퍼지집합, 퍼지척도 및 퍼지적분

권 순 학

일본 동경 공업대학

1. 서 론

최근, 우리 주위의 여러 분야(예 : 가전 제품, 지하철의 자동운전, 공정제어, 무인 헬리콥터 등등)에서 성공적으로 이용되고 있는 퍼지제어이론은, 학계 및 산업계 관계자들의 퍼지제어를 포함한 퍼지이론 전반 및 이의 응용에 대한 관심을 고조시키고 있다.

퍼지이론에서는 크게 두 종류의 불확실성(uncertainty), 즉 확실한 경계가 규정되지 않는 개념의 불확실성(vagueness)과 여러 가지의 가능성이 있는 경우 어느쪽에 속할 지 특정지어 지지 않는 개념의 불확실성(ambiguity)을 서로 다른 방향으로 다루고 있다[27]. 전자는 주로 퍼지집합론(fuzzy set theory)에서, 그리고 후자는 퍼지척도론(fuzzy measure theory)에서 다루어 진다.

퍼지집합론은 인간의 인식, 사고, 판단 및 언어(자연언어)등에서 볼 수 있는 불확실성(vagueness)을 정량적이며 합리적으로 처리하는 수학적 이론으로, 1965년 미국 캘리포니아 대학의 자데(L.A. Zadeh) 교수에 의하여 제창되었다[1]. 그 후, 퍼지집합에 근거한 퍼지논리(fuzzy logic) 및 근사추론(approximate reasoning) 방법들이 제안되었으며, 이를 바탕으로 여러 분야에서 응용에 관한 연구개발이 이루어 지고 있다. 그 중, 1970년대 중반에 시작되어, 80년대의 급격한 발전을 거쳐, 90년대에 들어 꽃을 피우고 있다고 하여도 과언이 아닌 퍼지제어는 퍼지이론의 대표적 응용분야라 할 수 있다.

이와는 별도로 퍼지척도론은 1972년 일본의 수게노(Sugeno) 교수[2]에 의하여 제안된 비가법적 집합함수(nonadditive set function)로서, 고전적 척도(예 : 확률)의 정의 중 가법성(additivity)을 제외시킨 척도로, 퍼지집합론이 고전적 집합론의 확장인 것과 마찬가지로 퍼지척도 또한 고전적 척도론의 확장으로 볼 수 있다. 그 후 퍼지척도 및 이에 대한 적분인 퍼지적분은 주로 인간의 주관적 평가 문제의 해석에 응용되어 좋은 결과를 보여 주고 있다.

이하 2장과 3장에서는 앞에서 언급한 퍼지이론의 두 가지 큰 부류인 퍼지집합론과 퍼지척도 및 퍼지적분의 기본개념 및 관련이론을 간략히 소개하기로 한다.

2. 퍼지집합

2.1 퍼지집합 및 연산

고전적 집합론에서, 집합이란 '확정되어 있으며 또 서로 구별할 수 있는 원소들의 모임'을 나타내며, 이와 같이 경계가 명확한 보통집합(crisp set) A는 전체집합 X의 원소를 집합 $\{0, 1\}$로 대응시키는 다음과 같은 특성함수

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

에 의하여

$$A = \{x \in X \mid \chi_A(x) = 1\}$$

로 표현된다.

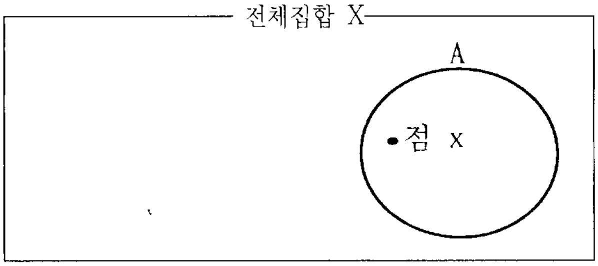
그러나 '아름다운 여성들의 모임' 또는 '상당히 큰 자연수의 집합' 등등에서와 같이 경계가 애매하게 정의된 집합을 정량적으로 나타내기 위하여는 소속관계를 표현하는 새로운 특성함수의 정의가 필요하다. 퍼지부분집합은 이러한 배경위에 다음과 같이 정의된다. 전체집합(universal set) X에 대한 퍼지부분집합(fuzzy subset) $\tilde{A}$는 다음과 같이 정의되는 소속함수(membership function)

$\mu_{\tilde{A}}(x) : X \rightarrow [0, 1]$

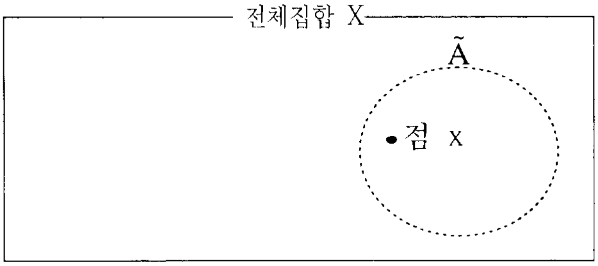
에 의하여 규정되는 집합이며,

$$\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) \mid x \in X\}$$

로 표현된다. 소속함수 $\mu_{\tilde{A}}(x)$는 X의 원소 x의 $\tilde{A}$에의 소속정도(membership grade)를 나타낸다. 따라서 퍼지집합은 보통집합의 확장으로 볼 수 있다. 일반적으로, 소속정도는 주관적 판단에 의하여 결정되어지기 때문에 개인 또는 상황(situation)에 따라 다르게 할당될 수 있다. 전체집합 X에 대한 보통집합 A와 퍼지집합 $\tilde{A}$를 추상적으로 나타내면 그림 2.1과 같다.



(a) 보통집합 A.



(b) 퍼지집합.

그림 2.1. 보통집합과 퍼지집합의 추상적 표현.

즉, (a)의 보통집합은 특성함수 $\chi_A(x)$가 0과 1만으로 정의되어 있어, X의 원소 x가 A에 속하는지 속하지 않는지를 명확하게 규정한다. 그러나, (b)에서와 같이 점선으로 나타내지는 퍼지집합은 소속함수 $\mu_{\tilde{A}}(x)$가 0부터 1까지의 실수값을 취하므로, 보통집합과는 다르게, 소속정도를 이용하여야만 규정되어 진다.

이와 같이 소속함수에 의하여 정의되는 퍼지집합의 표현법은, X가 이산집합으로 $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$으로 주어진 경우, 퍼지집합 $\tilde{A}$는

$$\tilde{A}\{(x_1, \mu_{\tilde{A}}(x_1)), (x_2, \mu_{\tilde{A}}(x_2)), \cdots, (x_n, \mu_{\tilde{A}}(x_n))\}$$

혹은

$$\tilde{A} = \mu_{\tilde{A}}(x_1)/x_1 + \mu_{\tilde{A}}(x_2)/x_2 + \cdots + \mu_{\tilde{A}}(x_n)/x_n$$

로, 이를 간단히 하여

$$\tilde{A} = \sum_{i=1}^{n} \mu_{\tilde{A}} \cdot (x_i)/x_i$$

로 표현되며, 소속도가 0인 항은 생략될 수 있다. 여기서 연산기호 '/' 및 '+'는 나눗셈 기호 및 덧셈기호가 아니고, 각각 '대하여' 및 '또는(or)'을 의미한다. 한편, X가 연속집합인 경우

$$\tilde{A} = \int_X \mu_{\tilde{A}}(x)/x$$

로 표현된다. 예를 들면, $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$에 대하여, '큰 수의 집합'이라는 퍼지집합$\tilde{A}$는 주관적으로

$$\tilde{A} = 0.0/1 + 0.0/2 + 0.1/3 + 0.3/4 + 0.6/5 + 1.0/6$$

로 표현할 수 있다. 또다른 예로 X = {승용차의 속도}에 대하여, '느린 속도', '중간 속도', '빠른 속도'라는 퍼지집합은 주관적으로 그림 2.2와 같은 소속함수에 의하여 나타내진다.

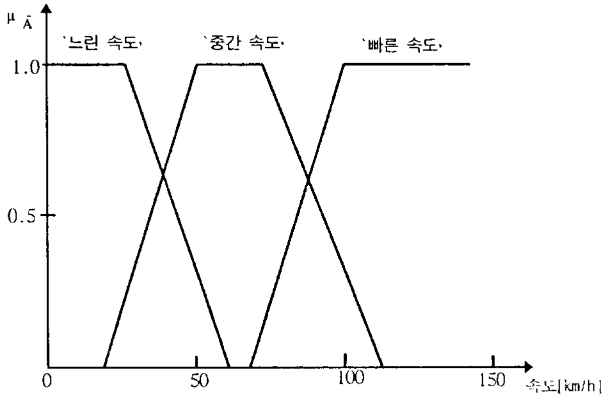


그림 2.2. 퍼지집합과 소속함수.

다음에는 퍼지집합론에서 정의된 몇가지 용어에 대하여 설명한다. 먼저, 퍼지집합$\tilde{A}$의 소속함수 값이 양수인 원소들의 집합을 지지(support)라 부르며, supp($\tilde{A}$)로 표기한다. 즉, 보통집합 supp($\tilde{A}$)는

$$\text{supp}(\tilde{A}) = \{x \in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) > 0\}$$

가 된다. 퍼지집합의 $\tilde{A}$소속함수 값중 최대값을 이 퍼지집합의 높이(height)라고 하며, hgt($\tilde{A}$)로 표기한다. 즉,

$$\text{hgt}(\tilde{A}) \sup_{x \in X} \mu_{\tilde{A}}(x)$$

가 된다. 퍼지집합$\tilde{A}$의 높이가 1인 경우, 즉,

$$\text{hgt}(\tilde{A}) \sup_{x \in X} \mu_{\tilde{A}}(x) = 1$$

인 경우, 퍼지집합$\tilde{A}$는 정규화(normalized) 되었다고 한다.

