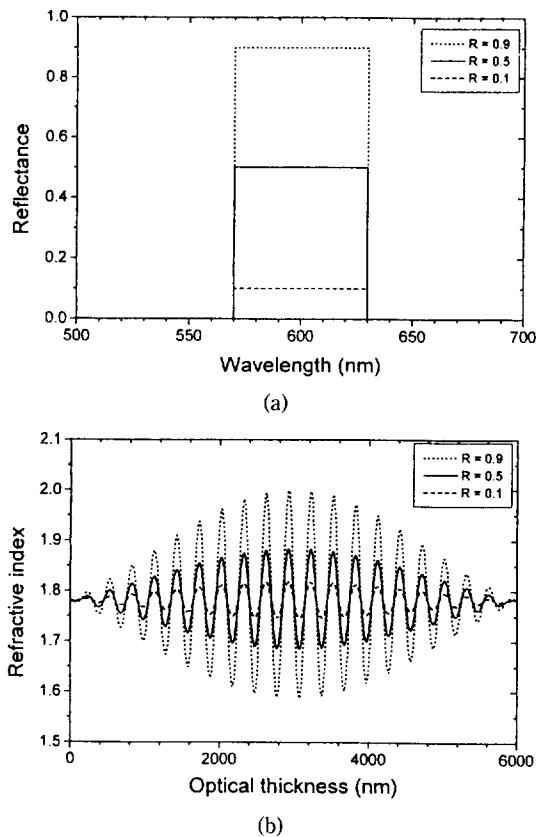


그림 4. 반사대역폭이 일정($\Delta\lambda=60\text{ nm}$)하고 반사율이 다른 rugate 필터의 굴절률 함수 (a) 반사율이 다른 거울 (b) $R=0.9, 0.5, 0.1$ 일 때의 굴절률 함수.

계산한 결과와 거의 같다.

2. 대역폭이 일정하고 반사율이 다른 거울

그림 4에 대역폭이 $\Delta\lambda=60\text{ nm}$ 로 일정하고 반사율이 각각 0.1, 0.5, 0.9로 변할 경우 식(9)를 이용하여 굴절률의 분포를 계산하였다. Q 함수는 Q_2 를 이용하였고 광학두께는 굴절률 분포를 상세히 보기 위해 6000 nm로 하였다. 반사율이 증가함에 따라 굴절률 분포의 모양은 같으나 굴절률의 변화폭이 증가하고 있다. 즉 $R=0.1$ 일 때 $n_p=0.074$, $R=0.5$ 일 때 $n_p=0.199$, $R=0.9$ 일 때 $n_p=0.411$ 로 중심부분에서 굴절률의 폭이 증가하고 있다.

식(23), (24)의 사인함수 굴절률 분포에서 대역폭이 일정할 경우 반사율이 증가하면 굴절률의 변화폭이 증가한다. 식(24)을 이용하여 n_p 를 계산하면 $R=0.1$ 일 때 $Q_0=0.328^\circ$ 으로 $n_p=0.074^\circ$ 이고, $R=0.5$ 일 때 $Q_0=0.881^\circ$ 으로 $n_p=0.2$ 가 되어 식(9)의 Fourier 변환을 이용하여

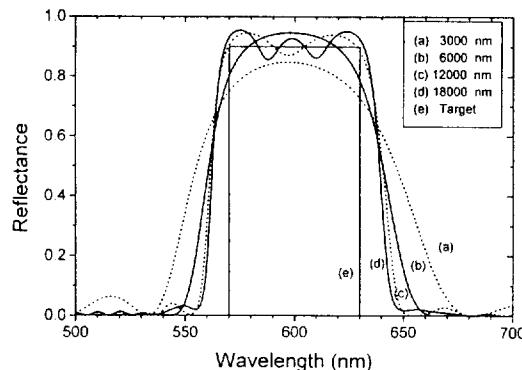


그림 5. 광학두께의 증가에 따른 rugate 필터의 반사율
(a) 3000 nm (b) 6000 nm (c) 12000 nm (d) 18000 nm (e) 과녁스펙트럼.

계산한 중심부분에서의 계산 결과와 거의 같음을 알 수 있다.

3. 광학 두께

식(23)의 굴절률 분포를 갖는 rugate 필터의 최대반사율(R_{max})과 최소광학두께와의 관계는

$$x_a = \frac{\lambda}{\pi} \frac{2n_a}{n_p} \operatorname{arctanh}(\sqrt{R_{max}}) \quad (25)$$

로 주어진다.^[14] 식(24)에서 Q_0 를 Q_2 로 사용할 경우 식(25)은

$$x_a = \frac{\lambda^2}{2\Delta\lambda} \quad (26)$$

가 되어 광학두께는 대역폭이 좁을 수록 증가하는 것을 알 수 있다. 식(25), (26)로부터 반사율이 1이거나 대역폭이 0인 단선 rugate 필터의 광학두께는 무한대이다. $R=0.9$, $\Delta\lambda=60\text{ nm}$ 일 때 $x_a \approx 3000\text{ nm}$ 이다. 광학두께를 3000 nm부터 18000 nm까지 증가시키며 식(9)와 Q_2 함수를 이용하여 굴절률 분포를 계산하고 이로부터 rugate 필터의 반사율을 계산하였으며 그림 5에 이들을 나타내었다.

