

<論 文>

비정렬 삼각격자 유한체적법에 의한 비압축성유동 해석

김종태* · 김용모** · 맹주성**

(1995년 1월 27일 접수)

Finite Volume Method for Incompressible Flows with Unstructured Triangular Grids

Jong-Tae Kim, Yong-Mo Kim and Joo-Sung Maeng

Key Words : Unstructured FVM(비정렬 유한체적법), Edge-Based Data(모서리기준 연결자료), Artificial Compressibility(가압축성)

Abstract

Two-dimensional incompressible Navier-Stokes equations have been solved by the node-centered finite volume method with the unstructured triangular meshes. The pressure-velocity coupling is handled by the artificial compressibility algorithm due to its computational efficiency associated with the hyperbolic nature of the resulting equations. The convective fluxes are obtained by the Roe's flux difference splitting scheme using edge-based connectivities and higher-order differences are achieved by a reconstruction procedure. The time integration is based on an explicit four-stage Runge-Kutta scheme. Numerical procedures with local time stepping and implicit residual smoothing have been implemented to accelerate the convergence for the steady-state solutions. Comparisons with experimental data and other numerical results have proven accuracy and efficiency of the present unstructured approach.

1. 서 론

압축성 공기역학 분야에서 비정렬격자를 이용한 유동 수치해석 기법은 많은 발전을 이루었다.⁽¹⁾ 비정렬격자를 사용함으로써 복잡한 유동장을 쉽게 차분화할 수 있으며 기하학적 혹은 물리적으로 복잡한 영역을 부분적으로 세분화할 수 있는 격자의 적응성을 향상시킬 수 있으며 이러한 비정렬격자 알고리즘의 효율과 정확도를 개선하기 위한 노력⁽²⁾이 많이 이루어지고 있다.

비압축성 Navier-Stokes 방정식에는 압력항에 대한 독립적인 방정식이 존재하지 않기 때문에 압력

장과 속도장을 어떻게 연결시키는가 하는 것이 중요한 관심사이다. 지난 20여년 동안 비압축성 유동 방정식을 해석하기 위한 많은 수치해석기법의 연구가 이루어졌다. 여기에는 와도-유선함수 방정식을 이용하는 방법,⁽³⁾ 압력장을 속도장보다 한 차수 낮은 정확도로 내삽하는 혼합내삽기법,⁽⁴⁾ Poisson 형태의 압력방정식을 이용하는 방법,^(5,6) 그리고 인공 압축성 알고리즘⁽⁷⁾ 등이 있다. 이런 방법들은 대부분 정렬격자 위에서 유한차분법이나 유한체적법으로 구현되었다. Baliga and Patankar 등⁽⁸⁾은 혼합내삽기법을 이용한 비정렬 유한체적법 개발하였다. 그리고 Prakash and Patankar 등⁽⁹⁾은 같은 정확도로 압력과 속도를 내삽하는 비정렬 유한체적법을 연구하였다. Williams⁽¹⁰⁾는 비정렬격자에서 압력과 속도를 연결하기 위하여 압력수정 방정식에 인공압

*정회원, 한양대학교 대학원

**정회원, 한양대학교 기계공학과

축성 항을 첨가하는 Helmholtz 압력 방정식을 이용하였다. 최근에 Dreyer⁽¹¹⁾는 비정렬 유한체적법으로 인공압축성 알고리즘을 이용한 해석기법을 개발하였다. 그는 인공점성항을 첨가한 중앙차분법으로 대류 플럭스를 계산하였으며 한 격자점을 공유하는 삼각형을 모두 모아서 검사체적으로 사용하였다.

본 연구에서는 비정렬 삼각격자에서 격자점 중심(node-centered) 기법으로 2차원 Navier-Stokes 방정식을 해석하였다. 그리고 압력과 속도를 연결하기 위하여 인공압축성 기법⁽⁷⁾을 도입하였다. 대류 플럭스는 흐름차분법의 하나인 Roe의 플럭스 차분분할법⁽¹²⁾으로 구하였으며, 정확도를 높이기 위하여 각각의 셀(cell)에서 해의 선형분포를 가정하여 외삽하는 방법을 사용하였다.⁽¹³⁾ 비정렬격자는 경계에서부터 격자점의 생성과 삼각화를 동시에 하는 전진경계 격자생성법^(14,15)으로 생성하였다. 비정렬 격자에서 수치적분을 하기 위해서는 격자의 연결자료를 필요로 하며, 여기에는 격자점기준 연결자료, 모서리기준, 면기준, 그리고 요소기준의 연결자료가 있으며, 어떤 격자연결자료를 이용하느냐에 따라 적분방법이나 플럭스의 계산방법이 달라질 수 있다. 모서리를 기준으로한 격자연결자료는 각모서리의 시작과 끝을 이루는 격자점의 번호를 기억하는 것으로, 기존에 많이 사용된 요소중심의 연결자료와 비교해서 기억용량을 줄일 수 있고 계산을 벡터화할 때 필요한 gather-and-scattering 작업의 수를 줄일 수 있다.^(16~18) 본 연구에서는 모서리기준 연결자료만을 이용하여 점성 및 비점성 플럭스를 계산하였다. 시간에 대해서는 4단계 Runge-Kutta 법⁽¹⁹⁾으로 적분하였고, 정상상태로의 수렴속도를 증가시키기 위하여 국소시간간격법과 오차재분배기법을 이용하였다.