끝으로, 실수집합X의 임의의 실수를 x_1, $x_2(x_1 \le x_2)$라 할 때, 구간 $[x_1, x_2]$위의 모든 실수 x에 대하여, 퍼지집합 $\tilde{A}$의 소속함수가

$$\mu_{\tilde{A}}(x) \ge \min[\mu_{\tilde{A}}(x_1), \mu_{\tilde{A}}(x_2)]$$

를 만족할 때, $\tilde{A}$를 볼록퍼지집합(convex fuzzy set)이라 한다.

위에서 언급된 바와 같이, 퍼지집합은 보통집합의 확장으로 볼 수 있다. 따라서 퍼지집합사이의 관계(상등관계, 포함관계) 및 기본연산(교집합, 합집합 그리고 여집합)에 대한 정의도 소속함수를 사용하여 다음과 같이 정의된다.

먼저, $\tilde{A}$, $\tilde{B}$를 3개의 퍼지집합이라 한다. 이때, X의 모든 원소 x에 대하여 $\tilde{A}$, $\tilde{B}$의 소속함수 값이 같을 때, $\tilde{A}$와 $\tilde{B}$는 상등(equal)이라고 한다. 즉,

$$\tilde{A} = \tilde{B} \Leftrightarrow \mu_{\tilde{A}}(x) = \mu_{\tilde{B}}(x),\ \forall x \in X.$$

퍼지집합$\tilde{A}$가 퍼지집합$\tilde{B}$의 부분 집합(subset)이라 함은

$$\tilde{A} \subseteq \tilde{B} \Leftrightarrow \mu_{\tilde{A}}(x) \le \mu_{\tilde{B}}(x),\ \forall x \in X$$

와같이 정의된다.

퍼지집합 $\tilde{A}$, $\tilde{B}$의 교집합(intersection) $\tilde{A} \cap \tilde{B}$는 다음과 같은 소속함수에 의하여 결정되는 퍼지집합이다.

$$\mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x) = T[\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)]$$

여기서, 이항연산 $T : [0, 1] \times [0, 1] \to [0, 1]$는 t-norm (triangular-norm)이라 불리며, 다음과 같은 공리를 만족하여야 한다.

〈공리 T1〉 $T(0, a) = 0, T(1, a) = a$ (경계조건)

〈공리 T2〉 $T(a, b) = T(b, a)$ (교환성)

〈공리 T3〉 $a \le a'$이고 $b \le b'$이면 $T(a, b) \le T(a', b')$(단조성)

〈공리 T4〉 $T(a, T(b, c)) = T(T(a, b), c)$(결합성)

퍼지이론에서 주로 사용되는 t-norms에는 다음과 같은 연산자가 있다.

(1) 논리곱(logical product)

$a \wedge b = \min(a, b)$

(2) 대수곱(algebraic product)

$a \cdot b$

(3) 한계곱(bounded product)

$a \otimes b = \max(a+b-1, 0)$

(4) 격렬곱(drastic product)

$$a \wedge b = \begin{cases} a, b=1\text{일때} \\ b, a=1\text{일때} \\ 0,\ \text{기타} \end{cases}$$

여기서, $a, b \in [0, 1]$ 따라서 연산자로 논리곱을 사용한 경우, 퍼지집합 $\tilde{A}$, $\tilde{B}$의 교집합 $\tilde{A} \cap \tilde{B}$ 의 소속함수는 다음과 같다.

$$\mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x) \wedge \mu_{\tilde{B}}(x) = \min(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x))$$

그림 2.3(a)는 퍼지집합와 $\tilde{A}$와 $\tilde{B}$교집합의 예를 나타낸다.

퍼지집합 $\tilde{A}$, $\tilde{B}$의 합집합(union) $\tilde{A} \cup \tilde{B}$ 은 다음과 같은 소속함수에 의하여 결정되는 퍼지집합이다.

$$\mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(x) = \perp[\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)]$$

여기서, 이항연산 $\perp : [0, 1] \times [0, 1] \to [0, 1]$는 t-conorm (triangular-conorm) 또는 s-norm이라 불리며, 다음과 같은 공리를 만족하여야 한다.

〈공리 S1〉 $\perp(0, a) = a$, $\perp(a, 1) = 1$(경계조건)

〈공리 S2〉 $\perp(a, b) = \perp(b, a)$(교환성)

〈공리 S3〉 $a \le a'$이고 $b \le b'$이면 $\perp(a, b) \le \perp(a', b')$(단조성)

〈공리 S4〉 $\perp(a, \perp(b, c)) = \perp(\perp(a, b), c)$(결합성)

퍼지이론에서 주로 사용되는 t-conorms에는 다음과 같은 연산자가 있다.

(1) 논리합(logical sum)

$a \vee b = \max(a, b)$,

(2) 대수합(algebraic sum)

$a \dotplus b = a + b - ab$,

(3) 한계합(bounded sum)

$a \oplus b = \min(a+b, 1)$,

(4) 격렬합(drastic sum)

$$a \vee b = \begin{cases} a, & b=0\text{일때} \\ b, & a=0\text{일때}, \\ 0,\ \text{기타} \end{cases}$$

여기서, $a, b \in [0, 1]$. 따라서 연산자로 논리합을 사용한 경우, 퍼지집합 $\tilde{A}$, $\tilde{B}$의 합집합 $\tilde{A} \cup \tilde{B}$ 의 소속함수는 다음과 같다.

$$\mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x) \vee \mu_{\tilde{B}}(x) = \max(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x))$$

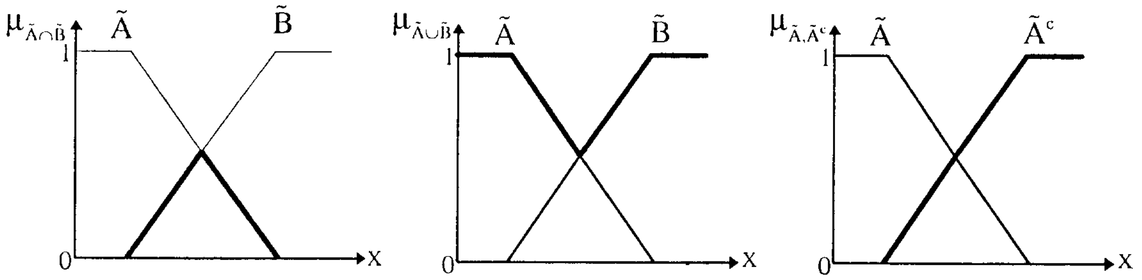
그림 2.3(b)는 퍼지집합$\tilde{A}$와 $\tilde{B}$의 합집합의 예를 나타낸다.

전체집합 X에 대한 퍼지집합 $\tilde{A}$ 의 여집합(complement) $\tilde{A}^c$는 퍼지집합$\tilde{A}$의 소속함수값 $\mu_{\tilde{A}}(x)$에 $c(\mu_{\tilde{A}}(x))$를 대응시키는 함수 $c : [0, 1] \to [0, 1]$에 의하여 정의된다. 이때, 함수 c는 다음과 같은 공리를 만족하여야 한다.

〈공리 c1〉 $c(0) = 1$ 그리고 $c(1) = 0$, 즉, 함수 c는 보통집합의 여집합을 규정할 수 있어야 한다(경계조건(boundary conditions)).

〈공리 c2〉 구간 [0,1]에 속하는 모든 소속함수값 $\mu_{\tilde{A}}(x_i)$ 및 $\mu_{\tilde{A}}(x_k)$ (단, $x_i, x_k \in X$)에 대하여$\mu_{\tilde{A}}(x_i) < \mu_{\tilde{A}}(x_k)$이면$c(\mu_{\tilde{A}}(x_i)) \ge C(\mu_{\tilde{A}}(x_k))$ 이다 (비증가조건(monotonic nonincreasing)).

따라서, 이와 같은 공리를 만족하는 함수 c의 설정에 따라



(a) $\tilde{A}\cap\tilde{B}$ (b) $\tilde{A}\cup\tilde{B}$ (c) $\tilde{A}^c$

그림 2.3. 퍼지집합의 연산.

여러가지의 여집합이 얻어질 수 있다[Klir]. 일반적으로 사용되고 있는 함수 c는 c(a) = 1−a로, 이를 이용하여 퍼지집합$\tilde{A}$의 여집합 $\tilde{A}^c$에 대한 소속함수를 구하면 다음과 같다.

$$\mu_{\tilde{A}^c}(x)=1-\mu_{\tilde{A}}(x),\ \forall x\in X$$

그림 2.3(c)는 퍼지집합$\tilde{A}$의 여집합 $\tilde{A}^c$의 예를 나타낸다. 앞에서 설명한 퍼지연산자의 특성은 참고문헌 [3, 4, 5]에 자세히 설명되어 있으므로 여기서는 생략하기로 한다.

다음으로 퍼지집합론에서 상당히 중요한 분해원리, 표현정리 그리고 확장원리에 대하여 설명한다. 먼저, 이들을 구체적으로 설명하기 전에 그 준비로, 퍼지집합과 보통집합을 관련시켜 주는 α-수준집합을 정의하기로 한다. X에 대한 퍼지집합$\tilde{A}$의 α-수준집합(α-level set) A_α는

$$A_\alpha=\{x\in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x)\geq\alpha\}\quad 0\leq\alpha\leq 1$$

로 정의된다. α−수준집합은 정의로부터 보통집합 임을 알 수 있으며, 다음과 같은 성질을 만족한다.

$$\alpha_1\leq\alpha_2\Rightarrow A_{\alpha_1}\supseteq A_{\alpha_2}$$

퍼지집합, $\tilde{A}$, $\tilde{B}$의 교집합 및 합집합의 α-수준집합은 다음과 같은 성질을 만족시킨다.

$$(\tilde{A}\cap\tilde{B})_\alpha=A_\alpha\cap B_\alpha$$
$$(\tilde{A}\cup\tilde{B})_\alpha=A_\alpha\cup B_\alpha$$

퍼지집합$\tilde{A}$는 α-수준집합을 이용하여

$$\tilde{A}=\bigcup_{\alpha\in[0,1]}\alpha A_\alpha$$

혹은

$$\mu_{\alpha A_\alpha}(x)=\alpha\mu_{A_\alpha}(x)=\alpha\chi_{A_\alpha}(x)$$

로 표현할 수 있다. 이것을 분해원리(resolution identity)라 한다. 따라서 퍼지집합은 소속함수에 의존하지 않고, X의 부분집합의 족을 이용하여 표현할 수 있다. 이를 표현정리(representation theorem)라 부른다.