광학두께가 3000 nm일 때 반사율이 0.9에 미치지 못하는 것은 계산한 굴절률 분포가 식(23)과 같은 사인함수가 아니고 그림 3, 4와 같이 변조되었기 때문인 것으로 판단된다. 6000 nm일 경우는 중심파장 근처에서 0.9가 넘으나 경계파장 주위에서는 0.9보다 작다. 광학두께가 12000 nm와 18000 nm일 경우는 반사율이 0.9 근처에서 위아래로 진동하고 있으며 두께가 두꺼울 수록 진동수가 증가하여 0.9 근처에서 평평해지고 있다. 이러

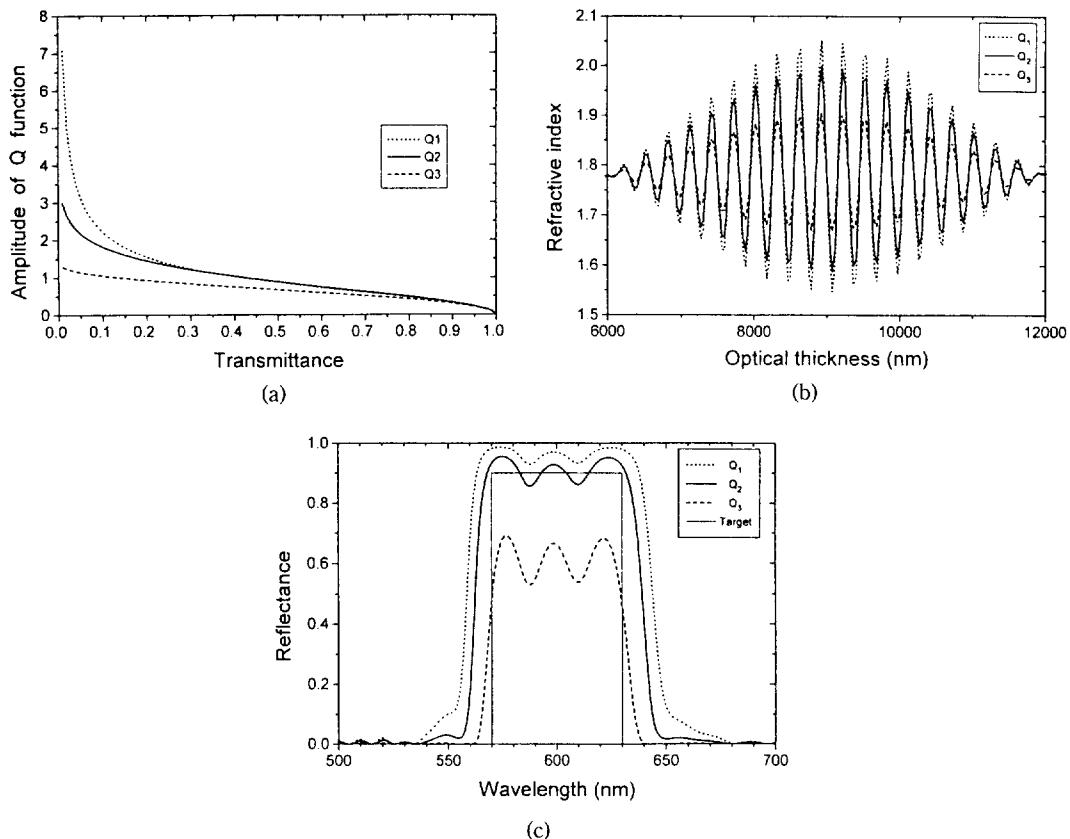


그림 6. Sossi(Q_1), Bovard(Q_2), Fabricius(Q_3)가 각각 유도한 Q함수의 비교 (a) 투과율에 대한 Q함수의 크기 (b) 굴절률 함수 (c) rugate 필터.

한 진동은 불연속 Fourier 변환에서 급수향을 증가시킬 경우 나타나는 Gibbs 현상이다.^[13] 두께를 계속 증가시키면 과녁스펙트럼에 가까운 반사율을 얻을 수 있을 것이다. 한편 반사대역은 광학두께가 증가할 수록 좁아지고 있다. 실제 제작에서는 두께를 무한히 증가시킬 수 없으므로 반사율과 반사대역을 적당히 만족시킬 수 있는 광학두께를 최적 광학두께로 결정해야 할 것이다.