2. 본 론

2.1 지배방정식

2차원 비압축성 점성유동 방정식을 보존형태로 쓰면 다음과 같다.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u^2 + p) + \frac{\partial}{\partial x}(uv) \\ = \frac{\partial}{\partial x}(\tau_{xx}) + \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{xy}) \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uv) + \frac{\partial}{\partial x}(v^2 + p) \\ = \frac{\partial}{\partial x}(\tau_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{yy}) \end{aligned} \quad (3)$$

여기서, u 와 v 는 직교좌표계에서 x , y 방향으로의 속도를 나타내고, p 는 일정한 밀도로 나눈 압력을 의미한다. 점성에 의한 응력항들은 다음과 같다.

$$\tau_{xx} = 2\nu u_x, \tau_{yy} = 2\nu v_y, \tau_{xy} = \nu(u_y + v_x) \quad (4)$$

비압축성 Navier-Stokes 방정식에서 압력과 속도를 연결하기 위하여 연속방정식에 압력의 비정상항을 도입한다.

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \beta \nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (5)$$

여기서, β 는 인공압축성의 매개변수이다. 해가 정상상태에 도달하면 식 (5)는 원래의 연속방정식 형태가 된다. 식 (5)를 운동량방정식과 연결하면 다음과 같은 조합된 지배방정식을 얻게된다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(f_c + f_v) + \frac{\partial}{\partial y}(g_c + g_v) = 0 \\ Q = [p, \beta u, \beta v]^T \\ f_c = [u, u^2 + p, uv]^T \\ g_c = [v, uv, v^2 + p]^T \\ f_v = [0, -\tau_{xx}, -\tau_{xy}]^T \\ g_v = [0, -\tau_{xy}, -\tau_{yy}]^T \end{aligned} \quad (6)$$

식 (6)과 같은 형태의 Navier-Stokes 방정식은 쌍곡선형 방정식 특성을 갖게되어 발달된 압축성유동 해석 알고리즘 이용할 수 있다. 이것은 특히 수렴해를 구하는데 있어 인공압축성 알고리즘의 큰 장점이라 할 수 있다. 수렴해를 얻기위해 차분된 식은 시간전진법과 같은 개념으로 반복계산된다. 시간변수는 물리적 의미보다 단지 가상적인 시간 혹은 반복계산의 매개변수로 생각할 수 있다.

2.2 수치해법

임의의 검사체적 Ω 에 대하여 식 (6)을 적분하면 식 (7)의 적분형 비압축성 Navier-Stokes 방정식을 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} Q d\Omega + \int_{\partial\Omega} (\vec{F}_c + \vec{F}_v) \cdot \vec{n} dl = 0 \quad (7)$$

여기서, $\vec{F}_c = f_c \vec{i} + g_c \vec{j}$ 이고 $\vec{F}_v = f_v \vec{i} + g_v \vec{j}$ 이다.

비정렬 삼각격자에서 차분된 지배방정식은 완전히 닫혀진 검사체적인 각각의 셀에 대하여 수치적

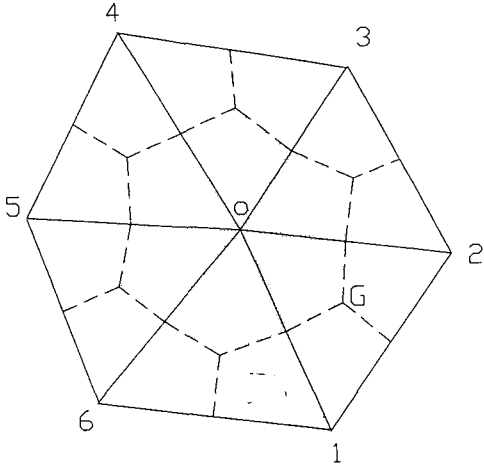


Fig. 1 Control volume surrounding node o

으로 적분할 수 있다.

Fig. 1과 같이 하나의 격자점을 중심으로 하여 그점을 공유하는 삼각형들의 도심(G)과 모서리의 중점을 차례로 이어서 셀을 구성할 수 있다. 수치 해석 영역은 삼각격자와 쌍으로 존재하는 이런 중첩되지 않는 셀로 완전히 채울 수 있다.

2.2.1 비점성 플럭스 계산

대류 플럭스는 다음과 같이 셀의 면을 따라 차분된 형태로 표현할 수 있다.

$$\int_{\partial\Omega} \vec{F}_c \cdot \vec{n} dl \approx \sum_{i=1}^{N_o} (F_c)_{oi} \cdot \vec{L}_{oi}$$

$$\vec{L}_{oi} = \vec{S}_R + \vec{S}_L \tag{8}$$

\vec{L}_{oi} 는 근사적인 경계면의 벡터를 나타내며, N_o 는 격자점 o 를 중심으로 하는 셀의 경계면의 수를 의미한다. 하나의 경계에 대하여 좌우로 셀이 접해 있으므로 그 경계에 수직한 수치 플럭스는 왼쪽 셀에는 더해지며 동시에 오른쪽의 셀에는 플럭스를 뺄 수 있다. 삼각격자의 한 모서리는 셀의 한 경계와 일대일로 대응하므로 모서리에 대한 Do-loop를 통해 모든 셀에 대하여 플럭스를 수치적분할 수 있다.