여기서 우리는 "보통집합위에서 정의된 기존의 수학이론을 퍼지집합에서도 사용할 수 있다면 좋지 않겠는가?"하는 생각을 할을 수 있다. 이러한 생각에 대하여 자데(Zadeh)의 확장원리는 명쾌한 해결방안을 제시하고 있다. 다음에는 함수의 확장원리에 대하여 구체적으로 알아보기로 한다.

X에서 Y로의 함수 f : X→Y에 대하여, 함수 f는 X의 원소 x를 Y의 원소 y=f(x)에 대응시키는 것이므로, X의 부분집합A의 함수 f에 의한 상은

$$f(A)\equiv\{y\in Y \mid y=f(x),\ x\in A\}$$

와 같다고 볼 수 있다. 이와 같이 변수로서 부분집합을 생각하면 함수 f는 X의 부분집합A를 Y의 부분집합 f(A)에 대응시키는 함수로 볼 수 있다. 퍼지집합론에서의 확장원리(extension principle)는 함수 f를 X의퍼지집합$\tilde{A}$를 Y 의 퍼지집합 f($\tilde{A}$)로 대응시키는 함수로 확장하는 것으로, 소속함수는 다음과 같이 정의된다.

$$\mu_{f(\tilde{A})}(y)=\begin{cases}\sup\limits_{y=f(x)}\ \mu_{\tilde{A}}(x) & f^{-1}(y)\neq\phi\\ 0 & f^{-1}(y)=\phi\end{cases}$$

즉 y=f(x)가 되는 x가 여러개 존재하는 경우, 그러한 x에 대한 소속함수 값의 상한치를 $\mu_{f(\tilde{A})}(y)$로 정한다. 예를들면, $f(x)=x^2$에 대하여, $\tilde{A}$=0.1/(−3)+0.5/(−1)+1.0/0+0.6/1+0.3/3인 경우, 확장원리에 의해 f($\tilde{A}$)=1.0/0+0.6/1+0.3/3이 된다.

다음에는 '약 10' 또는 '4000억정도'와 같은 퍼지수에 대하여 알아 본다. 퍼지 수는 듀보아와 프라드(D. Dubois and H. Prade)에 의해 도입된 개념으로, 실수 집합을 전체 집합으로 하는 정규화된 볼록 퍼지집합중에서 구분적으로 연속인 소속함수를 갖는 퍼지 집합을 퍼지수(fuzzy number)라 한다. 퍼지수의 사칙연산(+, −, x, /)은 앞에서 설명한 α−수준집합 및 확장원리를 적용하여 쉽게 계산할 수 있다. 예를 들어, $\tilde{2}$=0.5/1+1/2+0.5/3 그리고 $\tilde{3}$=0.4/2+1/3+0.4/4일때, 확장원리를 적용하면, $\tilde{2}+\tilde{3}$=0.4/3+0.5/4+1/

$5+0.5/6+0.4/7$가 되어 $\tilde{5}$ 이라할 수 있다.

2.2. 퍼지관계

우리는 일상생활속에서 'x는 y와 같다' 또는 'x는 y와 거의 같다'와 같은 표현을 자주 사용하고 있다. 이 절에서는, 이와 같은 관계 및 퍼지관계에 대하여 알아 본다. 우선, 이들을 설명하기 전에 곱집합을 정의하기로 한다. 두개의 집합 X와Y의 모든 원소로부터 이루어 지는 순서쌍들의 집합을 곱집합(Cartesian product)이라 하며

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$$

와 같이 정의된다. 위의 예, 'x는 y와 같다' 에서와 같이 집합 X와Y의 원소 x와y사이에 어떤 관계가 있을 때, 이들의 순서쌍들의 모임을 관계(relation) R이라 하며, $(x, y) \in R$ 또는 xRy로 표시한다. 따라서 R은 곱집합 $X \times Y$의 부분집합이 된다. 그리고, 'x는 y와 거의 같다'와 같은 애매한 관계는 퍼지관계라 하며 다음과 같이 정의된다. 두개의 집합 X와 Y사이의 퍼지관계 $\tilde{R}$ 는 $X \times Y$상의 퍼지부분집합으로, x와 y사이의 관계정도를 나타내는 소속함수는

$$\mu_{\tilde{R}}(x, y) : X \times Y \rightarrow [0, 1]$$

와 같이 나타내진다. 이러한 퍼지관계도 퍼지집합이므로, 퍼지관계의 연산은 앞에서 설명한 퍼지집합의 연산 및 확장원리등을 그대로 적용시킬 수 있다. 여기서는 2개의 집합사이의 관계만을 고려하였으나, 이러한 개념을 다수의 집합사이의 관계로도 확장할 수 있다.

다음으로 $X \times X$상의 퍼지관계 $\tilde{R}$의 몇가지 기본적인 성질을 정의하기로 한다.

(1) 퍼지관계 $\tilde{R}$ 은 $\mu_{\tilde{R}}(x, x) = 1$, $\forall x \in X$일때, 반사적(reflective)이라 한다.
(2) 퍼지관계 $\tilde{R}$은 $\mu_{\tilde{R}}(x, y) = \mu_{\tilde{R}}(y, x)$, $\forall x, y \in X$일때, 대칭적(symmetric)이라 한다.
(3) 퍼지관계 $\tilde{R}$은 $\mu_{\tilde{R}}(x, z) \geq \max_y \min(\mu_{\tilde{R}}(x, y), \mu_{\tilde{R}}(y, z))$ $\forall x, y, z \in X$일때, 이행적(transitive)이라한다.

X에 있어서의 퍼지관계 $\tilde{R}$가 위의 세가지 성질을 모두 만족할 때, 유사관계(similarity relation) $\tilde{S}$ 라 하며, 퍼지동치관계(fuzzy equivalence relation)라고도 한다.

이러한 퍼지관계는 통상적 관계의 일반화이므로 합성이 가능하다. $X \times Y$에서의 퍼지관계 $\tilde{R}$ 과 $Y \times Z$에서의 퍼지관계 $\tilde{S}$에 대하여, 두관계의 최대-최소합성(max-min composition) $\tilde{R} \circ \tilde{S}$ 은 $X \times Z$위에서의 퍼지관계로 다음과 같이 정의된다.

$$\tilde{R} \circ \tilde{S} \Leftrightarrow \mu_{\tilde{R} \circ \tilde{S}}(x, z) = \max_y \min(\mu_{\tilde{R}}(x, y), \mu_{\tilde{S}}(y, z))$$

예를 들면, $\tilde{R} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.5 \\ 1.0 & 0.6 \end{bmatrix}$, $\tilde{S} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.1 & 1.0 \end{bmatrix}$인 경우,

$$\tilde{R} \circ \tilde{S} = \begin{bmatrix} 0.2 \vee 0.1 & 0.2 \vee 0.5 \\ 0.8 \vee 0.1 & 0.3 \vee 0.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.5 \\ 0.8 & 0.6 \end{bmatrix}$$

이 된다. 퍼지관계의 합성법에는 위에서 정의한 방법이외에도 많은 변형(예 : max-product합성, min-max합성, min-min합성, max-max합성등)이 제안되어 있으나, 구체적인 설명은 생략하기로 한다.

다음으로, 퍼지추론에 있어서 중요한 역할을 하는 두 가지 정의, 즉 사영 및 원형확장에 대하여 설명하기로 한다. $\tilde{R}$을 곱집합 $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$위에서 정의된 퍼지관계라 하고, 그 소속함수를 $\mu_{\tilde{R}}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$이라 할 때, $\tilde{R}$의 $X_{i_1} \times X_{i_2} \times X_{i_k}$로의 사영(projection) $\mathrm{proj}[\tilde{R} : X_{i_1}, X_{i_2}, \cdots, X_{i_k}]$은 다음과 같이 정의되는 $X_{i_1} \times X_{i_2} \times X_{i_k}$위에서의 퍼지관계이다.

$$\mathrm{proj}[\tilde{R} : X_{i_1}, X_{i_2}, \cdots, X_{i_k}] = \int_{X_{i1} \times X_{i2} \times \cdots \times X_{ik}} \sup_{x_{j1}, x_{j2}, \cdots, x_{jl}} \mu_{\tilde{R}}(x_1, x_2, \cdots, x_n)/(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

이때, $X_{j_1}, X_{j_2}, \cdots, X_{j_l}$은 $X_1, X_2, \cdots, X_n$에서 $X_{i_1}, X_{i_2}, \cdots, X_{i_l}$을 제외시킨 나머지를 의미한다.

사영에 대한 반대의 개념이 원형확장이다., 즉, $\tilde{R}$을 $X_{i_1}, X_{i_2} \cdots, X_{i_k}$위에서의 퍼지관계라 하고, 그 소속함수를 $\mu_{\tilde{R}\, X_{i1} \times X_{i2} \times \cdots \times X_{ik}}(x_{i1} x_{i2}, \cdots, x_{ik})$라 할 때, $\tilde{R}$의 $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$로의 원형확장(cylindrical extension) $C(\tilde{R})$은 다음과 같이 정의되는 $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$위에서의 퍼지관계이다.

$$C(\tilde{R}) = \int_{X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n} \sup \mu_{\tilde{R}}(x_{i1}, x_{i2}, \cdots, x_{ik}) /(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

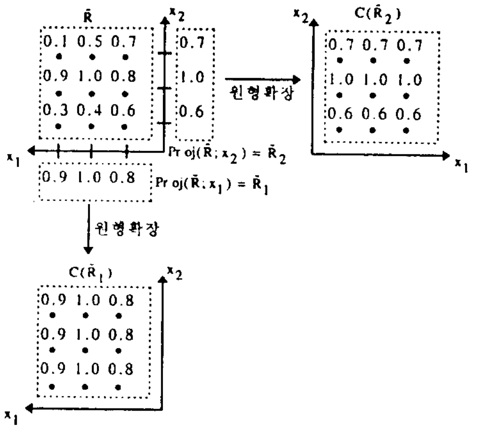


그림 2.4는 $X_1 \times X_2$위에서의 퍼지관계 $\tilde{R}$의 X_1, X_2로 의 사영 및 사영된 결과의 원형확장된 결과를 나타내고 있다.

