

## &lt;論 文&gt;

# Volterra급수로 나타낸 비선형시스템 주파수응답함수의 수렴특성

이건명\* · G. R. Tomlinson\*\*

(1995년 3월 7일 접수)

## Convergence Characteristics of the Frequency Response Functions of Non-Linear Systems Expressed in Terms of the Volterra Series

Gun-Myung Lee and G. R. Tomlinson

**Key Words:** Non-Linear System(비선형시스템), Volterra Series(Volterra급수), Frequency Response Function(주파수응답함수), Higher Order Frequency Response Function(고차 주파수응답함수), Convergence(수렴)

### Abstract

The frequency response functions of systems incorporating a non-linear cubic stiffness subject to sinusoidal excitation are derived using the Volterra series and the convergence characteristics investigated. It is shown that the series representation of the frequency response functions converges only when the sinewave input amplitude is within a certain range. Within the range of convergence the frequency response function based on the Volterra series approaches the analytical one as more higher order frequency response function terms are included. Proposed is a criterion for the studied systems to predict approximately the range of sinewave input amplitude for which the series representation of the frequency response functions converges.

역 특성을 나타낸다.<sup>(3~6)</sup>

### I. 서 론

정현파가진을 받는 비선형시스템의 주파수응답함수(FRF)는 가진력의 진폭에 따라 변화하고, 이러한 FRF의 쩐그러짐(distortion) 현상은 시스템의 비선형여부를 판별하는 기준으로써 자주 사용된다. FRF에 쩐그러짐이 발생하는 원인은 고차 주파수응답함수(higer order frequency response function)를 이용하여 설명할 수 있다.<sup>(1)</sup> 이 고차 FRF는 Volterra급수<sup>(2)</sup>에 기초를 두고 있으며 다항식으로 표시되는 비선형성을 갖는 시스템의 주파수영역

고차 FRF의 개념을 도입하면 정현파가진을 받는 비선형시스템의 FRF는 가진력진폭과 고차 FRF의 무한급수식으로서 나타난다. 그러나 실제적인 목적을 위해서는 이 무한급수의 유한개의 항만을 고려하여야 하고, 그 항의 갯수를 결정하기 위해서는 이 무한급수의 수렴특성을 연구하여야 한다. 본 논문에서는 정현파가진을 받는 Duffing 진동자의 FRF를 고차 FRF의 무한급수로 나타내고, 이 무한급수의 유한개항의 합과 이 시스템의 해석적인 FRF<sup>(7)</sup>를 비교함으로써 수렴특성을 고찰하였다. 또 Duffing 진동자의 주파수응답함수를 나타내는 이 무한급수가 수렴하기 위한 가진력 진폭의 범위를 근사적으로 예측할 수 있는 수렴조건식을 제

\*정회원, 경상대학교 기계공학과 및 생산기술연구소

\*\*Dynamics Research Group, University of Manchester

안하였다.

## 2. 비선형시스템의 주파수응답함수

### 2.1 Volterra급수와 고차 주파수응답함수

다항식으로 표시되는 비선형성을 갖는 시스템의 임의 입력  $x(t)$ 에 대한 응답  $y(t)$ 는 Volterra급수를 이용하여 다음과 같은 무한급수로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} y(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} y_n(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\tau_1) x(t - \tau_1) d\tau_1 + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\tau_1, \tau_2) \\ &\quad \cdot x(t - \tau_1) x(t - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 + \dots \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} h_n(\tau_1, \dots, \tau_n) \\ &\quad \cdot x(t - \tau_1) \cdots x(t - \tau_n) d\tau_1 \cdots d\tau_n + \dots \end{aligned} \quad (1)$$

위의 식에서  $h_1(\tau_1)$ 은 이 시스템에 대응하는 선형시스템의 충격응답이고,  $h_n(\tau_1, \dots, \tau_n)$ 은 고차의 충격응답으로 생각할 수 있다. 고차 FRF  $H_n(\omega_1, \dots, \omega_n)$ 은 고차 충격응답의 다차원 Fourier변환으로서 정의된다.

$$H_n(\omega_1, \dots, \omega_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} h_n(\tau_1, \dots, \tau_n) \prod_{i=1}^n e^{-j\omega_i \tau_i} d\tau_1 \cdots d\tau_n \quad (2)$$

정의에 의하여 고차 FRF는 대칭성을 갖는다. 즉  $H_n(\omega_1, \dots, \omega_n)$ 의 값은 자변수  $\omega_1, \dots, \omega_n$ 의 순서에 무관하다.