이 모서리 loop를 통해 수치적분할 수 있는 이유는 삼각요소들의 모든 격자점은 모서리로 다른 격자점과 완전히 연결되어 있다는 격자의 특징 때문이다. 2차원의 대류 플럭스를 계산하기 위해 필요한 모서리기준 연결자료는 모서리를 형성하는 2개의 격자점의 번호와 그 모서리에 대응하는 셀 경계

의 길이벡터이다. 대류 플럭스는 해의 비선형성에 의한 진동을 막기 위해 흐름차분법의 일종인 플럭스 차분분할법을 이용하였다. 이것은 원래 압축성 유동 문제를 해결하기 위하여 개발된 것으로 여기서는 특히 Roe의 기법을 도입하였다. 플럭스 벡터의 Jacobian을 상사변환하면 실수형의 특성값이 3개 존재하며, 이 특성값들은 각각 인공압축성과 관련된 특성파의 속도를 의미한다. Roe의 플럭스 차분분할법은 이 특성값의 부호에 따라 흐름방향으로 차분하게 된다. 격자점 o, i 를 잇는 모서리에 대응하는 셀경계에 수직한 플럭스 벡터는 식 (9)로 표현할 수 있다.

$$F_{oi} = 1/2 [F(Q^-) + F(Q^+) - |A|(Q^+ - Q^-)] \tag{9}$$

Q^- 과 Q^+ 은 셀 경계의 왼쪽과 오른쪽 상태를 나타내는 원시변수이며 A 는 대류 플럭스의 Jacobian 매트릭스이다. Buning and Steger⁽²⁰⁾이 제안한 방법에 따라 Jacobian A 의 특성값을 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\lambda^{\pm} = \frac{1}{2} (\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 + \epsilon}) \tag{10}$$

여기서, ϵ 은 플럭스 차의 불연속적인 변화를 막기 위한 것이며, 여기서는 $\epsilon=0.01^{(21)}$ 이 사용되었다. 식 (9)의 Jacobian A 가 곱해진 항은 흐름차분에 의한 소산항으로 볼 수 있으며 이 항은 셀의 경계 위의 값으로 계산해야 한다. Roe의 특성들을 만족시키기 위하여 셀 경계의 좌우 값을 산술평균하여 소산항 계산할 수 있다. 대각화 매트릭스 T 와 T^{-1} 로 Jacobian A 를 대각화하면 소산항은 다음으로 표현할 수 있다.

$$|A| = T|A|T^{-1} \tag{11}$$

$$|A|(Q^+ - Q^-) = T|A|T^{-1}\Delta Q \tag{12}$$

식 (12)는 세 개의 서로 다른 특성값에 따라 세 개의 플럭스 차를 나타내는 식을 얻을 수 있다.

$$T|A|T^{-1}\Delta Q = |\Delta F_1| + |\Delta F_2| + |\Delta F_3| \tag{13}$$

여기서,

$$|\Delta F_1| = \frac{|U|}{2\beta c^2} [(n_y u - n_x v) \Delta p + (-U \cdot v - \beta n_y) \Delta u + (U \cdot u + \beta n_x) \Delta v] \begin{bmatrix} 0 \\ -2\beta n_y \\ 2\beta n_x \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 |\Delta F_2| &= \frac{|U+c|}{2\beta c^2} [-(U-c)\Delta p + \beta n_x \Delta u \\
 &\quad + \beta n_y \Delta v] \begin{bmatrix} c\beta \\ u(U+c) + \beta n_x \\ v(U+c) + \beta n_y \end{bmatrix} \\
 |\Delta F_3| &= \frac{|U-c|}{2\beta c^2} [-(U+c)\Delta p + \beta n_x \Delta u \\
 &\quad + \beta n_y \Delta v] \begin{bmatrix} -c\beta \\ u(U-c) + \beta n_x \\ v(U-c) + \beta n_y \end{bmatrix} \quad (14)
 \end{aligned}$$

$U=un_x+vn_y$ 로 셀 경계에 수직한 속도를 의미하며, $c=\sqrt{U_n^2+\beta}$ 이다.

Q^- 과 Q^+ 의 값으로서 좌우의 격자점의 값, 즉 셀의 평균값을 이용한다면 1차 정확도의 수치 플럭스를 구한 것이 된다. Barth와 Jespersen⁽¹⁴⁾이 제안한 방법으로 각 셀에서 변수의 선형변화를 가정하고 그 셀에서의 변수구배를 구한다면 고차정확도 수치 플럭스를 계산할 수 있다. 셀 중심(x_o, y_o)을 기준으로 경계의 값은 다음과 같이 Taylor series를 이용하면,

$$Q(x, y) \approx Q(x_o, y_o) + \nabla Q_o \cdot \Delta r \quad (15)$$

셀의 변수구배는 Green 정리를 이용하여 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 \nabla Q_o &= \frac{1}{A_o} \int_{\partial o} Q \bar{n} dl \\
 &= \frac{1}{A_o} \sum_{i=1}^{N_o} \frac{1}{2} (Q_o + Q_i) \bar{L}_{oi} \quad (16)
 \end{aligned}$$

A_o 는 셀의 면적을 의미한다. 각 셀에서의 변수구배는 경계에서 평균된 값을 이용하여 계산할 수 있으며, 하나의 셀 경계는 하나의 삼각격자 모서리와 대응하는 특징을 이용하면 모서리기준 격자 연결자료⁽¹⁹⁾를 이용하여 구할 수 있다.