2.3. 퍼지논리 및 퍼지추론

논리(logic)란 인간의 사고 방법과 원리를 연구하는 학문으로, 고전논리에서는 참/거짓을 명확히 판단할 수 있는 문장, 즉, 명제(proposition) P 및 이러한 명제들을 '그리고', '또는', '~이면 ~이다'등의 접속어를 이용하여 연결시킨 명제인 복합명제를 다루었다. 일반적으로 명제 P는 P="x is A"로 표현되며, 여기서 x는 주어를, A는 술어(predicate)를 나타낸다. 명제의 참/거짓을 문제로 삼는 논리학에서는 명제의 참/거짓을 수치로 나타낸 진리값(truth value)으로, 참(1)과 거짓(0)을 사용한 2치논리(two0valued logic), 참, 거짓 및 부정(indeterminate)을 도입한 3치논리(three-valued logic)를 도입하였고, 더 나아가서는 다치논리(many-valued logic) 및 무한치논리(infinite-valued logic)까지 확장하여 사용하고 있었다.

여기서 다음과 같은 두개의 예를 생각하기로 한다.

P_1="한국인중 퍼지이론을 연구하는 사람은 1만명이다"

P_2="한국인중 퍼지이론을 연구하는 사람은 많다"

명제 P_1은 참인지 거짓인지를 명확히 판단할 수 있는 문장이지만, P_2는 술어인 '많다'가 애매성을 포함하고 있어, 참/거짓을 고전적 방법론으로는 판단할 수 없음을 알 수 있다. 이에 대하여, 많은 학자들이 명제의 진리값(truth value)으로 참, 거짓 및 부정(indeterminate)을 도입한 3치논리를 도입하였고, 더 나아가서는 다치논리 및 무한치논리까지 확장하여 사용하고 있었다. 퍼지논리(fuzzy logic)란, 이와같은 애매한 논리를 표현하기 위하여 다치논리에 퍼지집합을 도입하여 고전논리를 확장시킨 것으로, 분명한 정의는 없지만, 명제의 진리값을 결정하는 방법과 추론 방법에 따라 다양한 논의가 전개되고 있다. 이러한 퍼지논리를 특징짓는 기본적 성질로는, (i)퍼지명제(fuzzy proposition), (ii)언어적 진리값(linguistic truth value) 그리고 (iii)근사적 추론(approximate reasoning)을 들 수 있다. 이하에서는 이들에 대하여 알아보기로 한다.

2.3.1 퍼지명제

퍼지명제(fuzzy proposition) $\tilde{P}$란, 위에서 설명한 명제 P_2="한국인중 퍼지이론을 연구하는 사람은 많다"와 같이 술어가 퍼지집합으로 표현되는 명제를 말하며, 일반적으로

$$\tilde{P}(x) = \text{"x is } \tilde{A}\text{"}$$

로 표현된다. 여기서, x는 어떤 대상을 나타내며, $\tilde{A}$는 전체집합 X위에서의 퍼지집합으로 나타내지는 퍼지술어(fuzzy prediate)이다. 퍼지술어는 퍼지변수(fuzzy variable) 또는 언어변수(linguistic variable)라고도 한다. 여기서, 명제 $\tilde{P}(x)$의 진리값은 x가 퍼지집합 $\tilde{A}$에 소속할 가능성, 즉, 소속함수값으로 볼 수 있으므로, 명제$\tilde{P}(x)$="x is $\tilde{A}$" 를, 간단히 $\tilde{P}(x)=\tilde{A}$로 표시하기도 한다.

다음으로 퍼지명제의 변형에 대하여 알아본다. 즉, P_3="한국인중 퍼지이론을 연구하는 사람은 매우 많다"에서와 같이 퍼지명제의 술어부분에 '매우', '약간', '다소' 등등과 같은 수식어를 붙혀 퍼지술어가 의미하는 내용을 변형시켰을 때, 소속함수를 어떻게 정의하면 되는가 하는 문제이다. 일반적으로 퍼지명제의 변형은

$$\tilde{P}(x) = \text{"x is m}\tilde{A}\text{"}$$

로 나타낸다. 여기서, m은 변형자(modifier)를 나타낸다. 예를들어, m이 '매우', '약간' 및 '~이 아니다(not)' 일 때, m$\tilde{A}$의 소속함수를 다음과 같이 정할 수 있다.

$$\mu_{\text{매우}\,\tilde{A}}(X) = (\mu_{\tilde{A}}(X))^2$$
$$\mu_{\text{약간}\,\tilde{A}}(X) = (\mu_{\tilde{A}}(X))^{1/2}$$
$$\mu_{\text{not}\,\tilde{A}}(X) = 1 - \mu_{\tilde{A}}(X)$$

그림 2.5는 이들의 소속함수를 나타낸다.

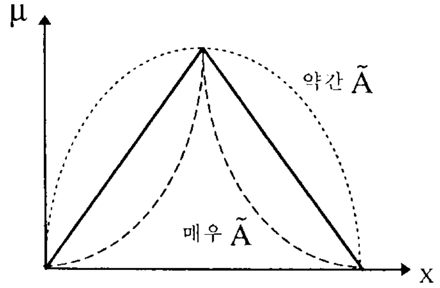


그림 2.5. '매우 $\tilde{A}$', '약간 $\tilde{A}$' 및 'not $\tilde{A}$'의 소속함수의 예.

이러한 변형자중에는 비퍼지집합을 퍼지화하거나 퍼지집합을 더욱 더 퍼지화시키는 퍼지화(fuzzification) F가 있으며, 다음과 같이 정의된다.

$$F(\tilde{A}\,;\tilde{K}) \sum_i \mu_{\tilde{A}}(x_i)\,\tilde{K}(x_i)$$

여기서, 퍼지집합 $\tilde{K}$는 F의 핵(kernel)이라 부른다. 예를들면, 단 하나의 원소를 갖는 집합 $\tilde{A}$ =1/5, 및 핵이$\tilde{K}(3)$ =0.5/2+1/3+0.5/4 인 경우, $F(\tilde{A}\,;\tilde{K})$ =0.5/2+1/3+0.5/4가 됨을 알 수 있다. 퍼지화는 퍼지제어등에서 많이 사용되고 있다.

다음에는 두개의 명제가 '그리고', '또는', 및 '~이면'과 같은 논리결합자에 의하여 결합된 복합퍼지명제(composite fuzzy proposition)에 대하여 알아 본다. 퍼지명제 $\tilde{P}$="x is $\tilde{A}$" 및 $\tilde{Q}$="y is $\tilde{B}$"에 대하여, 논리곱(conjunction)인 '그리고(and)', 논리합(disjunction)인 '또는(or)', 및 암시

(implication)인 '～이면(→)'으로 결합된 복합명제는 다음과 같이 나타내진다.

(1) $\tilde{P}$ and $\tilde{Q}$="x is $\tilde{A}$" and "y is $\tilde{B}$"

="(x, y) is $\tilde{R}_{\tilde{P} \text{ and } \tilde{Q}}$"

단, $\mu_{\tilde{R}_{\tilde{P} \text{ and } \tilde{Q}}}(x, y)=\mu_{\tilde{A}}(x) \wedge \mu_{\tilde{B}}(y)$

(2) $\tilde{P}$ or $\tilde{Q}$="x is $\tilde{A}$" or "y is $\tilde{B}$"

="(x, y) is $\tilde{R}_{\tilde{P} \text{ or } \tilde{Q}}$"

단, $\mu_{\tilde{R}_{\tilde{P} \text{ or } \tilde{Q}}}(x, y)=\mu_{\tilde{A}}(x) \vee \mu_{\tilde{B}}(y)$

(3) $\tilde{P} \rightarrow \tilde{Q}$=if "x is $\tilde{A}$" then "y is $\tilde{B}$"

="(x, y) is $\tilde{R}_{\tilde{P} \rightarrow \tilde{Q}}$"

단, $x \in X$, $y \in Y$이며, $\tilde{R}_{\tilde{P} \text{ and } \tilde{Q}}$, $\tilde{R}_{\tilde{P} \text{ or } \tilde{Q}}$ 및 $\tilde{R}_{\tilde{P} \rightarrow \tilde{Q}}$ 는 곱집합 X × Y상의 퍼지관계이다. 퍼지조건명제 $\tilde{P} \rightarrow \tilde{Q}$에서 $\tilde{P}$는 조건부라하며, $\tilde{Q}$는 결론부라 한다. 고전논리에서

$$P \rightarrow Q(P \text{ and } Q) \text{ or } (\text{not } P)$$

이므로, 이를 퍼지조건명제에 그대로 적용시키면

$\tilde{P} \rightarrow \tilde{Q}=(\tilde{P}$ and $\tilde{Q})$ or (not $\tilde{P}$)

=("x is $\tilde{A}$" and "y is $\tilde{B}$") or not("x is $\tilde{A}$")

="(x, y) is $\tilde{R}_{(\tilde{P} \text{ and } \tilde{Q}) \text{ or } (\text{not } \tilde{P})}$"

단, $\mu_{\tilde{R}_{(\tilde{P} \text{ and } \tilde{Q}) \text{or} (\text{not } \tilde{P})}}(x, y)=(\mu_{\tilde{A}}(x) \wedge \mu_{\tilde{B}}(y)) \vee (1-\mu_{\tilde{A}}(x))$

이 된다. 그러나 퍼지제어에서는 $\tilde{P} \rightarrow \tilde{Q}$ 로 맘다니(Mamdani)가 제안한

$$\tilde{P} \rightarrow \tilde{Q}=\tilde{R}_{\tilde{P} \times \tilde{Q}}$$

단, $\mu_{\tilde{R}_{\tilde{P} \times \tilde{Q}}}(x, y)=\mu_{\tilde{A}}(x) \wedge \mu_{\tilde{B}}(y)$을 주로 사용하고 있다.