4. Q 함수의 비교 및 반복계산

그림 6(a)에 투과율을 0부터 1까지 증가시킬 경우 Q 함수의 변화를 나타내었다. 투과율이 증가함에 따라 Q 함수는 감소하며 투과율이 1일 때 Q 함수는 0이 된다. 전반적으로 Q_1 과 Q_2 는 Q_3 보다 크다. 투과율이 0.3보다 작을 경우 Q_1 이 Q_2 보다 크나, 투과율이 0.3보다 크면 Q_1 과 Q_2 는 거의 같다. $R=0.9$, $\Delta\lambda=60\text{ nm}$ 일 때 각 Q 함수로부터 계산한 굴절률 함수와 반사율을 그림 6(b)(c)에 각각 나타내었다. 광학두께는 18000 nm이나 굴절률의

분포를 상세히 보기 위하여 그림 6(b)에는 6000~12000 nm만 나타내었다. 식 (9)로부터 Q함수의 크기에 의해 굴절률이 결정되고, $R=0.9$ 일 때 그림 6(a)로부터 $Q_1 > Q_2 > Q_3$ 이므로, 굴절률의 변화폭(n_p)도 이와 같은 순서이다. 그림 6(c)의 반사대역에서 Q_1 함수에 의한 반사율은 약 0.95로 과녁반사율 0.9 보다 크고, Q_2 함수에 의한 반사율은 약 0.9 근처에서 진동을 하며, Q_3 함수에 의한 반사율은 약 0.6으로 과녁 반사율보다 매우 작다. Q_2 함수가 과녁 반사율에 비교적 잘 맞는 것은 Q_2 함수가 사분의 일 파장의 불연속 다층박막으로 구성된 고반사율 거울로부터 유도되었기 때문인 것으로 보인다. 반사율이 낮은 영역에서는 Q함수의 변화가 작으므로 세 함수가 거의 같은 결과를 나타낼 것이다.

그림 6(c)에서와 같이 식 (9)로부터 계산한 rugate 필터는 과녁 스펙트럼과 일치하지 않으며 Q함수에 따라 차이가 나고 있다. 이는 식 (9)가 근사식이기 때문이며, 여러 종류의 Q함수가 사용되고 있는 것은 보다 과녁

스펙트럼에 가까운 굴절률 분포를 얻기 위함이다. 따라서 정확한 식을 유도하거나 새로운 Q 함수를 찾아내는 것은 중요한 연구 과제이다.

본 연구에서는 과녁스펙트럼에 가까운 굴절률 함수를

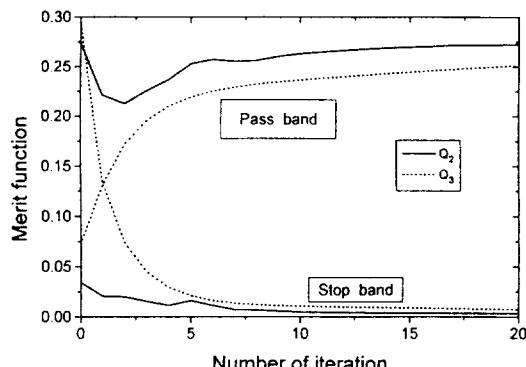
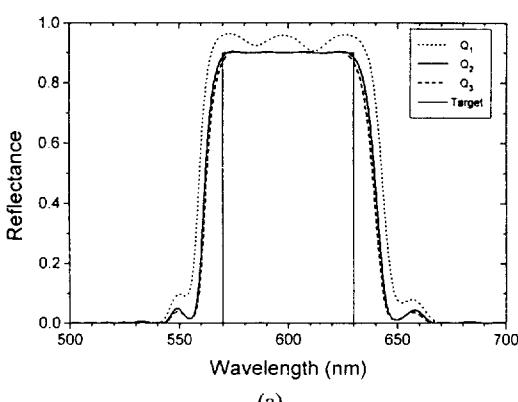
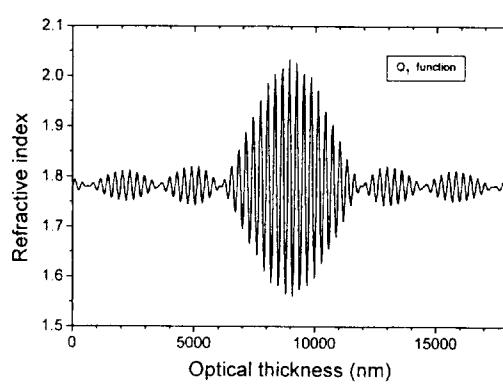


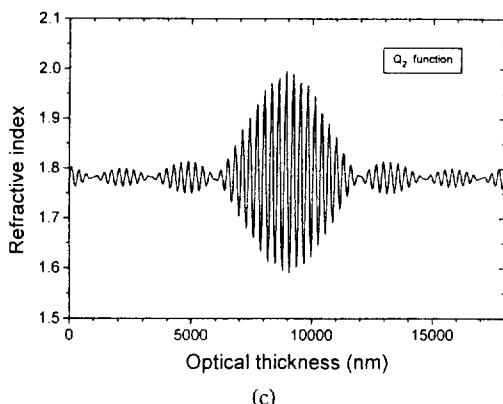
그림 7. 반복회수의 증가에 대한 merit 값의 변화.