2.2.2 점성 플럭스 계산

Barth⁽¹⁷⁾는 이와같은 격자점 중심의 유한체적법은 선형의 형상함수를 이용한 Galerkin 유한요소법과 일치함을 보였다. 본 연구에서처럼, 각 삼각형 요소에서 해가 선형적으로 변한다고 가정하는 경우 점성 플럭스는 각 모서리를 구성하는 두 격자점에서 값의 차이를 그 모서리와 관련된 가중치를 곱하여 더함으로써 차별화할 수 있다.

$$\int (\mu u_x)_x da \approx \sum_{i=1}^{N_o} (m_{11})_i \cdot (u_i - u_o)$$

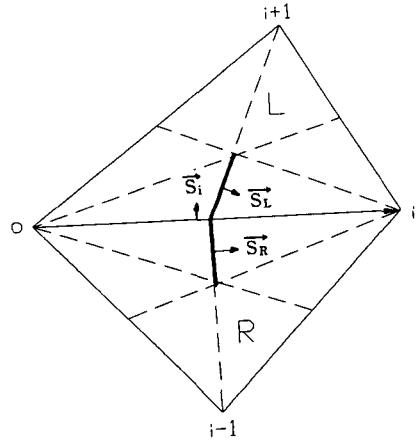


Fig. 2 Contribution of an individual edge to the median-dual control volume for node o

$$\begin{aligned}
 \int (\mu u_y)_x da &\approx \sum_{i=1}^{N_o} (m_{12})_i \cdot (u_i - u_o) \\
 \int (\mu u_x)_y da &\approx \sum_{i=1}^{N_o} (m_{21})_i \cdot (u_i - u_o) \\
 \int (\mu u_y)_y da &\approx \sum_{i=1}^{N_o} (m_{22})_i \cdot (u_i - u_o) \quad (17)
 \end{aligned}$$

여기서, $m_{11}, m_{12}, m_{21}, m_{22}$ 등은 각 모서리에 대한 가중치를 나타낸다. 점성계수가 일정한 경우 가중치 매트릭스는 대칭이므로 2차원에서는 단지 3개의 가중치만을 각모서리 별로 계산해 둘 필요가 있다. 점성 플럭스는 이 가중치를 이용함으로써 비점성 플럭스와 마찬가지로 모서리에 대한 Do-loop를 통해 모든 셀에 대하여 수치적분할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 m_{11} &= -\frac{1}{4} \mu \left[\frac{1/4 S_{ix}^2 - 9 S_{ix}^2}{A_L} + \frac{1/4 S_{ix}^2 - 9 S_{Rx}^2}{A_R} \right] \\
 m_{12} = m_{21} &= -\frac{1}{4} \mu \left[\frac{1/4 S_{ix} S_{iy} - 9 S_{Lx} S_{Ly}}{A_L} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1/4 S_{ix} S_{iy} - 9 S_{Rx} S_{Ry}}{A_R} \right] \\
 m_{22} &= -\frac{1}{4} \mu \left[\frac{1/4 S_{iy}^2 - 9 S_{Ly}^2}{A_L} + \frac{1/4 S_{iy}^2 - 9 S_{Ry}^2}{A_R} \right] \quad (18)
 \end{aligned}$$

A_L 은 L 삼각형의 면적을, A_R 은 R 삼각형의 면적을 나타내며, $\bar{S}_i, \bar{S}_L, \bar{S}_R$ 등은 Fig. 2에 나타난 방향을 정(+)으로 하는 길이벡터이다. 가중치에 대한 자세한 유도과정은 참고문헌 (17)을 참고하기 바란다.

2.2.3 시간적분

셀 경계를 통해 빠져나가는 플럭스의 합을 R_o 라

고 하면 차분화된 지배방정식을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$A_o \frac{\partial Q_o}{\partial t} + R_o = 0 \quad (19)$$

식 (19)는 4단계의 Runge-Kutta법⁽¹⁹⁾을 이용하여 적분할 수 있다. 정상상태로의 수렴속도를 향상시키기 위하여 국소시간간격법과 잔류오차 평준화 기법을 이용하였다. 각 셀에 대해 대표의 길이를 대표의 특성값으로 나누어 국소시간간격을 계산할 수 있다. 점성에 의해 수정된 대표 특성값⁽²²⁾은 다음과 같다.

$$\Lambda_{oi} = [|u_{nx} + v_{ny}| + C + \frac{\nu}{A_o} L_{oi}] L_{oi} \quad (20)$$

식 (21)의 대표 특성값을 이용하여 국소시간간격은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\Delta t_o = \frac{CFL \cdot A_o}{\max(\Lambda_{oi})}, \text{ where } i=1, N_o \quad (21)$$

각 셀의 R_o 를 음함수적으로 평준화함으로써 수렴속도를 증가시킬 수 있다.

$$\overline{R}_o = R_o + \epsilon \nabla^2 \overline{R}_o \quad (22)$$

여기서, \overline{R}_o 는 재분배된 R_o 를 의미하며 $\nabla^2 \overline{R}_o$ x, y 로 나누지 않은 Laplacian(undivided Laplacian)으로 비정렬격자에는 식 (23)으로 표현된다.

$$\nabla^2 \overline{R}_o = \sum_{i=1}^{N_o} (\overline{R}_i - \overline{R}_o) \quad (23)$$

식 (22)는 Jacobi반복법을 이용하여 간단히 계산할 수 있으며, 여기서는 근사적인 인수분해를 이용한 식 (24)를 이용하였다.⁽²³⁾

$$\overline{R}_o^{n+1} = \frac{R_o + \epsilon N_o \overline{R}_o^n + \epsilon \sum_{i=1}^{N_o} \overline{R}_i^n}{1 + 2N_o \epsilon} \quad (25)$$

여기서, ϵ 은 1.0까지 증가시킬 수 있다.