2.3.2 언어적 진리값

퍼지명제의 참/거짓의 정도를 나타내는 것이 퍼지진리값(fuzzy truth value)이다. 퍼지진리값에는 수치적진리값(numerical truth value) 및 언어적진리값(linguistic truth value)이 있다. 이절에서는 이들에 대하여 알아 보기로 한다. 퍼지명제 $\tilde{P}$="x is$\tilde{A}$ "의 진리값으로, 0과 1사이의 실수값을 할당하는 것이 수치적 진리값 $N_t(\tilde{P})$ (단, $0 \leq N_t(\tilde{P}) \leq 1$)이다. 예를 들어, $\tilde{P}$="x is 3에 가까운 정수"="x is $\tilde{A}$", $\tilde{A}$ =0.1/1+0.5/2+1/3+0.5/4+0.1/5인 경우, N_t("2 is $\tilde{A}$)=$\mu_{\tilde{A}}(2)=0.5$가 된다. 한편, 복합명제, $\tilde{P}$ and $\tilde{Q}$, $\tilde{P}$ or $\tilde{Q}$, $\tilde{P} \rightarrow \tilde{Q}$ 및 not$\tilde{P}$ 의 수치적 진리값은 다음과 같이 정할 수 있다.

$$N_t(\tilde{P} \text{ and } \tilde{Q})=N_t(\tilde{P}) \wedge N_t(\tilde{Q})$$
$$N_t(\tilde{P} \text{ or } \tilde{Q})=N_t(\tilde{P}) \vee N_t(\tilde{Q})$$
$$N_t(\tilde{P} \rightarrow \tilde{Q})=1 \wedge (1-N_t(\tilde{P})+N_t(\tilde{Q}))$$
$$N_t(\text{not } \tilde{P})=1-N_t(\tilde{P})$$

언어적 진리값은, 퍼지명제의 진리값으로 진리값집합 [0, 1]위의 퍼지집합인 언어변수를 사용하며, 이러한 언어변수에는 다음과 같은 것들이 있다.

{절대적 참, 매우 참, 약간 참, 참, 약간 거짓, 거짓, 매우 거짓, 절대적 거짓}

이들 퍼지집합중 매우 참/거짓, 약간 참/거짓의 소속함수는 2.3.1절에서 설명한 변형자의 정의를 이용하여 구할 수 있으므로, 여기서는 절대적 참/거짓의 소속함수만을 다음과 같이 정의하기로 한다.

$$\mu_{\text{절대적 참}}(x)=\begin{cases} 1 & (x=1) \\ 0 & (x \neq 1) \end{cases}$$

$$\mu_{\text{절대적 거짓}}(x)=\begin{cases} 1 & (x=1) \\ 0 & (x \neq 1) \end{cases}$$

또한 참 과 거짓의 소속함수는 다음의 관계를 만족한다.

$$\mu_{\text{절대적 거짓}}(x)=1-\mu_{\text{절대적 참}}(x)$$

언어적 진리값을 $L_t(\tilde{P})$라 할 때, 복합명제, $\tilde{P}$ and $\tilde{Q}$, $\tilde{P}$ or $\tilde{Q}$, $\tilde{P} \rightarrow \tilde{Q}$ 및 not$\tilde{P}$의 언어적 진리값은 다음과 같이 정할 수 있다.

$$L_t(\tilde{P} \text{ and } \tilde{Q})=L_t(\tilde{P}) \wedge L_t(\tilde{Q})$$
$$L_t(\tilde{P} \text{ or } \tilde{Q})=L_t(\tilde{P}) \vee L_t(\tilde{Q})$$
$$L_t(\tilde{P} \rightarrow \tilde{Q})=1 \wedge (1-L_t(\tilde{P})+L_t(\tilde{Q}))$$
$$L_t(\text{not } \tilde{P})=1-L_t(\tilde{P})$$

이들의 소속함수는 확장원리를 이용하여 구할 수 있으며, 이는 생략하기로 한다. 명제 내에

$$\mu_{L_t(\tilde{P}) \wedge L_t(\tilde{Q})}(z)=\bigvee_{x \wedge y=z}(\mu_{L_t(\tilde{P})}(x) \wedge \mu_{L_t(\tilde{Q})}(y))$$

$$\mu_{L_t(\tilde{P}) \vee L_t(\tilde{Q})}(z)=\bigvee_{x \vee y=z}(\mu_{L_t(\tilde{P})}(x) \wedge \mu_{L_t(\tilde{Q})}(y))$$

$$\mu_{1 \wedge (1-L_t(\tilde{P})+L_t(\tilde{Q}))}(z)=\bigvee_{1 \wedge (1-x+y)=z}(\mu_{L_t(\tilde{P})}(x) \wedge \mu_{L_t(\tilde{Q})}(y))$$

$$\mu_{1-L_t(\tilde{P})}(x)=\mu_{L_t(\tilde{P})}(1-x)$$

2.3.3 퍼지추론

"P이면 Q이다"와 같은 조건명제를 이용하여 이루어지는 추론에는, 연역추론(modus ponens)과 대우추론(modus tollens)이 있다. 연역추론은 "P이면 Q가 참"일때, "P가 참"이면 "Q가 참"이라는 것을 추론하는 것으로,

(전제 1) P → Q

(전제 2) P

결론 Q

또는 논리식

$((P \to Q) \text{ and } P) \to Q$

으로 나타낸다. 한편, 대우추론은 “P이면 Q가 참”일때, “Q가 거짓”이면 “P가 거짓”이라는 것을 추론하는 것으로,

$$\begin{array}{ll} (\text{전제 } 1) & P \to Q \\ (\text{전제 } 2) & \overline{Q} \\ \hline \text{결론} & \overline{P} \end{array}$$

또는 논리식

$((P \to Q) \text{ and } \overline{Q}) \to \overline{P}$

으로 나타낸다. 이와같은 비퍼지명제에 대한 연역추론 및 대우추론을 퍼지명제로 확장시킨 것이 일반화된 연역추론(generalized modus ponens) 및 일반화된 대우추론(generalized modus tollens)이다. 일반화된 대우추론은 고장진단과 같은 분야에서 사용되고는 있지만, 그다지 사용되지 않고 있으므로, 여기서는 일반화된 연역추론법에 근거한 퍼지추론(fuzzy inference) 혹은 근사추론(approximate reasoning)에 대하여만 설명하기로 한다. 일반화된 연역추론

$$\begin{array}{ll} (\text{전제 } 1) & \tilde{P} \to \tilde{Q} : \text{“if x is } \tilde{A} \text{ then y is } \tilde{B}\text{”} \\ (\text{전제 } 2) & \tilde{P}^* : \text{“x is } \tilde{A}^*\text{”} \\ \hline \text{결론} & \tilde{Q}^* : \text{“y is } \tilde{B}\text{”} \end{array}$$

에 있어서, 결론 $\tilde{Q}^*$를 구하는 방법으로, $\tilde{P} \to \tilde{Q}$ 및 $\tilde{P}^*$를 이용한 퍼지관계의 합성연산으로부터 직접 구하는 직접법(direct method)이 있고, 다른 하나는 퍼지명제의 언어적진리값을 이용하여, (i) $\tilde{P}$의 $\tilde{P}^*$에 대한 상대적 진리값 $L(\tilde{P})$을 구하고, (ii) $L(\tilde{P} \to \tilde{Q})$ 및 $L(\tilde{P})$를 이용하여 $\tilde{Q}$의 진리값 $L(\tilde{Q})$을 구한 후, (iii) $L(\tilde{Q})$를 이용하여 $\tilde{Q}$로부터 결론 $\tilde{Q}^*$를 구하는 간접법(indirect method)이 있다[6, 7]. 이하에서는 간접법에 대한 구체적 설명은 생략하고, 직접법에 대하여 간략하게 알아보기로 한다.

직접법은 퍼지집합 $\tilde{P} \to \tilde{Q}$ 및 $\tilde{P}^*$의 합성연산에 의해 이루어지며, 결론 $\tilde{Q}^*$는

$$\tilde{Q}^* = \tilde{P}^* \circ (\tilde{P} \to \tilde{Q})$$

로 구해진다. 여기서, 조건명제 $\tilde{P} \to \tilde{Q}$에 대한 구체적 예로 맘다니(Mamdani)가 제안한

$$\tilde{P} \to \tilde{Q} = \tilde{R}_{\tilde{P} \times \tilde{Q}}$$

를 사용하면, $\tilde{Q}^*$의 소속함수는

$$\begin{aligned} \mu_{\tilde{R}_{\tilde{Q}^*}}(y) &= \max_{x}(\mu_{\tilde{A}^*}(x) \wedge \mu_{\tilde{A}}(x) \wedge \mu_{\tilde{B}}(y)) \\ &= \max_{x}\{\mu_{\tilde{A}^*}(x) \wedge \mu_{\tilde{A}}(x)\} \wedge \mu_{\tilde{B}}(y)) \\ &= \omega \wedge \mu_{\tilde{B}}(y) \end{aligned}$$

단, $\omega = \max_{x}\{\mu_{\tilde{A}^*}(x) \wedge \mu_{\tilde{A}}(x)\}$

로 된다. 여기서, ω는 $\tilde{P}^*$의 $\tilde{P}$에 대한 적합도를 나타내므로, 결론 $\tilde{Q}^*$는 $\tilde{Q}$의 ω보다 큰 부분을 잘라낸 형태와 같다는 것을 알 수 있으며, 그림 2.6은 이를 나타내고 있다.