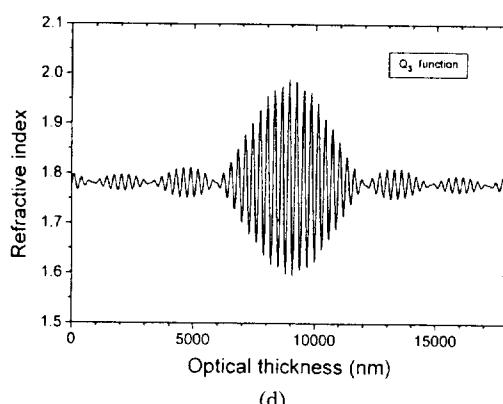
(a)



(b)



(c)



(d)

그림 8. Q_1 , Q_2 , Q_3 함수를 각각 이용하여 반복계산 수정한 후 rugate 필터의 반사율과 굴절률 함수 (a) Q_1 , Q_2 , Q_3 함수에 의한 rugate 필터의 반사율 (b) Q_1 함수에 의한 굴절률 함수 (c) Q_2 함수에 의한 굴절률 함수 (d) Q_3 함수에 의한 굴절률 함수.

얻기 위하여, Q 함수를 반복계산하여 수정하는 방법을 이용하였다. 식 (15)~(17)를 이용하여 반사율 0.9, 반사 대역폭 60 nm, 광학두께 18000 nm인 rugate 필터의 Q 함수를 반복계산하였으며, 그림 7에 반복회수의 증가에 따른 merit 값의 변화를 나타내었다. merit값은 rugate 필터 반사영역(570~630 nm)과 투과영역(500~570 nm, 630~700 nm)으로 나누어 1 nm마다 계산하였다.

Q_1 함수는 반복계산 회수를 증가하여도 merit 값이 점차적으로 감소하는 것이 아니라 merit 값이 크게 증가와 감소를 반복하며 merit 값이 개선되는 것을 볼 수 없어 그림에는 표시하지 않았다. Q_2 함수의 경우 반사 영역에서 merit 값은 비교적 작으며 반복회수가 증가함에 따라 감소하여 약 15회 이상이 되면 merit 값이 거의 일정하게 되며 20회일 때 merit 값은 0.00356이다. 투과영역의 merit 값은 경계파장에서의 반사율이 일치하지 않기 때문에 반사영역보다 크다. 반복회수가 증가함에 따라 merit 값이 증가하는 경향을 나타내고 있으며 반

복회수가 약 15회 이상이면 증가율이 감소한다. 즉 반복회수의 증가에 따라 반사대역은 과녁반사율과 잘 맞으나 투파영역은 그렇지 못함을 알 수 있다.

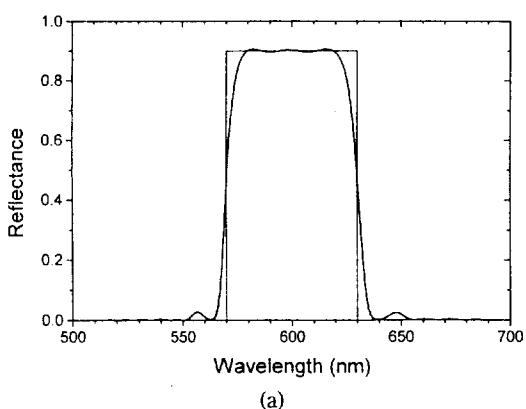
Q_3 함수도 Q_2 와 유사한 경향을 나타내고 있다. 반사대역에서 Q_3 의 초기 merit 값은 크나, 반복수정을 하면 급격히 감소하며 약 15회 이 후에는 거의 일정해 진다. 20회일 때 merit 값은 0.00738로 Q_2 보다 큼, 투파영역에서는 Q_2 보다 작다.

그림 8은 반복계산 수정을 한 후 최소 merit 값에서 rugate 필터의 스펙트럼과 굴절률 함수를 나타낸 것이다. Q_1 의 경우 초기 반사율(그림 6(c))은 반복계산 수정에 의해 반사율이 감소는 하나 과녁반사율인 0.9에 가까이 가지 못하고 진동하는 것을 알 수 있다. Q_2 의 경우는 초기반사율이 과녁반사율 근처이며 반복수정을 한 후 과녁 반사율에 거의 일치하고 있으며, 반사대역폭은 과녁스펙트럼보다 약간 증가하였다. Q_3 는 초기 반사율이 0.6 근처로 매우 낮으나 반복수정 후 과녁반사율에 거의 일치하고 있으며 반사대역폭은 약간 증가하였다. 반사영역의 반사율은 Q_2 가 과녁반사율에 더 가까우나, 반사대역폭은 Q_3 가 Q_2 보다 약간 좁은 경향을 나타내고 있다. 그림 8(b), (c), (d)는 각 Q 함수의 반복계산 수정 후 개선된 굴절률을 보여주고 있다. 초기 굴절률에 비해 개선된 굴절률은 중심굴절률의 폭이 약간 감소하고 변조된 주변굴절률의 수가 증가하며 진폭이 감소하고 있다. Q_1 에 의한 굴절률 함수는 Q_2 , Q_3 보다 굴절률 변화폭이 큼, Q_2 와 Q_3 함수는 미세한 차이를 나타내나 형태는 거의 유사하다.