2.2.4 경계조건

경계조건은 크게 벽면조건과 유동조건으로 구분할 수 있다. 그리고 벽면조건은 미끄럼조건과 점착조건으로 나눌 수 있으며, 유동조건은 유입, 유출 및 자유유동조건으로 나눌 수 있다. 입구에서는 속도를, 그리고 출구에서는 압력을 고정하였으며, 자유유동 경계에서는 각 셀에서 유동방향에 따라 유입 및 유출 조건을 주었다. 미끄럼 벽면에 수직인 플럭스는 압력에 의한 항만 존재하므로 다음과 같

은 플럭스 계산으로 미끄럼조건을 부과하였다.

$$\overline{F}_c \cdot \overline{n}_b = \begin{bmatrix} 0 \\ p n_{bx} \\ p n_{by} \end{bmatrix} \quad (26)$$

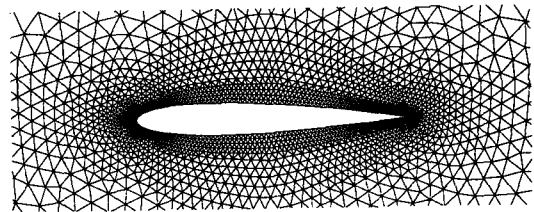
여기서, \overline{F}_c 는 비점성 플럭스를, 그리고 \overline{n}_b 는 경계면에 수직인 단위벡터를 나타낸다.

3. 수치결과 및 고찰

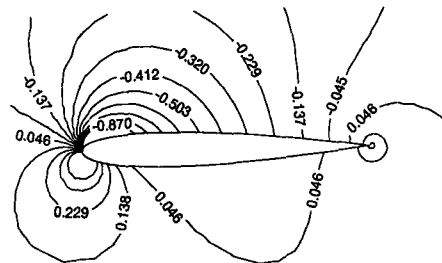
비압축성 유동해석을 위한 비정렬격자기법을 이용하여 3가지의 문제에 대하여 해석하였다. 익형주위의 비점성유동, cavity의 윗쪽 면을 일정한 속도로 움직였을 때의 내부유동, 그리고 원통 주위의 2차원 유동 등에 대하여 얻은 결과를 다른 수치결과나 실험과 비교하여 본 연구방법을 검증하였다. 수치실험결과 수렴성이 가장 좋은 CFL의 값으로 1을 본 연구의 모든 계산에서 사용하였다.

3.1 NACA0012 익형주위의 비점성유동 해석

비정렬격자에서 인공압축성 알고리즘을 이용하여 NACA 0012 익형주위의 비점성유동을 해석하였다. 이것을 포텐셜유동 해석결과와 비교함으로써 비점성 플럭스 계산의 정확도를 판단할 수 있다. 자유유동은 익형에 대하여 5°의 영각을 갖는다. 격



(a)



(b)

Fig. 3 (a) Closeup of unstructured mesh, NACA 0012 airfoil, 2800 nodes, (b) pressure coefficient C_p contours, $\alpha=5^\circ$

자의 바깥 경계는 반지름이 코드길이의 20배인 원이다. 비정렬 삼각격자는 전진경계 격자생성법⁽¹⁵⁾에 의하여 생성하였으며, 2800개의 격자점으로 이루어졌다. Fig. 3(a)는 생성된 삼각격자의 익형주위를 보여준다. 익형의 앞전과 뒷전에는 조밀한 격자가 생성되어 있는 것을 볼 수 있다. 익형주위의 등압선도(Fig. 3(b)에서 익형의 앞전에서 급격히 변하는 유동을 파악할 수 있다. 익형의 표면을 따라 압력계수를 Lewis⁽²⁴⁾의 panel 코드의 결과와 비교하였다. Fig. 4는 압력계수가 잘 일치함을 보여주고 있다. Panel 코드로 구한 항력계수와 양력계수는 각각 $C_d=0.$, $C_l=0.601$ 이었으며, 비점성유동 해석결과는 $C_d=0.001$, $C_l=0.59$ 로 비정렬격자에서 인공압축성을 이용한 대류 플럭스 계산의 정확성을 점검할 수 있었다.

3.2 Lid-Driven Cavity 유동

위쪽 면이 일정한 속도로 움직이는 cavity 내의 2차원 유동을 해석하였다. Cavity 내의 유동은 주 유동방향을 갖지않는 타원형의 유동특성을 갖고 있으므로 인공압축성 알고리즘의 평가를 위한 좋은 문제가 된다. Cavity 내에 정렬격자를 생성한 뒤 각각의 사각형을 2개의 삼각형으로 나누어 비정렬 격자를 구성하였다. 31×31 격자와 61×61 격자를 사용하였다. Fig. 5(a)는 61×61개의 격자점으로 구성된 비정렬격자를 보여준다. Reynolds수가 1000일 때 수치해석으로 얻은 속도장과 압력장을

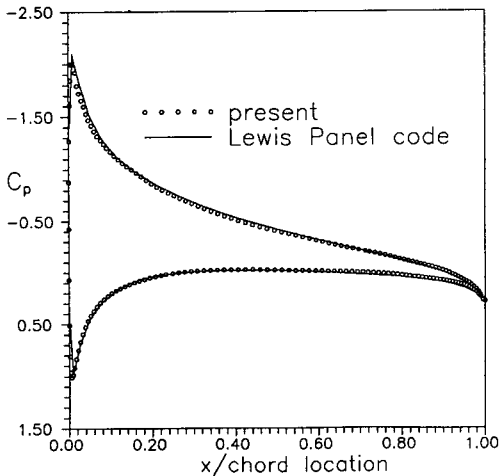
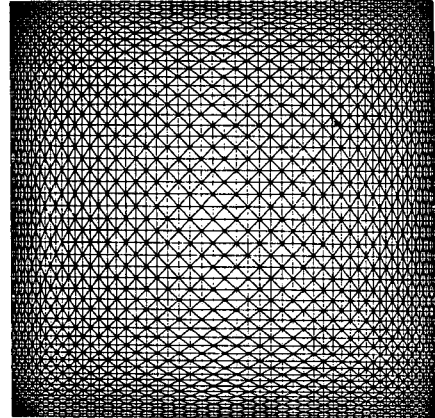