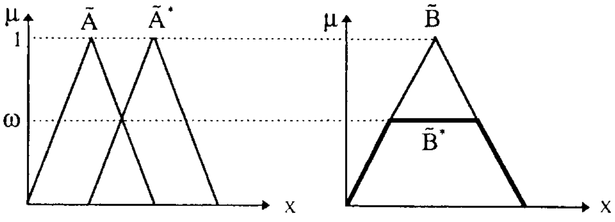


그림 2.6. 맘다니(Mamdani)의 추론법.

3. 퍼지척도 및 퍼지적분

2장에서는, 확실한 원소 x가 경계가 애매한 집합에 어느 정도 속하는 지를 다루는 불확실성(vagueness)에 대하여 살펴 보았다. 3장에서는 퍼지이론이 다루고 있는 또 하나의 불확실성(ambiguity)을 다루는 퍼지척도 및 퍼지적분에 대하여 알아 보기로 한다. 퍼지척도 및 퍼지적분에 대한 구체적 설명에 앞서, 이들이 다루고자하는 불확실성에 대하여 간단한 예를 들어 알아보기로 한다. 예로서, 어느 골동품 가게에 진열되어 있는 하나의 도자기를 생각해 보자[8]. 이것이 만들어진 연대를 x년전이라고 할 때, x는 100일 수도 있고, 300, 500일 수도 있다. 즉, 도자기가 만들어진 연대 x는 확실하게 정해져 있지만, 우리가 그 연대를 확실히 알 수 없으므로 x에 대하여 수많은 가능성이 있을 수 있다. 이와 같이 선택할 수 있는 무수의 가능성 가운데, 어느 것인지를 특정할 수 없는 불확실성을 ambiguity라 하며, 이러한 불확실성의 정도를 수학적으로 표현하고자 하는 이론이 퍼지척도론이다. 이와 같이 불확실성을 지닌 요소x가, 전체집합 X의 부분집합 A에 속하는 정도를 나타내는 것이 퍼지척도이다. 그림 3.1은 퍼지척도론에서의 불확실성을 나타낸다.

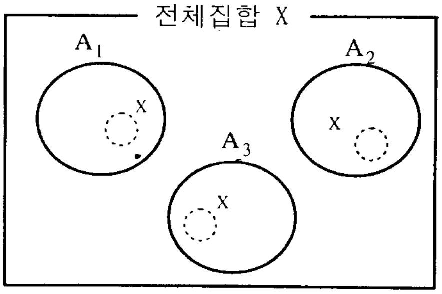


그림 3.1. 퍼지척도에서의 불확실성.

3.1. 퍼지척도

일반적으로 척도(measure)란 길이, 면적, 체적등을 측정

하는 자(scale)를 말한다. 고전적 척도(예 : 확률)의 특징중의 하나는 가법성(additivity)이라 할 수 있다. 여기서 가법성이란 X의 어느 원소 x가 X의 부분집합 A, B(단, $A \cap B = \phi$)에 속하는 정도를 각각 $\lambda(A)$, $\lambda(B)$라 할때, x가 A와 B의 합집합에 속하는 정도는 $\lambda(A \cup B) = \lambda(A) + \lambda(B)$가 되는 성질을 말한다.

퍼지척도는 1972년 일본 동경공업대학의 수게노(Sugeno) 교수에 의하여 제안된 비가법적 집합함수(Nonadditive set function)[2]로서, 고전적 척도(예 : 확률)가 만족 가법성(additivity)을 완화시킨 척도이다. 퍼지척도를 정의하기 전에, 퍼지척도가 정의되는 공간인 보렐체(Borel field,혹은 σ-field) Ω를 정의하기로 한다. Ω는 전체집합 X의 부분집합으로 구성되는 족(family)으로 다음과 같은 성질을 만족시킨다.

(1) $\phi \in \Omega$

(2) $A \in \Omega \rightarrow A^c \in \Omega$

(3) $A, B \in \Omega \rightarrow A \cup B \in \Omega$

전체집합 X가 유한집합인 경우, Ω는 X의 멱집합(power set)과 일치함을 알 수 있다. 전체집합을 X라 할 때, 수게노에 의한 퍼지척도(fuzzy measure) $\lambda : \Omega \rightarrow [0, 1]$는 다음과 같은 성질을 만족하는 집합의 함수이다.

(1) $\lambda(\phi) = 0$, $\lambda(X) = 1$(경계조건)

(2) $A \subset B$(단, $A, B \in \Omega$, $A \cap B = \phi$) $\Rightarrow \lambda(A) \leq \lambda(B)$(단조성(monotonicity))

(3) $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$혹은 $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$이면 $\lim_n \lambda(A_n) = \lambda(\lim_n A_n)$(연속성)

여기서, 조건 (2)가 단조성을 나타내고 있어, 이러한 퍼지척도를 단조퍼지척도(monotonic fuzzy measure)라 부르기도 한다. 전체집합 X가 유한집합인 경우에는 연속성의 조건 (3)이 불필요하게 된다. 이하에서는 설명상의 편의 및 실제 응용에 있어서도 X가 유한집합인 경우에 국한되어 있음을 고려하여 전체집합 X를 유한집합이라고 가정한다.

여기서, 퍼지척도가 적용될 수 있는 또다른 상황을 생각해 보기로 한다. 어느 회사의 숙련된 조립공 R씨가 오른손을 써서 단위 시간당 조립하는 갯수를 $g(A_1)$, 왼손을 써서 단위 시간당 조립하는 갯수를 $g(A_2)$라 하자. 이때, R씨가 두손을 다 사용하여 조립하는 갯수는 다음과 같은 경우가 있을 수 있다.

(1) $g(A_1 \cup A_2) \geq g(A_1) \vee g(A_2)$

(2) $g(A_1 \cup A_2) < g(A_1) + g(A_2)$

(3) $g(A_1 \cup A_2) > g(A_1) + g(A_2)$

(4) $g(A_1 \cup A_2) = g(A_1) + g(A_2)$

(5) $g(A_1 \cup A_2) < g(A_1) \wedge g(A_2)$

여기서 $\vee$, $\wedge$는 각각 최대 및 최소를 의미한다.

위의 (1), (2), (3), (4)는 단조퍼지척도로 설명이 가능하지만, (5)는 불가능하게 된다. 실제로 (5)의 경우는 작업환경이 양손을 사용하는 것을 허용하지 않는 상황에서 있을 수 있는 일이므로, 이를 표현할 수 있는 퍼지척도의 정의가 필요하다. 이에, 최근 무로후시(Murofushi)등은, 퍼지척도를 확장한 비단조퍼지척도(nonmonotonic fuzzy measure) g를 제안하였다[9]. 비단조퍼지척도는 Ω에서 실수전체의 집합 R로의 함수, 즉, $g : \Omega \rightarrow R$로 다음의 조건만을 만족하는 보다 일반적인 퍼지척도라 할 수 있다.

(1) $g(\phi) = 0$

비단조퍼지척도는 부분집합간의 상호작용을 나타내는 양이라고 해석되고 있다.

퍼지척도 g에 대하여,

$g^d(A) \equiv 1 - g(A_c)$

로 주어지는 집합함수 g^d 또한 퍼지척도가 된다. 여기서 g와 g^d는 쌍대(dual) 관계라고 한다.

위에서 우리는 퍼지척도의 일반적인 정의에 대하여 알아보았다. 이하에서는 이러한 퍼지척도의 범주에 속하는 몇가지의 구체적인 예를 들어 보기로 한다.

3.1.1 확률척도

확률척도에 대한 해석에는 빈도론적 확률, 주관확률[22] 등의 여러가지가 있지만, 여기서는 콜모고로프(Kolmogorov)[21]의 척도론적확률론을 가지고 설명하기로 한다. 가측공간 (X, Ω)상에서의 확률척도 P는 다음조건을 만족하는 Ω상의 실수함수 $P : \Omega \rightarrow [0, 1]$이다.

(1) $P(\phi) = 0$, $P(X) = 1$

(2) $A_i, A_j \in \Omega$, $A_i \cap A_j = \phi \Rightarrow P(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$

확률척도의 특성은 위의 (2)에서 알 수 있듯이 가법성(additivity)을 만족한다는 것이다. 이러한 확률척도는 퍼지척도의 공리를 만족하고 있으므로 퍼지척도는 확률척도의 확장형이라 볼 수 있다.

3.1.2 λ-퍼지척도

λ-퍼지척도는 수게노(Sugeno)에 의하여 제안된 퍼지척도로 다음과 같이 정의된다[2].

$$A_i \subseteq X,\ A_i \cap A_j = \phi (i \neq j) \Rightarrow g_\lambda(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \equiv \frac{1}{\lambda}\left[\prod_{i=1}^{\infty}(1 + \lambda g_\lambda(A_i)) - 1\right],\ (-1 < \lambda < \infty)$$

또는 보다 간단히

$$g_\lambda(A \cup B) = g_\lambda(A) + g_\lambda(B) + \lambda g_\lambda(A) g_\lambda(B),\quad (-1 < \lambda < \infty,\ A \cap B = \phi)$$

λ-퍼지척도 또한 퍼지척도의 공리를 만족하는 사실을 쉽게 확인할 수 있다. λ-퍼지척도는 λ값에 따라서 여러가지 특성을 갖는다. 즉,

(1) $\lambda = 0$일 때, λ-퍼지척도는 확률척도
(2) $\lambda > 0$일 때, λ-퍼지척도는 믿음척도
(3) $-1 < \lambda < 0$일 때, λ-퍼지척도는 근사척도

가 된다. λ-퍼지척도는 주관적 척도의 모델로 여러분야에서 응용되고 있다.

3.1.3 가능성척도 및 필연성척도

단조퍼지척도의 단조성조건에 의하면

$$g(A_1 \cup A_2) \geq g(A_1) \vee g(A_2)$$

가 성립하게 된다. 여기서 퍼지척도의 특수한 예로서 양변이 등호관계를 갖는 퍼지척도를 정의할 수 있다. 이러한 퍼지척도는 1978년 자데(Zadeh)에 의하여 제안되었고[10], 이를 일반적으로 가능성척도(possibility measure) Π라 부르며, 다음과 같이 정의된다.