### 2.2 주파수응답함수의 유도

어떤 비선형시스템이 정현파가진

$$x(t) = X \cos \omega t = \frac{X}{2} e^{j\omega t} + \frac{X}{2} e^{-j\omega t} \quad (3)$$

을 받으면 식(1)의 각 응답성분은 고차 FRF의 정의를 이용하여 다음과 같이 표시된다.

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\tau_1) x(t - \tau_1) d\tau_1 dt_1 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\tau_1) \left\{ \frac{X}{2} e^{j\omega(t-\tau_1)} + \frac{X}{2} e^{-j\omega(t-\tau_1)} \right\} \\ &= H_1(\omega) \frac{X}{2} e^{j\omega t} + H_1(-\omega) \frac{X}{2} e^{-j\omega t} \\ y_2(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\tau_1, \tau_2) x(t - \tau_1) x(t - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \end{aligned}$$

$$= H_2(\omega, \omega) \left( \frac{X}{2} \right)^2 e^{j2\omega t} + 2H_2(\omega, -\omega)$$

$$\left( \frac{X}{2} \right)^2 + H_2(-\omega, -\omega) \left( \frac{X}{2} \right)^2 e^{-j2\omega t}$$

$$y_3(t) = \dots \quad (4)$$

따라서 전체응답은 다음과 같다.

$$y(t) = H_1(\omega) \frac{X}{2} e^{j\omega t} + H_1(-\omega) \frac{X}{2} e^{-j\omega t}$$

$$+ H_2(\omega, \omega) \left( \frac{X}{2} \right)^2 e^{j2\omega t}$$

$$+ H_2(-\omega, -\omega) \left( \frac{X}{2} \right)^2$$

$$+ H_3(\omega, \omega, \omega) \left( \frac{X}{2} \right)^3 e^{j3\omega t}$$

$$+ 3H_3(\omega, \omega, -\omega) \left( \frac{X}{2} \right)^3 e^{j\omega t}$$

$$+ 3H_3(\omega, -\omega, -\omega) \left( \frac{X}{2} \right)^3 e^{-j\omega t}$$

$$+ H_3(-\omega, -\omega, -\omega) \left( \frac{X}{2} \right)^3 e^{-j3\omega t}$$

$$+ \dots \quad (5)$$

이때  $H_1(\omega)$ 는 주어진 비선형시스템에 대응하는 선형시스템의 FRF이고,  $H_2, H_3$  등은 고차 FRF를 의미한다. 자변수  $\omega$ 가  $n-i$ 개이고,  $-\omega$ 가  $i$ 개인 고차 FRF  $H_n(\omega, \dots, \omega, -\omega, \dots, -\omega)$ 를 간략하게  $H_{n,i}$ 로 나타내기로 한다. 예를 들면  $H_{3,1}$ 은  $H_3(\omega, \omega, -\omega)$ 를 의미한다. 이와 같은 기호를 사용하면 위식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} y(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} y_n(t) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} H_{n,i} \left( \frac{X}{2} \right)^n e^{j(n-2i)\omega t} \end{aligned} \quad (6)$$

이때 이 항계수  $\binom{n}{i} = \frac{n!}{(n-i)! i!}$ 이다.