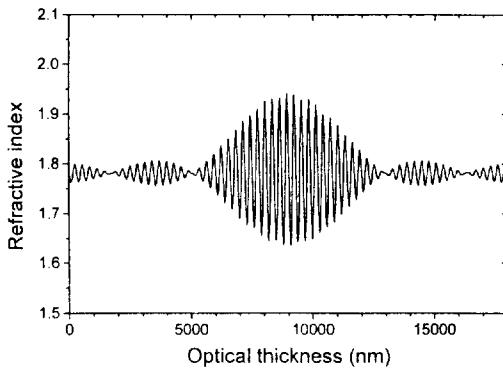
일반적으로 불균일 박막의 광학두께는 두꺼우므로 광학두께를 얇게 설계하는 것은 실제 제작시에 발생할 수

있는 박막의 기계적 특성을 고려할 때 매우 중요하다. Q_2 함수에 대해 광학두께를 3000 nm부터 18000 nm까지 증가시키며 반복계산 수정한 결과가 그림 9에 나타나 있다. 광학두께가 3000 nm일 때 반복계산 수정 전 반사율(그림 5)은 과녁반사율보다 매우 낮으나 반복계산 수정 후 중심파장에서는 과녁반사율(0.9)보다 약간 큼, 경계파장에서는 과녁반사율보다 약간 낮았다. 광학두께가 6000 nm 이상일 경우에는 반복계산 수정을 통하여 광학두께에 관계없이 반사대역에서 과녁반사율과 거의 같은 굴절률을 변화시킬 수 있다. 한편 반복계산 수정 후 반사대역폭은 반복계산 수정 전 초기 반사율의 대역폭(그림 5)보다 광학두께가 작으면 감소되나, 광학두께가 증가하면 반복계산 수정이 반사대역폭에는 거의 영향을 주지 못하고 있다. 이는 Q 함수의 반복계산 수정과정이 Q 함수의 크기를 조절하여 과녁반사율에 맞추기 때문인 것으로 보인다.

Q_3 의 경우도 Q_2 와 유사한 경향을 나타내고 있다. 반



(a)



(b)

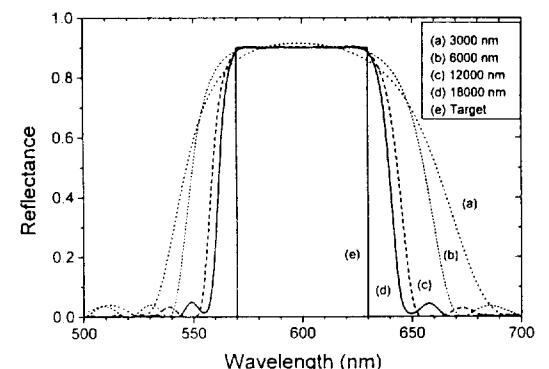


그림 9. 반복계산 수정 후 광학두께의 증가에 따른 rugate 필터의 반사율(Q_2 함수 사용) (a) 3000 nm (b) 6000 nm (c) 12000 nm (d) 18000 nm (e) 과녁스펙트럼.

그림 10. 반사대역폭을 맞춘 rugate 필터의 반사율과 굴절률 함수(Q_2 함수 사용, 광학두께=18000 nm) (a) 반사율 (b) 굴절률 함수.

사대역에서 반사율은 과녁반사율과 거의 같으나 반사대역폭은 광학두께가 증가할 수록 감소하고 있다. 실제 rugate 필터 중에서는 광학두께가 얕을수록 제작이 용이하고 박막의 응력이 작아지므로, 반사대역폭이 허용하는 범위 내에서 초기 설계치와 두께를 반복계산하여 수정하면 과녁스펙트럼에 가까운 rugate 필터를 설계할 수 있을 것으로 판단된다. Q_1 의 경우 광학두께를 증가시키며 반복계산 수장을 하더라도 과녁반사율에 가까이 가지 않고 반사대역폭도 매우 넓어, Q_1 은 rugate 필터 설계에 적당치 않은 Q함수로 판단된다.