(1) $\Pi(\phi) = 0, \Pi(X) = 1$
(2) $\Pi(A \cup B) = \Pi(A) \vee \Pi(B), \quad \forall A, B \subseteq X$

가능성척도를 가능성분포함수(possibility distribution function) $\pi : X \rightarrow [0, 1]$를 이용하여 다시 표현하면

$$\Pi(A) \equiv \sup_{x \in A} \pi(x)$$

와 같다. 이 정의를 이용하면 위의 (2)의 관계를 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned}\Pi(A \cup B) &= \sup_{x \in A \cup B} \pi(x) \\ &= \sup_{x \in A} \pi(x) \vee \sup_{x \in B} \pi(x) \\ &= \Pi(A) \vee \Pi(B)\end{aligned}$$

일반적으로 가능성분포함수는 퍼지집합론에서의 소속함수로 볼 수 있으므로, 퍼지척도론과 퍼지집합론을 이어주는 가교역할을 한다고 할 수 있다.

가능성척도와 쌍대관계에 있는 퍼지척도로 듀보아와 프라드(Dubois and Prade)는 필연성척도(necessity measure) N를 제안하였고[11], 이의 정의는 다음과 같다.

(1) $N(\phi) = 0, \quad N(X) = 1$
(2) $N(A \cap B) = N(A) \wedge N(B), \ \forall A, B \subseteq X$

가능성척도와 필연성척도 관계는 다음과 같다.

$$N(A) = 1 - \Pi(A^c), \ \forall A \subseteq X$$

이 관계를 이용하면, 위의 (2)를 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned}N(A \cap B) &= 1 - \Pi((A \cap B)^c) \\ &= 1 - \Pi(A^c \cup B^c) \\ &= (1 - \Pi(A^c)) \wedge (1 - \Pi(B^c)) \\ &= N(A) \wedge N(B)\end{aligned}$$

3.1.4 믿음척도 및 근사척도

1967년, 뎀프스터(A. P. Dempster)에 의하여 정의된 상한확률(upper probabilty) 및 하한확률(lower probabilty)을[12], 1976년 쉐이퍼(G. Shafer)가 기본확률(basic probability)을 정의하여 재구성한 이론이 믿음척도 및 근사척도이다[13]. 이 이론은 뎀프스터-쉐이퍼이론(Dempster-Shafer theory, 혹은 D-S이론)이라 불리워지며, 여러분야에서 다양하게 응용되고 있으며, 이에 대한 해석을 한마디로 요약하면 쉐이퍼(Shafer)의 저서에서도 알 수 있듯이 증거의 수학적 표현이라 할 수 있다. 이에 대한 구체적 설명은 생략하고 정의만을 소개하기로 한다. 믿음척도(belief measure or belief function) Bel은 다음과 같이 정의된다.

(1) $\mathrm{Bel}(\phi) = 0, \quad \mathrm{Bel}(X) = 1$
(2) $\mathrm{Bel}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{Bel}(A_i) - \sum_{i<j} \mathrm{Bel}(A_i \cap A_j) + \cdots + (-1)^{n+1} \mathrm{Bel}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n)$

특히 $A \cap B = \phi$인 경우, $\mathrm{Bel}(A \cup B) \geq \mathrm{Bel}(A) + \mathrm{Bel}(B)$이므로, 믿음척도 Bel은

$$\mathrm{Bel}(A) + \mathrm{Bel}(A^c) \leq \mathrm{Bel}(X) = 1$$

관계를 만족한다.

믿음척도 Bel과 쌍대관계에 있는 근사척도(Plausibility measure) Pl은 믿음척도와 마찬가지로 다음과 같이 정의된다.

(1) $\mathrm{Pl}(\phi) = 0, \quad \mathrm{Pl}(X) = 1$
(2) $\mathrm{Pl}(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Pl}(A_i) - \sum_{i<j} \mathrm{Pl}(A_i \cup A_j) + \cdots + (-1)^{n+1} \mathrm{Pl}(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)$

특히 $A \cap B = \phi$인 경우, $\mathrm{Pl}(A \cup B) \leq \mathrm{Pl}(A) + \mathrm{Pl}(B)$이므로, 근사척도 Pl은

$$\mathrm{Pl}(A) + \mathrm{Pl}(A^c) \geq \mathrm{Pl}(X) = 1$$

관계를 만족한다. 믿음척도 Bel과 근사척도 Pl사이에는 $\mathrm{Pl}(A) = 1 - \mathrm{Bel}(A^c)$의 관계가 성립한다.

쉐이퍼(Shafer)는 유한집합 X위에서 다음조건을 만족시키는 집합함수, 즉, 기본확률할당(basic probability assignment) $m : 2^X \rightarrow [0, 1]$을 정의하여 믿음척도 Bel과 근사척도 Pl을 표현하였다.

(1) $m(\phi) = 0$

(2) $\sum_{A \subseteq X} m(A) = 1$

기본확률할당을 이용하여 믿음척도 Bel과 근사척도 Pl을 표현하면 아래와 같다.

$$Bel(A) = \sum_{B \subseteq A} m(B)$$

$$Pl(A) = \sum_{B \cap A \neq \phi} m(B)$$

즉, 믿음척도 Bel(A)는, A의 부분집합에 해당되는 집합에 할당된 기본확률할당값을 더한 것이고, 근사척도 Pl(A)는, A와 공통부분을 갖는 집합에 할당된 기본확률할당값을 더한 것이다.

위에서 살펴본 확률척도, l-퍼지척도, 가능성척도, 필연성척도, 믿음척도 및 근사척도의 관계를 배논(Banon)이 다음과 같이 정리하였다[14].

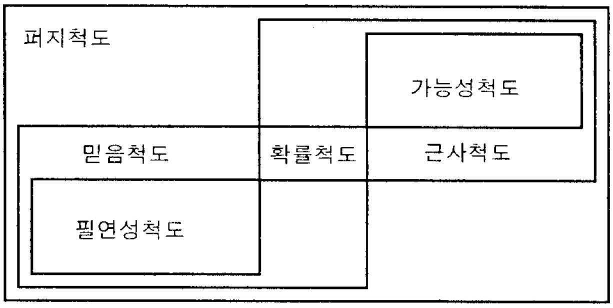


그림 3.2. 퍼지척도간의 관계.

이러한 퍼지척도는 주로 인간이 갖고 있는 주관성을 표현하고자하는 문제(예 : 주관적 평가)들에 많이 응용되어져 왔으며[15, 16, 17], 또한 최근들어서는 시스템간에 존재하는 상호작용을 나타내는 양으로 해석하여[26] 시계열의 모델링[18], 효용이론(utility theory)[19], 전문가 시스템[23] 등으로 응용범위가 날로 확장되어 가고 있다.

3.2 퍼지적분

퍼지척도는 가법적 척도가 아니므로 가측함수(measurable function)의 퍼지척도에 관한 적분으로 기존의 르베그적분(Lebesgue integral)을 그대로 적용할 수 없다. 이에 수게노(Sugeno)는 퍼지척도의 제안과 함께 퍼지척도에 관한 적분으로 수게노적분을 제안하였다. 그후, 퍼지척도에 관한 많은 적분이 제안되어 사용되고 있는데, 이를 통털어 퍼지적분이라 한다. 이하에서는 제안된 퍼지적분중 수게노적분과 쇼케(Choquet)적분에 대하여 설명하기로 한다.

3.2.1 수게노적분(Sugeno integral)

f를 X에서 [0,1]로의 함수, g를 X위에서의 퍼지척도라 할 때, f의 g에 관한 수게노적분은 다음과 같이 정의된다[2].

$$\int f(x) \circ g(\cdot) \equiv \sup_{r \in [0,1]} [r \wedge g(\{x \mid f(x) \geq r\})]$$

퍼지척도가 고전척도의 확장인 것에 대하여, 수게노적분은 르베그적분의 확장이 아니고, 가능성척도에 관한 적분으로 인식되고 있다. 수게노적분은 주관적 평가 문제에 많이 응용되어진 적분으로 이하에서는 구체적 예를 들어 설명하기로 한다.

집합 $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$에 대하여, X위의 함수 f가

$$f(x_1) \geq f(x_2) \geq f(x_3) \geq f(x_4) \geq f(x_5)$$

을 만족한다고 한다. 또한 $A_i = \{x \mid f(x) \geq f(x_i)\}$ 라고 하면, 위에서 정의한 수게노적분값은

$$\int f(x) \circ g(\cdot) = \bigvee_{i=1}^{n} [f(x_i) \wedge g(A_i)] = f(x_3) \wedge g(A_3) = f(x_3) = g(A_3)$$

로 표현되며, 그림 3.3은 수게노적분의 계산예를 보여준다.

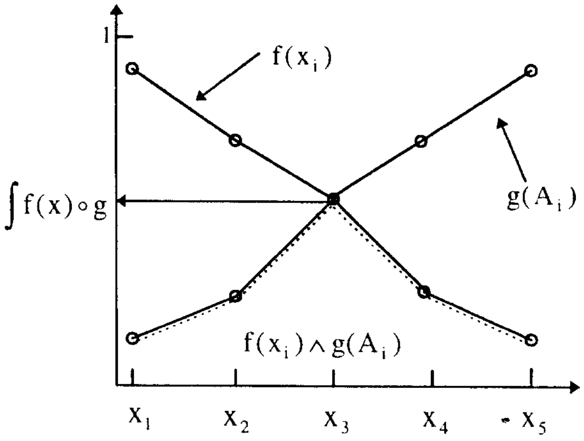


그림 3.3. 수게노적분.

3.2.2 쇼케적분(Choquet integral)

퍼지척도에 관한 적분중, 르베그적분(Lebesgue integral)의 확장형으로 쇼케적분(Choquet integral)이 있다. 쇼케적분은 프랑스의 수학자 쇼케(Choquet)[24]가 용량(capacity)에 관하여 정의한 범함수(functional)로 다음과 같이 정의된다.

$$(c)\int f(x)dg \equiv \int_0^\infty g(\{x \mid f(x) \geq r\})dr$$

여기서, f는 X위에서의 음이 아닌 실수함수를, g는 X위에서의 퍼지척도를 각각 나타내며, 우변은 통상적인 적분이다. 이하에서는 구체적 예를 들어 쇼케적분을 설명하기로 한다.