비선형시스템이 정현파가진을 받을 때 그 시스템의 주파수응답함수  $\tilde{H}_1(\omega)$ 는 가진주파수  $\omega$ 에서의 응답과 가진력의 복소비로서 나타낼 수 있고, 식(5)에서  $e^{j\omega t}$ 를 포함하는 항만을 고려하면 비선형시스템의 FRF는 다음과 같다.

$$\tilde{H}_1(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)}$$

$$= H_1(\omega) + \binom{3}{1} H_3(\omega, \omega, -\omega) \left( \frac{X}{2} \right)^2$$

$$\begin{aligned}
& + \binom{5}{2} H_5(\omega, \omega, \omega, -\omega, -\omega) \left(\frac{X}{2}\right)^4 \\
& + \dots \\
& = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{2m+1}{m} H_{2m+1,m} \left(\frac{X}{2}\right)^{2m} \quad (7)
\end{aligned}$$

위식은 비선형시스템의 FRF가 가진력의 진폭에 따라 변화함을 보여주고 있다. 만약 진폭이 작으면 고차항은 무시할 만하고, FRF는 선형시스템의 FRF  $H_1(\omega)$ 에 근사하다. 그러나 진폭이 커짐에 따라 고차항의 영향이 커지고, FRF는 선형의 경우로부터 점점 멀어지게 된다. 이상의 결과는 다항식으로 표시되는 비선형성을 갖는 시스템에만 적용이 되므로 Coulomb 마찰과 같이 다항식으로 표시할 수 없는 비선형요소를 갖는 시스템에서는 성립하지 않는다.

### 3. 수렴특성

#### 3.1 Duffing 진동자

비선형시스템의 FRF를 나타내는 무한급수의 수렴특성을 고찰하기 위하여 정현파가진을 받는 Duffing 진동자를 다루었다. 이 시스템의 운동방정식

$$\begin{aligned}
& m\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) + k_1y(t) + k_3y(t)^3 \\
& = \frac{X}{2}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}) \quad (8)
\end{aligned}$$

에 식(5)를 대입하고, 조화탐사법(harmonic probing method)<sup>(3)</sup>을 사용하면 고차 FRF를 구할 수 있다. 위의 식에 식(5)를 대입하고 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
& H_1(\omega) \frac{X}{2} e^{j\omega t} [m(j\omega)^2 + c(j\omega) + k_1] \\
& + H_1(-\omega) \frac{X}{2} e^{-j\omega t} [m(-j\omega)^2 + c(-j\omega) + k_1] \\
& + H_2(\omega, \omega) \left(\frac{X}{2}\right)^2 e^{j2\omega t} [m(j2\omega)^2 + c(j2\omega) + k_1] \\
& + \dots \\
& + H_3(\omega, \omega, \omega) \left(\frac{X}{2}\right)^3 e^{j3\omega t} [m(j3\omega)^2 + c(j3\omega) + k_1] \\
& + 3H_3(\omega, \omega, -\omega) \left(\frac{X}{2}\right)^3 e^{j\omega t} [m(j\omega)^2 + c(j\omega) + k_1] \\
& + \dots \\
& + k_3[H_1(\omega)^3 \left(\frac{X}{2}\right)^3 e^{j3\omega t} + H_1(-\omega)^3 \left(\frac{X}{2}\right)^3 e^{-j3\omega t}]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 3H_1(\omega)^2 H_1(-\omega) \left(\frac{X}{2}\right)^3 e^{j\omega t} + \dots] \\
& = \frac{X}{2} e^{j\omega t} + \frac{X}{2} e^{-j\omega t} \quad (9)
\end{aligned}$$

위의 식이 모든  $X$ 와  $\omega$ 값에 대하여 성립하기 위해서는 좌, 우변에 있는 유사한 항의 계수가 서로 같아야 한다. 양변의  $\left(\frac{X}{2}\right)^3 e^{j\omega t}$  항의 계수를 같게 놓음으로써

$$H_1(\omega) = \frac{1}{k_1 - m\omega^2 + j\omega} \quad (10)$$

을 얻고,  $\left(\frac{X}{2}\right)^3 e^{j\omega t}$  항의 계수로부터 다음 결과를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}
& 3H_3(\omega, \omega, -\omega) [k_1 - m\omega^2 + j\omega] \\
& + k_3[3H_1(\omega)^2 H_1(-\omega)] = 0 \\
& H_3(\omega, \omega, -\omega) = -k_3 H_1(\omega)^3 H_1(-\omega) \quad (11)
\end{aligned}$$