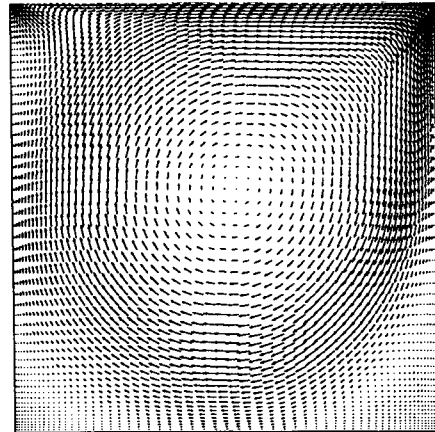
Fig. 4 Comparison of surface pressure distributions for NACA 0012 $\alpha=5^\circ$, $n_{\text{poin}}=2800$, $C_d=0.001$, $C_l=0.59$

Fig. 5(b, c)에서 볼 수 있다.

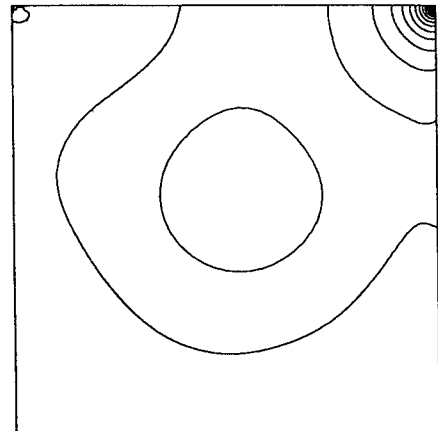
Fig. 6은 반복회수에 따른 수렴정도(lid driven cavity 유동, $Re=1000$, 61×61 nodes)를 보여준다.



(a) Triangular mesh(61×61 nodes)



(b) Velocity vectors



(c) Pressure contours

Fig. 5 Driven cavity flow $Re=1000$

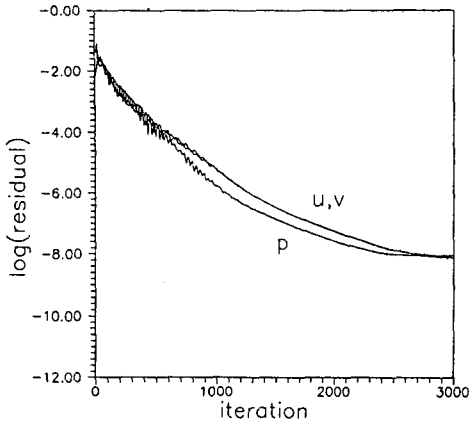
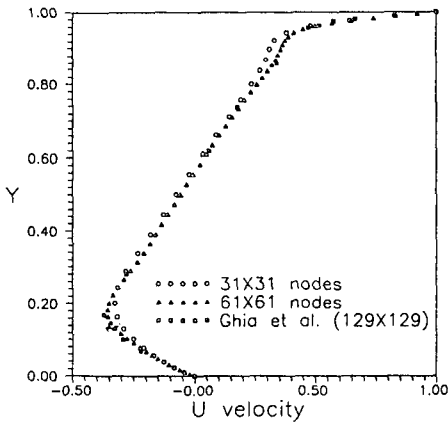
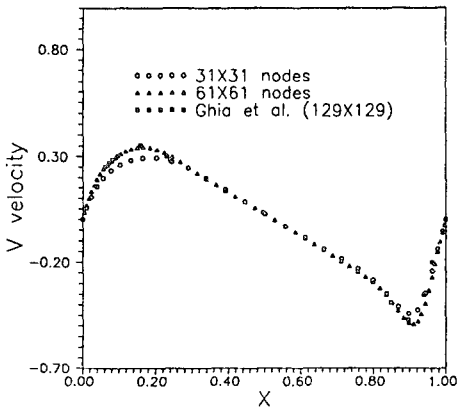


Fig. 6 Convergence rate as measured by the rms averages of residuals vs the number of iterations for driven cavity flow, $Re=1000$, 61×61 nodes



(a) u-velocity components



(b) v-velocity components

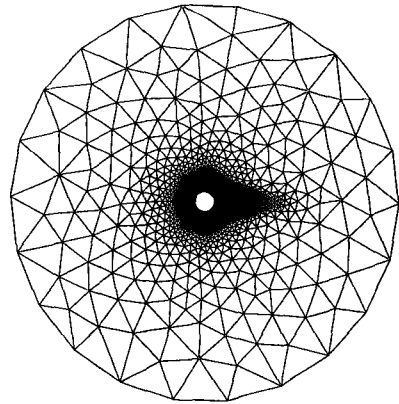
Fig. 7 Comparison velocity profiles for cavity flow, $Re=1000$

Ghia et al.⁽³⁾는 와도-유선함수 알고리즘을 이용하여 129×129 격자에서 lid driven cavity 유동을 해석하였다. $x=0.5$ 를 지나는 중심선에서 u 속도와 $y=0.5$ 인 선에서 v 속도를 Ghia et al.⁽³⁾의 결과와 비교하였다. 31×31 격자를 사용한 경우 Ghia et al.의 결과와 많은 오차를 보이고 있으나 61×61 격자를 사용한 경우는 거의 일치하는 결과를 보여 주고 있다. (Fig. 7참조)

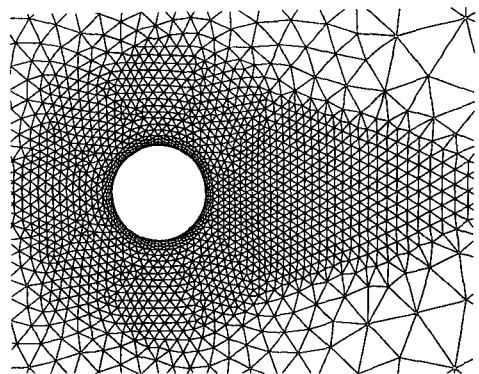
3.3 원통주위의 2차원 정상유동

점성 외부유동장으로서 2차원 원형실린더 주위의 유동을 해석하였다. Reynolds수가 40일 때는 정상 유동이므로 와동의 이탈 등은 발생하지 않는다.