위의 여러 그림에서와 같이 광학두께가 무한대가 아니므로 과녁 반사대역폭에 대해 Fourier 변환을 하면 계산된 rugate 필터의 반사대역폭은 과녁 반사대역폭보다 크다. 반사대역폭을 맞추어야 하는 경우에는 과녁스펙트럼을 변경시켜 Fourier 변환 영역을 감소시켜야 한다. 예를 들면 그림 10(a)의 rugate 필터는 과녁스펙트럼은 570~630 nm에서 반사율이 $R=0.9$ 이나 이를

577~622 nm에서 $R=0.9$ 로 과녁 스펙트럼을 변경시키고 반복계산을 한 결과이다. 광학두께가 8000 nm일 때 경계파장(570 nm와 630 nm)에서의 반사율이 약 0.45가 되도록 반복계산을 하였다. 반사율이 최대치의 반이 되는 반사대역폭은 $\Delta\lambda=60 \text{ nm}$ 이고, 반사율은 과녁 스펙트럼보다 좁은 580~620 nm영역에서 약 0.9이다. 굴절률의 최대 변화폭(그림 10(b))은 반사대역폭을 맞추지 않은 경우보다 많이 감소하였다.

5. 이중 rugate 필터

위의 Fourier 방법을 이용하면 λ_1 과 λ_2 에서 각각 $\Delta\lambda_1$ 과 $\Delta\lambda_2$ 의 반사대역을 갖는 이중 rugate 필터를 설계할 수 있다. 이중 rugate 필터의 경우 Q 함수는

$$Q(k)e^{i\alpha(k)} = Q_1(k)e^{i\phi_1(k)} + Q_2(k)e^{i\phi_2(k)} \quad (27)$$

과 같으며, Q함수의 Fourier 변환 구간이 각각 $\Delta\lambda_1$ 과 $\Delta\lambda_2$ 이므로

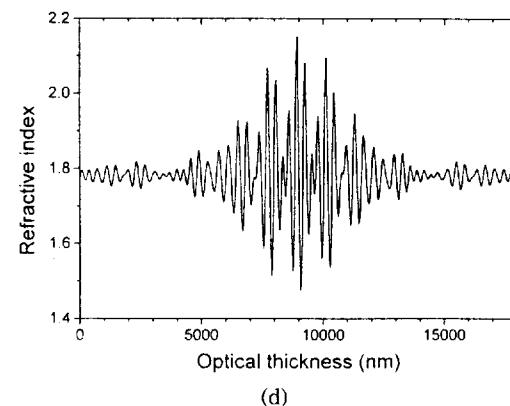
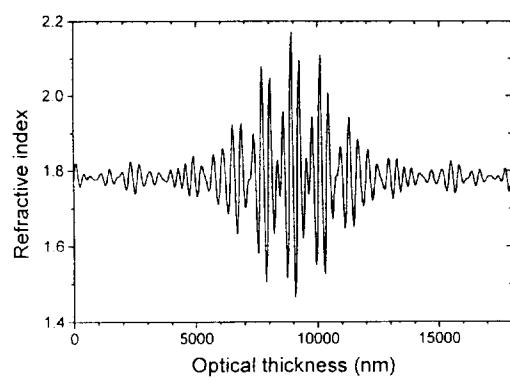
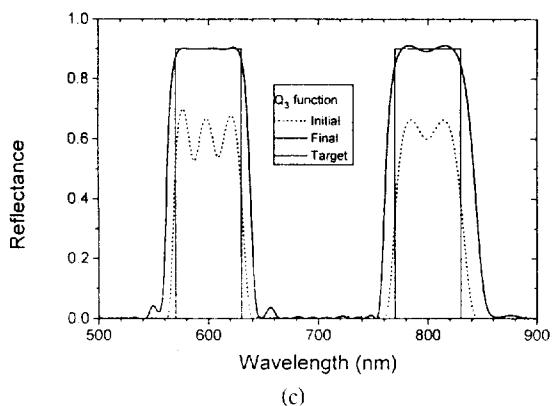
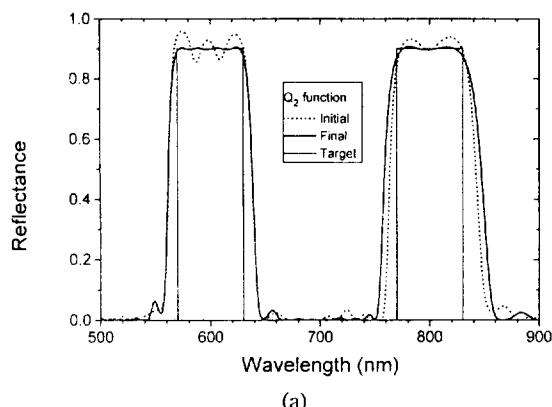