이와 같은 방법으로 식(9)에 나타나는 모든 고차 FRF에 대한 표현식을 구할 수 있고, 그 결과를 일반화하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
& \binom{n}{i} H_{n,i} H_1[(n-2i)\omega]^{-1} + k_3 \sum_{i_1}^{n_1} \sum_{i_2}^{n_2} \sum_{i_3}^{n_3} H_{n_1,i_1} H_{n_2,i_2} H_{n_3,i_3} = 0 \quad (12)
\end{aligned}$$

위의 식에 포함된 합산은  $n_1 + n_2 + n_3 = n$ 과  $i_1 + i_2 + i_3 = i$ 를 만족하는 모든 경우에 대해서 수행되어야 한다. 이 식은 임의의 고차 FRF가 그보다 차수가 낮은 고차 FRF들의 식으로써 표현됨을 보이고 있고, 따라서 선형 FRF  $H_1(\omega)$ 로 부터 시작하여 임의 차수의 고차 FRF를 구할 수 있다. 이 고차 FRF를 식(7)에 대입하면 비선형시스템의 FRF  $\tilde{H}_1(\omega)$ 를 계산할 수 있다.

정현파가진을 받는 Duffing 진동자의  $\tilde{H}_1(\omega)$ 를 매개변수값  $m=1 \text{ kg}$ ,  $c=10 \text{ Ns/m}$ ,  $k_1=10^4 \text{ N/m}$ ,  $k_3=10^{10} \text{ N/m}^3$ 에 대하여 계산하였다. 이 계의 선형 고유진동수는  $100 \text{ rad/s}$ 이다. 가진력진폭  $X=0.22 \text{ N}$ 일 때 식(7)의 첫  $n$ 항만을 고려하여 비선형FRF를 계산하고, 그 결과를 해석적인 FRF<sup>(7)</sup>와 함께 Fig. 1에 나타내었다. Volterra급수로부터 계산된 FRF는 고유진동수 주위에서 해석적인 FRF와 차이가 있고, 포함되는 항의 개수를 증가시킴에 따라 해석적인 FRF에 수렴하였다. 첫 15항을 포함하면 두 FRF는 거의 일치하였다.

가진력의 진폭을  $X=0.25 \text{ N}$ 으로 증가시키고,

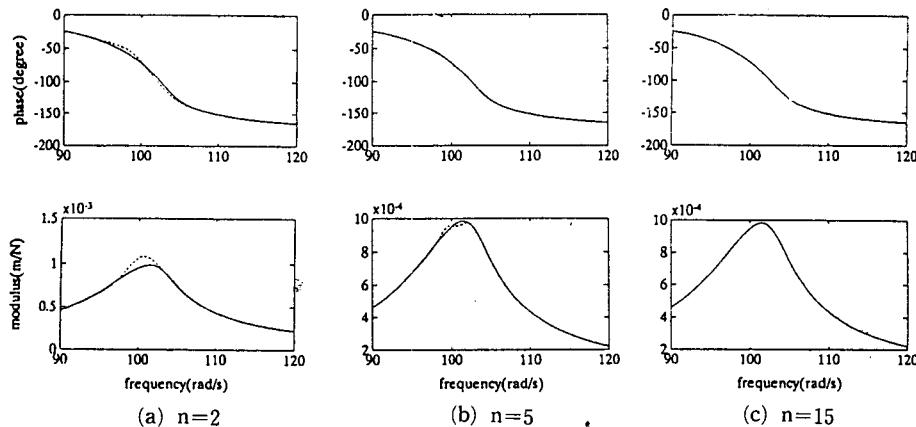


Fig. 1 Comparison of the analytical(solid) and  $n$  term approximated(dotted) FRFs of the Duffing oscillator when  $X=0.22$  N