Fig. 8에서 볼수 있는 것처럼 실린더 벽면에는 벽면에 수직인 방향으로 당겨진 삼각격자를 생성하고 벽면에서 떨어진 경계층 밖의 영역에서는 정삼



(a) Far-field view



(b) Near-field view

Fig. 8 Unstructured mesh about circular cylinder 1891 nodes

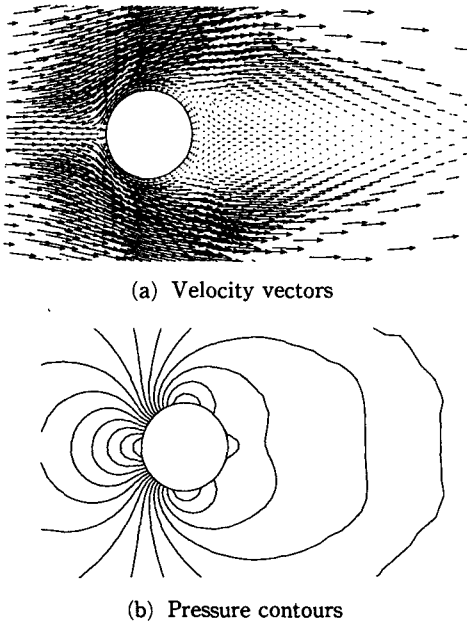


Fig. 9 Steady flow over a circular cylinder, $Re=40$

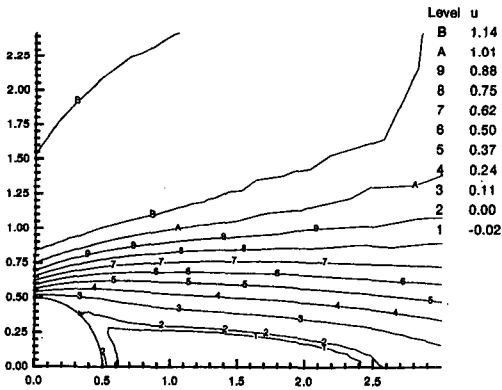


Fig. 10 Velocity vectors and streamlines indicating separation point, $\theta_{sep}=53^\circ$, steady flow over a circular cylinder, $Re=40$

각형에 가까운 격자를 생성하였다. 점착조건을 가진 경계에서는 먼저 벽면에 수직인 벡터를 구한 뒤 수직인 방향으로 당겨진 삼각형을 생성하고 그외의 영역에서는 일반적인 전진경계 격자생성법⁽¹⁵⁾으로 생성할 수 있다. 이렇게 함으로써 당겨진 삼각격자를 전진경계 격자생성 프로그램내에서 생성할 수 있다. 생성된 격자점의 수는 1891 개이며, Fig. 9 (a), (b)는 계산된 속도장과 압력장을 보여준다.

수치해의 정확도를 판단하기 위하여 박리길이

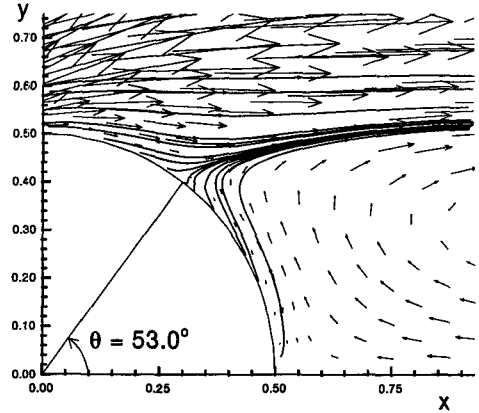


Fig. 11 U-velocity contours indicating separation length $L_{sep}=2.1$

(L_{sep})와 박리각도(θ_{sep}) 등에 대한 실험값⁽²⁵⁾과 비교하였다. 박리길이(L_{sep})는 실린더의 뒤쪽 정체점에서부터 재부착점까지의 길이를 실린더의 지름으로 무차원화한 값이며, 박리각도(θ_{sep})는 실린더의 뒤쪽 정체점에서부터 박리점까지의 각도를 나타낸다. L_{sep} 와 θ_{sep} 에 대한 실험값은 2.13과 53.5° 이다. Figs. 10과 11에서 수치해석한 결과는 $\theta_{sep}=53.0$, $L_{sep}=2.1$ 임을 알 수 있다.

4. 결 론

비압축성 Navier-Stokes 방정식을 풀기위한 방법으로 비정렬격자에서 격자점을 중심으로한 유한체적법을 이용하였다. 압력장과 속도장을 연결하기 위하여 인공압축성 알고리즘을 도입하였으며 수치안정성과 정확성을 개선하기 위해서 대류항의 계산은 Roe의 플럭스 차분분할법을 이용하였다. 이 방법이 비압축성 유동을 해석하는데 적절한 방법임을 판단하기 위하여 다른 수치결과 및 실험결과와 비교하여 보았으며, 이러한 검증과정을 통해 인공압축성 알고리즘을 이용한 비정렬격자 비압축성유동해법이 정확하고 효율적인 방법임을 알 수 있었다. 이 수치해석 방법의 효율성을 개선하고 3차원 비정상유동 및 모든 마하수 비정상유동까지 해석할 수 있게 하는 것이 앞으로의 과제이다.