그림 11. 600 nm와 800 nm에서 Q_2 와 Q_3 함수를 이용하여 설계한 이중 rugate 필터의 반사율과 굴절률 함수 ($\Delta\lambda_1=\Delta\lambda_2=60 \text{ nm}$, 광학두께=18000 nm) (a) Q_2 함수에 의한 반사율 (b) Q_2 함수에 의한 굴절률 함수 (c) Q_3 함수에 의한 반사율 (d) Q_3 함수에 의한 굴절률 함수

$$r(x) = r_1(x) + r_2(x) \quad (28)$$

로 표현할 수 있다. 따라서 굴절률 함수는

$$n(x) = n_1(x) n_2(x) \quad (29)$$

가 된다. 즉 이중 rugate 필터의 굴절률 함수는 각 단선 rugate 필터의 굴절률 함수의 곱으로 표현된다. 각각의 광학두께가 다를 경우 큰 것으로 결정되므로 최소 광학두께를 얻기 위하여 두 필터의 광학두께를 같게 하였다. 반사대역이 여러 개인 다중 rugate 필터도 이와 같은 방법으로 설계할 수 있으며, 다중 rugate 필터의 굴절률 함수는 각 rugate 필터의 굴절률 함수의 곱으로 표현된다.

그림 11에 $\lambda_1=600\text{ nm}$ 과 $\lambda_2=800\text{ nm}$ 에서 대역폭이 $\Delta\lambda_1=\Delta\lambda_2=60\text{ nm}$ 이고 반사율이 $R=0.9$ 인 rugate 필터를 설계하였다. Fourier 변환 구간은 각각 $570\sim630\text{ nm}$ 과 $770\sim830\text{ nm}$ 이며, 광학두께는 18000 nm 이고, Q 함수는 Q_2 와 Q_3 를 사용하였으며, Q위상은 0으로 하였다. 그림 11(a)은 Q_2 함수를 이용한 이중 rugate 필터로 식 (9), (27)-(29)를 이용하여 초기 굴절률 분포와 초기 반사율을 계산하였으며 식 (14)의 merit함수와 식 (15)~(17)의 반복계산 수정의 과정을 20회 거쳐 과녁 스펙트럼에 가깝게 갈 수 있었다. 600 nm에서의 초기 반사율은 단선 rugate 필터일 때와 같으며, 800 nm에서의 초기 반사율은 기준 파장이 걸어졌기 때문에 광학 두께가 얇아진 것과 같은 현상이 나타나 반사대역에서 전동이 작다. 즉 600 nm에서의 반사율은 그림 5에서 광학두께가 18000 nm 일 때와 같으며, 800 nm에서의 반사율은 그림 5에서 광학두께가 12000 nm 일 때의 초기 반사율과 유사하다(광학두께가 13500 nm 일 때의 반사율과 같다). 반복계산 후 600 nm에서의 반사율은 과녁 반사율에 거의 접근하고 있으며 반사대역폭은 거의 차이가 없다. 800 nm에서는 반사율은 과녁 반사율에 접근하고 있으나 반사대역의 가장자리에서는 과녁 반사율에서 멀어지고 있으며 반사대역폭은 감소하나 600 nm에서의 대역폭보다 크다. 이러한 현상은 광학두께가 얇을 경우 나타나는 것과 동일하다. 그림 11(b)는 그림 11(a)에서 20회 반복계산한 이중 rugate 필터의 굴절률 분포이다. 두 굴절률 함수의 곱이므로 단선 rugate 필터보다 굴절률의 최대치는 증가하고 최소치는 감소하여 그림 8(c)과 비교할 경우 단선 rugate 필터보다 굴절률의 최대-최소 변화폭이 증가하였으며 두께에 따라 변조된 모양이 불규칙적이다.

그림 11(c)는 Q_3 함수를 이용한 이중 rugate 필터로

초기 굴절률 분포와 초기 반사율은 Q_2 와 다르나 20회 반복계산 수정의 과정을 거쳐 과녁 스펙트럼에 가깝게 갈 수 있었다. Q_2 와 같이 600 nm에서의 초기 반사율은 단선 rugate 필터일 때와 같으며(그림 6(c)), 800 nm에서의 초기 반사율은 광학 두께가 얕아진 것과 같은 현상이 나타나 반사대역에서 전동이 작다. 반복계산 후 600 nm에서의 반사율은 과녁 반사율에 거의 접근하고 있으며 반사대역폭은 반사율이 증가함에 따라 증가하였으며, Q_2 에 의한 반사대역폭보다는 약간 좁은 경향을 나타내고 있다. 800 nm에서는 반사율은 과녁 반사율에 접근하고 있으며 광학 두께가 얕아지는 효과때문에 반사대역의 가장자리에서는 과녁 반사율에서 멀어지고 있다. 반사대역폭은 증가하여 600 nm에서의 대역폭보다 약간 크며 이것은 Q_2 의 경우와 유사하다. 그림 11(d)는 그림 11(c)에서 20회 반복계산 한 이중 rugate 필터의 굴절률 분포이다. Q_2 의 경우와 거의 유사한 굴절률 분포를 나타내고 있다.