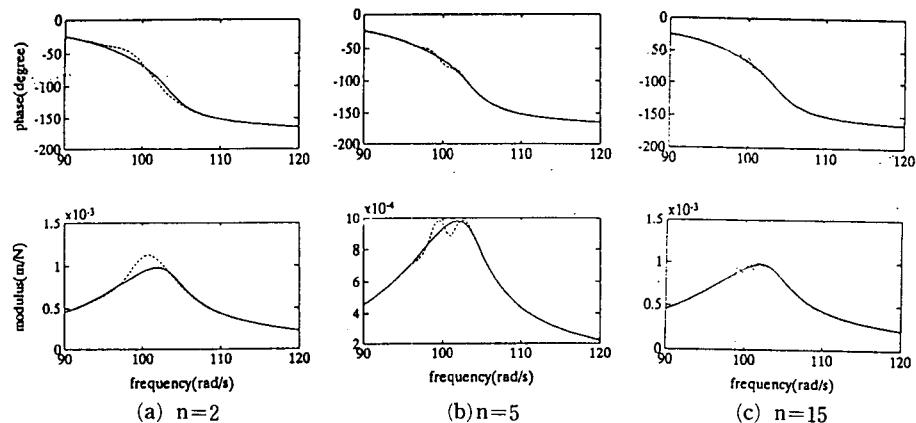


Fig. 2 Comparison of the analytical(solid) and  $n$ -term approximated(dotted) FRFs of the Duffing oscillator when  $X=0.25$  N

위의 과정을 반복하였다. 이 경우에는 Fig. 2에서 보이는 바와 같이 항의 개수를 증가시켜도 해석적인 FRF에 수렴하지 않고, 점점 발산하였다.

식(7)의 무한급수의 첫  $n$ 항을 고려하여 근사적으로 계산한 FRF와 해석적인 FRF 사이의 평균제곱오차(mean square error)를 여러가지 가진력 진폭에 대하여  $95 \text{ rad/s} \leq \omega \leq 105 \text{ rad/s}$  내의 각 주파수에서 계산하고, 그 결과를 Fig. 3에 나타내었다. 이 그림을 관찰하면 다음과 같은 사실을 알 수 있다. 가진력 진폭  $X$ 가 증가함에 따라 평균제곱오차가 증가한다.  $X$ 가 어떤 한계값(이 경우에는 0.23)보다 작으면 포함되는 항의 개수를 증가시킴에 따라 오차가 감소한다. 가진력의 진폭이 작아

비선형성의 영향이 적은 경우에는 2, 3개의 항만을 사용하여도 주파수응답함수를 비교적 정확하게 나타낼 수 있으나 가진력이 커짐에 따라 보다 많은 항을 포함하여야 한다. 예를 들면  $X=0.23$  N일 경우에는 평균제곱오차를 1% 이하로 낮추기 위하여 항 11개를 포함하여야 한다.  $X$ 가 이 한계값보다 커지면 항의 개수를 증가시킴에 따라 오차가 처음에는 감소하다가 점점 증가한다. 이로부터 식(7)의 무한급수는  $X$ 가 이 한계값 이내일 때만 수렴하고, 그 이상의 값에 대해서는 발산함을 알 수 있다. 이 무한급수를 수렴하게 하는 가진력 진폭의 수렴반경  $X=0.23$  N은 해석적인 FRF에 점프현상을 야기하는  $X>0.57$  N보다 훨씬 작은 값이므로

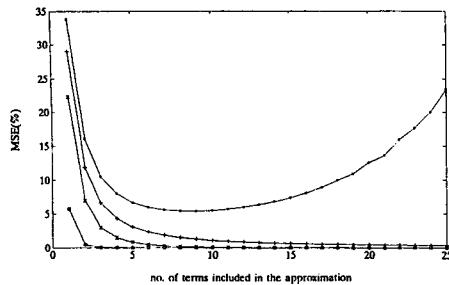


Fig. 3 Mean square error between the analytical and approximated FRFs of the Duffing oscillator  
 ○○○ X=0.10, ×× X=0.20,  
 + + + X=0.23, \*\*\* X=0.25.