후 기

본 연구는 한국과학재단의 '94년도 목적기초 학

술연구 지원으로 수행된 내용의 일부이며, 관계자 여러분께 감사를 드립니다.

참고문헌

- (1) Deconinck, H. and Barth, T. J., 1992, "Special Course on Unstructured Grid Method for Advection Dominated Flows," *AGARD-R-787*.
- (2) Connell, S. D. and Holmes, D. G., 1994, "Three-Dimensional Unstructured Adaptive Multigrid Scheme for the Euler Equations," *AIAA Journal*, Vol. 32, No. 8, pp. 1626~1632.
- (3) Ghia, U., Ghia, K. N. and Shin, C. T., 1982, "High-Re Solutions for Incompressible Flow Using the Navier-Stokes Equations and a Multigrid Method," *Journal of Computational Physics*, Vol. 48, pp. 387~411.
- (4) Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L. and Bayham, J. M. W., 1983, *Mixed and Irreducible Formulations in Finite Element Analysis*, Eds. S. N. Atluri, et al., Hybrid and Mixed Finite Element Methods, J. Wiley and Sons, New York, pp. 25~42.
- (5) Patankar, S. V., 1984, *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, Hemisphere, New York.
- (6) Schneider, G. E., Raithby, G. D. and Yovanovich M. M., 1978, "Finite-Element Solution Procedures for Solving the Incompressible Navier-Stokes Equations Using Equal Order Variable Interpolation," *Numerical Heat Transfer*, Vol. 1, pp. 433~451.
- (7) Chorin, A. J., 1968, "Numerical Solution of the Navier-Stokes Equations," *Math. Comp.*, Vol. 22, No. 104, pp. 745~762.
- (8) Baliga, B. R. and Patankar, S. V., 1980, "A New Finite-Element Formulation for Convective-Diffusion Problems," *Numerical Heat Transfer*, Vol. 3, pp. 393~409.
- (9) Prakash, C. and Patankar, S. V., 1985, "A Control Volume-Based Finite-Element Method for Solving the Navier-Stokes Equations Using Equal-Order Velocity-Pressure Interpolation," *Numerical Heat Transfer*, Vol. 8, pp. 259~280.
- (10) Williams, M., 1993, "The Solution of the Two-Dimensional Incompressible Flow Equations on Unstructured Triangular Meshes," *Numerical Heat Transfer*, Part B, Vol. 23, pp. 309~325.
- (11) Dreyer, J. D., 1990, "Finite Volume Solutions to the Steady Incompressible Euler Equations on Unstructured Triangular Meshes," MSE Thesis, Dept. Mechanical and Aerospace Engineering, Princeton Univ.
- (12) Roe, P. L., 1981, "Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors and Difference Scheme," *Journal of Computational Physics*, Vol. 43, pp. 357~372.
- (13) Barth, T. J. and Jespersen D. C., 1989, "The Design and Application of Upwind Scheme on Unstructured Meshes," *AIAA-89-0366*.
- (14) Peraire, J., Vahdati, M., Morgan, K. and Zienkiewicz, O. C., 1987, "Adaptive Remeshing for Compressible Flow Computations," *Journal of Computational Physics*, Vol. 72, pp. 449~466.
- (15) Lohner, R. and Parikh, P., 1988, "Generation of Three-Dimensional Unstructured Grids by the Advancing-Front Method," *AIAA-88-0515*, *AIAA 26th Aerospace Sciences Meeting*, Reno, NV.
- (16) Luo, H., Baum, J. D. and Lohner, R., 1993, "Numerical Solution of the Euler Equations for Complex Aerodynamic Configurations Using an Edge-Based Finite Element Scheme," *AIAA-93-2933*, *AIAA 24th Fluid Dynamics Conference*, Orlando, FL.
- (17) Barth, T. J., 1991, "Numerical Aspects of Computing Viscous High Reynolds Number Flows on Unstructured Meshes," *AIAA-91-0721*.
- (18) Whitaker, D. L., 1988, "Two-Dimensional Euler Computations on A Triangular Mesh Using An Upwind, Finite-Volume Scheme," PhD Thesis, Virginia Polytech.
- (19) Jameson, A. and Mavriplis, D. j., 1986, "Finite Volume Solution of the Two-Dimensional Euler Equations on a Regular Triangular Mesh," *AIAA Journal*, Vol. 24, No. 4, pp. 611~618.
- (20) Buning, P. G. and Steger, J. L., 1982, "Solution of the Two-Dimensional Euler Equations with

- Generalized Coordinate Transformation Using Flux Vector Splitting," *AIAA Paper 82-0971*.
- (21) Rogers, S. E., 1989, "Numerical Solution of the Incompressible Navier-Stokes Equations," PhD Thesis, Stanford Univ.
- (22) Karman, S. L. JR., 1991, "Development of A Three-Dimensional Unstructured CFD Method," PhD Thesis, Univ. of Texas at Alington.
- (23) Jiang, Y. T., 1993, "Development of An Unstructured Solution Adaptive Method for the Quasi-Three-Dimensional Euler and Navier-Stokes Equations," PhD Thesis, Purdue Univ.
- (24) Lewis, R. I., 1991, "Vortex Element Methods for Fluid Dynamic Analysis of Engineering Systems," Cambridge Univ. Press.
- (25) Coutanceau, M. and Bouard, R., 1977, "Experimental Determination of the Main Features of the Viscous Flow in the Wake of a Circular Cylinder in Uniform Translation. Part 1. Steady Flow," *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 79, No. 2, pp. 231~256.