집합 $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$에 대하여, X위의 단함수(simple function) f가 다음과 같이 주어졌다고 하자.

$$f(x) = \sum_{i=1}^{4} r_i \cdot 1_{D_i}(x)$$

여기서, $0 < r_1 < r_2 < r_3 < r_4$, $D_i \cap D_j = \phi(i \neq j)$,

$$1_{D_i}(x) \equiv \begin{cases} 1 & x \in D_i \\ 0 & \text{기타} \end{cases}$$

이때, 단함수 f의 퍼지척도 g에 관한 쇼케적분은

$$(c)\int f(x)\, dg \equiv \sum_{i=1}^{4} (r_i - r_{i-1}) g(A_i) = \sum_{i=1}^{4} Z_i$$

$$\text{단, } A_i \equiv \bigcup_{j=i}^{4} D_j,\ r_0 \equiv 0$$

로 표현된다. 그림 3.4는 쇼케적분의 계산예를 보여준다.

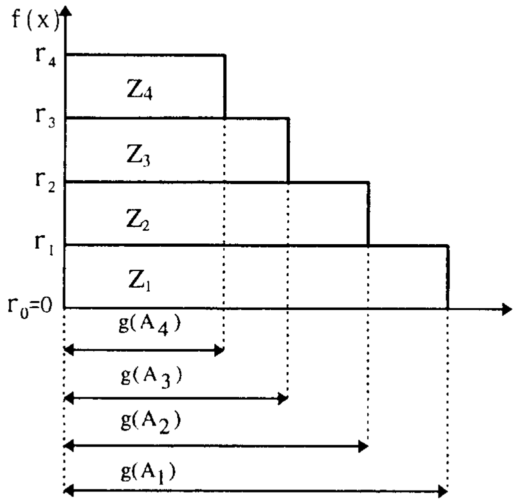


그림 3.4. 단함수의 쇼케적분.

결국 쇼케적분은 그림 3.4에서 알 수 있듯이 비가법적인 퍼지척도 g값을 나타내는 횡축을 따라 적분하는 것이 아니고, 가법성이 만족되는 실수함수f값을 나타내는 종축을 따라 적분하는 것임을 알 수 있다. 최근 슈마이들러(Schmeidler)[25]는 쇼케적분을 X위에서의 일반적인 함수 f에 대한 적분으로 다음과 같이 확장하였다.

$$(c)\int f(x)\, dg \equiv \int_0^{\infty} g(\{x \mid f\{(x) \geq r\})dr$$
$$+ \int_{-\infty}^{0} [g(\{x \mid f\{(x) \geq r\}) - g(X)]dr$$

슈마이들러(Schmeidler)의 정의에 의한 쇼케적분의 중요한 성질에는 다음과 같은 것이 있다.

(1) $(c)\int 1_A\, dg = g(A)$ 단, $1_A(x) \equiv \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & \text{기타} \end{cases}$

(2) $(c)\int (af+b)dg = a(c)\int f\, dg + bg(X)$
$\forall a, b \in R$

쇼케적분 또한 주관적 평가를 포함한 다양한 분야에서 퍼지척도에 대한 적분으로 응용되고 있으며 앞으로는 더욱 더 응용범위가 확장되리라 생각된다.

4. 결 론

앞에서 우리는 퍼지이론의 양대부류인 퍼지집합론과 퍼지척도 및 퍼지적분에 대하여, 정의 및 기본적 성질을 간략히 소개하였다. 이러한 이론들의 주된 응용분야가 제어와 평가문제로부터 점점 다양한 분야(예를 들면, 자연언어 처리, 퍼지컴퓨터, 경제학, 심리학 등)로 확산되고 있는 현시점에서, 보다 많은 사람들이 퍼지이론에 관심을 갖게 되는데 조금이나마 도움이 됐으면 한다. 끝으로, 최근 우리들의 관심중 많은 부분이 지적시스템(intelligent system)의 구현에 쏠리고 있음을 감안할 때, 이러한 퍼지이론은 신경회로망이론, 유전자 알고리즘 및 카오스이론과 더불어 지적시스템의 구현을 위한 충분한 도구로서 혹은 방법론으로서 크게 공헌하리라 생각한다. 여러가지 여건상 미흡한 점이 많이 있지만 여기서는 이것으로 결론을 맺고자 한다. 추후 기회가 있으면 퍼지척도 및 퍼지적분에 대하여 보다 더 깊게 소개하고자 한다.

끝으로 본고의 시작부터 완성까지 많은 조언을 아끼지 않으신 한국과학기술연구원 정보전자연구부 제어시스템 연구실의 모든 분, 특히 김 광배 부장님 및 최 익 박사님께 심심한 사의를 표하며, 원고정리에 많은 도움을 준 동 연구실의 황 재호 군에게도 이자리를 빌어 감사를 표한다.

참 고 문 헌

[1] L. A. Zadeh, "Fuzzy Sets," Information and Control 8, pp. 338-353, 1965.

[2] 管野道夫, "퍼지測度의 퍼지積分," 計測自動制御學會論文集 8, 218-226, 1972.

[3] 이 광형, 오 길록, 퍼지이론 및 응용 I/II, 홍릉과학출판사, 1991.

[4] M. Mizumoto, "Pictorial representation of fuzzy connectives, Part I : cases of t-norms, t-conorms and averaging operators," Fuzzy Sets and Systems, 31, pp. 217-242, 1989.

[5] M. Mizumoto, "Pictorial representation of fuzzy connectives, Part II : cases of compensatory operators and self-dual operators," Fuzzy Sets and Systems, 32, pp. 45-79, 1989.

[6] A. Baldwin, "A New Approach to Approximate Reasoning using a Fuzzy Logic," Fuzzy Sets and Systems, 2, pp. 309-325, 1979.

[7] Y. Tsukamoto, "An Approach to Fuzzy Reasoning Method," In Advances in Fuzzy Set Theory and Applications, eds., M.M.Gupta et. al, North-Holland, Amsterdam, 1979.

[8] D.Dubois and H. Prade, "Outline of Fuzzy Set Theory : An Introduction," Advances in Fuzzy Set Theory and Applications, eds., M.M.Gupta et. al, North-Holland, Amsterdam, pp. 27-48, 1979.

[9] T. Murofushi, M. Sugeno and M. Machida, "Non-monotonic fuzzy measures and the Choquet integral," Fuzzy Sets and Systems, 64, pp.73-86, 1994.

[10] L.A.Zadeh, "Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility," Fuzzy Sets and Systems 1, pp. 3-28, 1978.

[11] D.Dubois and H.Prade, Fuzzy Sets and Systems : Theory and Applications, Academic Press, 1980.

[12] A.P.Dempster, "Upper and lower probabilities induced by a multi-valued mapping," Ann. Math. Stat. 38, pp. 325-339, 1967.

[13] G.Shafer, A Mathematical Theory of Evidence, Princeton Univ., 1976.

[14] G.Banon, "Distinction between several subsets of fuzzy measures," Fuzzy Sets and Systems 5, pp. 291-305, 1981.

[15] K.Ishii and M.Sugeno, "A model of human evaluation process using fuzzy measure," Int. J. Man-Machine Studies 22, pp. 19-38, 1985.

[16] K.Tanaka and M.Sugeno, "A study on subjective evaluations of printed color images," Int. J. Approximate Reasoning 5, pp. 213-222, 1991.

[17] M. Sugeno and S. H. Kwon, "A clusterwise regression-type model for subjective evaluation," J. of Japan Society for Fuzzy Theory and Systems, April, pp. 291-310, 1995.

[18] M. Sugeno and S. H. Kwon, "A new approach to time series modeling with fuzzy measures and the Choquet integral," FUZZ-IEEE/IFES, March, pp. 799-804, 1995.

[19] I.Gilboa, "Expected utility with purely subjective non-additive probabilities," J. Math. Econom. 16, pp. 65-88, 1987.

[20] P.Wakker, "Continuous subjective expected utility with non-additive probabilities," J. Math. Econom. 18, pp. 1-27, 1989.

[21] A. N. Kolmogorov, Foundations of the theory of probability, Chelsa, 1950..

[22] L. J. Savage, The Foundation of Statistics, John Wiley & Sons, New York, 1954.

[23] B. G. Buchanan and E. H. Shortliffe, Eds., Rule-Based Expert Systems, Addison-Wesley, 1984.

[24] G.Choquet, "Theory of capacities," Ann. Inst. Fourier 5, pp. 131-295, 1953.

[25] D.Schmeidler, "Subjective probability and expected utility without additivity," Econometrica 57, pp. 571-587, 1989.

[26] T.Murofushi and M.Sugeno, "An interpretation of fuzzy measures and the Choquet integral as an integral with respect to fuzzy measure," Fuzzy Sets and Systems 29, pp. 201-227, 1989.

[27] G. J. Klir and T. A. Folger, Fuzzy Sets, Uncertainty, and Information, Prentice-Hall, London, 1988.

저 자 소 개

권 순 학

1960년 4월 19일 대전생. 1983년 서울대학교 공과대학 제어계측공학과 졸업(학사),
1985년 서울대학교 공과대학 제어계측공학과 졸업(석사),
1984년 5월부터 1986년 1월까지 삼성전자(주) 근무,
1986년 2월부터 1991년 2월까지 한국과학기술연구원(KIST) 근무,
1991년 4월부터 1992년 3월까지 일본 동경공업대학 연구생,
1995년 3월 일본 동경공업대학 시스템과학 전공
박사과정 졸업(Sugeno 연구실, 공학박사).
관심분야는 퍼지이론, 신경망이론 및 진화 알고리즘을 이용한
시스템 모델링 및 Model-free 제어.
(130-650) 서울 청량우체국 사서함 131호 한국과학기술연구원 정보전자연구부/제어 시스템
TEL) (02) 862-8801 / FAX) (02)963-4013.