점프현상과 같이 정도가 심한 비선형 특성은 이와 같은 해석방법으로 설명할 수 없음을 알 수 있다.

앞에서 사용한 Duffing 진동자의 매개변수를  $c = 40 \text{ Ns/m}$ ,  $k_3 = 10^7 \text{ N/m}^3$ 로 변화시키고 앞의 과정을 반복하여 유사한 수렴특성을 관찰하였다. 이 경우 가진력진폭의 수렴반경은  $X = 56.0 \text{ N}$ 으로 크게 증가하였는데, 이는 이 시스템의 비선형성이 앞의 경우에 비하여 매우 약하기 때문이다. 무한급수의 유한개의 항으로 근사화한 FRF와 해석적인 FRF 사이의 평균제곱오차는 항 10개를 포함할 경우 수렴반경이내의 모든 가진력진폭에 대하여 1%이하가 되었다.

### 3.2 수렴조건식

Duffing 진동자의 FRF를 나타내는 무한급수의 수렴반경을 예측하기 위한 수렴조건식을 제안하였다. 복소수급수가 수렴하기 위한 조건은 충분히 큰  $n$ 에 대해서 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{|\sigma_{n+1}|}{|\sigma_n|} < 1 \quad (13)$$

이 때  $|\sigma_n|$ 은  $n$ 번째 항의 크기를 뜻한다. 식(7)의 무한급수에 대해서 위의 비는 다음과 같다.

$$\frac{|\sigma_{n+1}|}{|\sigma_n|} = \frac{\binom{2m+3}{m+1}}{\binom{2m+1}{m}} \left(\frac{X}{2}\right)^2 \frac{|H_{2m+3,m+1}|}{|H_{2m+1,m}|} \quad (14)$$

충분히 큰  $n$ 에 대해서

$$\frac{\binom{2m+3}{m+1}}{\binom{2m+1}{m}} = \frac{(2m+2)(2m+3)}{(m+1)(m+2)} \simeq 4 \quad (15)$$

이므로

$$\frac{|\sigma_{n+1}|}{|\sigma_n|} = X^2 \frac{|H_{2m+3,m+1}|}{|H_{2m+1,m}|} \quad (16)$$

식(12)를  $n=2m+3$ 과  $i=m+1$ 에 대해서 쓰면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \binom{2m+3}{m+1} H_{2m+3,m+1} H_1(\omega)^{-1} \\ & + k_3 [6 \binom{2m+1}{m} H_{2m+1,m} H_1(\omega) H_1(-\omega) \\ & + 3 \binom{2m+1}{m+1} H_{2m+1,m+1} H_1(\omega)^2 \\ & + 3 \binom{2m+1}{m-1} H_{2m+1,m-1} H_1(-\omega)^2 + \dots] \\ & = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

수치계산에 의하면 위식의 괄호안에 있는 첫번째 항은 크기의 차수(order)가 가장 큰 항 중의 하나임을 알 수 있다. 첫번째 항과 같은 차수의 또 다른 항들이 존재하므로 이것이 괄호안의 전체 크기를 근사적으로 나타낸다고 할 수 없고, 단지 이 항의 차수와 괄호안 전체값의 차수가 같다고 생각할 수 있다. 따라서 계수들을 무시하고, 항의 크기의 차수만을 고려하면 다음과 같은 근사식을 얻을 수 있다.

$$\frac{|H_{2m+3,m+1}|}{|H_{2m+1,m}|} \simeq k_3 |H_1(\omega)|^3 \quad (18)$$

식(18)을 (16)에 대입하면 다음과 같은 간단한 수렴조건식을 얻을 수 있다.