V. 결 론

Fourier 변환을 이용하여 불균일 굴절률 박막을 설계하는 프로그램을 작성하고, rugate 필터 설계시 반사율, 반사대역, 광학두께, Q함수 등이 불균일 굴절률과 스펙트럼에 주는 영향을 조사하였다. 과녁 스펙트럼과 Fourier 변환에 의해 얻은 스펙트럼과의 차이를 줄이기 위하여 반복계산법을 이용하여 Q함수를 merit 값이 최소될 때까지 수정하였다. 이 방법을 이용하여 단선 및 이중 rugate 필터의 경우 과녁 스펙트럼에 맞는 굴절률 분포를 얻었다. 세 종류의 Q함수 중 Sossi의 Q_1 은 과녁보다 반사율이 크며 반복계산 수정에서 과녁스펙트럼에 맞는 굴절률분포를 찾을 수 없었다. Bovard의 Q_2 는 초기반사율이 세 Q함수 중 과녁에 가장 가까우며 반복계산 수정을 거쳐 과녁반사율을 맞출 수 있었으며 merit 값이 가장 낮았다. Fabricius의 Q_3 는 초기반사율이 낮으나 반복수정을 거쳐 과녁반사율에 도달할 수 있었다. 반사대역폭은 Q_1 , Q_2 , Q_3 함수 모두 반복계산 수정으로 과녁 반사대역폭을 얻을 수 없었으며, 광학두께에 매우 민감하여 광학두께가 증가할 수록 반사대역폭은 감소하였다. 반사율이 높은 rugate 필터 설계에는 반복계산을 할 경우 Bovard와 Fabricius의 Q함수가 적당할 것으로 판단되며, 광학두께는 최소광학두께만 넘으면 반복계산 수정과정을 거쳐 과녁반사율을 맞출 수 있으므로 반사대역폭이 허용하는 적정 광학두께로 결정하면 될 것이다.

참 고 문 헌

- [1] R. Jacobsson, "Light reflection films of continuously varying refractive index," in *Progress in Optics* 5(North-Holland, Amsterdam, 1966).
- [2] L. Sossi, "A method for the synthesis of multilayer dielectric interference coatings," Izvestiya Akademii nauk Estonskoi SSR Fizika, Matematika 23(3), 223-237 (1974), an English translation is available in SPIE MS 26 *Selected Papers on Design of Optical Coatings*, Ed. M.R. Jacobson 537-547 (1990).
- [3] J. A. Dobrowolski and D. Lowe, "Optical thin film synthesis program based on the use of Fourier transforms," Appl. Opt. 17, 3039-3050 (1978).
- [4] P. G. Verly, J. A. Dobrowolski, W. J. Wild, and R. L. Burton, "Synthesis of high rejection filters with the Fourier transform method," Appl. Opt. 28, 2864-2875(1989).
- [5] P. G. Verly and J. A. Dobrowolski, "Iterative correction process for optical thin film synthesis with the Fourier transform method," Appl. Opt. 29, 3672-3684(1990).
- [6] B. G. Bovard, "Derivation of a matrix describing a rugate dielectric thin film," Appl. Opt. 27, 1998-2005(1988).
- [7] B. G. Bovard, "Fourier transform technique applied to quarterwave optical coatings," Appl. Opt. 27, 3062-3063(1988).
- [8] B. G. Bovard, "Rugate filter design: the modified Fourier transform technique," Appl. Opt. 29, 24-30(1990).
- [9] B. G. Bovard, "Graded index rugate filters: power-sine rugate structures," SPIE 2046, 109-125 (1993).
- [10] H. Fabricius, "Gradient-index filters: designing filters with steep skirts, high reflection, and quintic matching layers," Appl. Opt. 31, 5191-5196 (1992).
- [11] H. Fabricius, "Gradient-index filters: conversion into a two index solution by taking into account dispersion," Appl. Opt. 31, 5216-5220(1992).
- [12] H. Fabricius, "Closed loop optimization of quasi-inhomogeneous optical coatings," SPIE 2046, 156-166(1993).
- [13] J. D. Gaskill, *Linear Systems, Fourier Transforms, and Optics*, (John Wiley & Sons, New York, 1978).
- [14] W. H. Southwell, "Spectral response calculations of rugate filters using coupled-wave theory," J. Opt. Soc. Am. A5, 1558-1564(1988).

Design of Rugate Filters of Inhomogeneous Refractive Index Using the Fourier transform

Hyun Ju Cho, Jong-O Lee, and Chang Kwon Hwangbo
Department of Physics, Inha University, Inchon 402-751, Korea

(Received: May 8, 1995)

Rugate filters of inhomogeneous refractive index were designed using the Fourier transform and the effect of reflectance, stop bandwidth, optical thickness, and Q function on the rugate filter was investigated. An iterative correction process using a merit function was employed to fit an initial design to the target spectrum. Three Q functions derived by Sossi, Bovard, and Fabricius, respectively, were compared in terms of the number of iteration, merit function, and optimum optical thickness. The result shows that after a number of iterations the Q functions by Bovard and Fabricius produce high rejection rugate filters closer to the target spectrum than the Sossi's Q function and the optimal optical thickness is determined by the stop-band width of the rugate filter.