$$X^2 k_3 |H_1(\omega)|^3 < 1 \quad (19)$$

이 조건식은  $|H_1(\omega)|$ 가 최대가 되는 주파수에서 발산이 먼저 시작됨을 나타내고 있다. 감쇠가 작은 경우에는  $|H_1(\omega)|$ 의 최대값이 고유진동수에서의 값과 근사하므로 위의 조건식을 적용할 경우 고유진동수에서의 값을 사용하기로 한다. 앞에서 다룬 Duffing 진동자의 경우  $k_3 = 10^{10} \text{ N/m}^3$ 이고, 고유진동수에서  $|H_1(\omega)| = 10^3 \text{ m/N}$ 으로 위의 조건식으로부터 예측한 수렴반경은  $X = 0.316 \text{ N}$ 이다. 가진력진폭의 실제 수렴반경은 0.23 N이고, 이는 조건식으로부터 예측한 값의 72.8 %이다. 이러한 차이가 생기는 이유는 조건식을 유도하는 과정에서 근사식을 사용하였기 때문이다. Duffing 진동자의 매개변수값을 변화시킨 경우 가진력진폭의 실제 수렴반경은 위의 조건식으로 예측한 값의 70 %로서 앞

의 경우와 비슷한 수준이었다. 정확한 수렴조건식을 얻기 위해서는 고차 FRF의 표현식에 대한 보다 깊은 연구가 이루어져야 한다.

#### 4. 결 론

Volterra급수를 이용하여 정현파가진을 받는 비선형시스템의 FRF를 무한급수의 식으로 나타내고, 이 급수의 수렴특성을 Duffing 진동자에 대하여 고찰하였다. 이 무한급수는 가진력 진폭이 어떤 값(수렴반경)이내일 경우에만 수렴하고, 그 이상의 가진력에 대해서는 발산한다. 수렴반경 이내에서 이 무한급수는 시스템의 해석적인 FRF에 수렴하고, 수렴반경은 해석적인 FRF에 점프현상을 야기하는 가진력의 절반 이하이다. 이 무한급수가 수렴할 경우 이 급수의 유한개의 항으로부터 근사적으로 계산한 FRF와 해석적인 FRF사이의 오차는 가진력의 진폭과 함께 증가하고, 포함된 항의 개수가 많아짐에 따라 감소한다. 이 오차는 무한급수의 10여개의 항을 사용함으로써 수렴반경내의 모든 가진력에 대하여 1%이내로 줄일 수 있다. 또 본 논문에서는 가진력의 수렴반경을 예측할 수 있는 수렴조건식을 근사적으로 유도하였다. 가진력의 실제 수렴반경은 이 조건식으로부터 예측된 값의 약 70%이며 정확한 수렴조건식을 얻기 위해서는 고차 FRF에 대한 많은 연구가 요구된다. 정현파가진을 받는 비선형시스템의 FRF 수렴특성에 관한 이상의 연구방법은 다른 비선형 특성을 갖는 시스템에 대해서도 유사하게 적용될 수 있다.

#### 후 기

이 연구는 한국과학재단의 92년도 해외 Post-

Doc. 연수지원에 의하여 이루어졌으며, 동 재단에 감사를 드립니다.

#### 참고문헌

- (1) Storer, D. M. and Tomlinson, G. R., 1991, "An Explanation of the Cause of the Distortion in the Transfer Function of a Duffing Oscillator Subject to Sine Excitation," *Proceedings of the Florence Modal Analysis Conference*, pp. 271 ~280.
- (2) Volterra, V., 1959, *Theory of Functionals and of Integral and Integrodifferential Equations*, Dover, New York.
- (3) Bedrosian, E. and Rice, S. O., 1971, "The Output Properties of Volterra Systems Driven by Harmonic and Gaussian Inputs," *Proceedings of the IEEE*, Vol. 59, pp. 1688~1707.
- (4) Gifford, S. J. and Tomlinson, G. R., 1989, "Recent Advances in the Application of Functional Series to Non-Linear Structures," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 135, pp. 289~317.
- (5) Peyton Jones, J. C. and Billings, S. A., 1990, "Interpretation of Non-Linear Frequency Response Functions," *International Journal of Control*, Vol. 52, pp. 319~346.
- (6) Storer, D. M., 1991, "Dynamic Analysis of Non-Linear Structures Using Higher Order Frequency Response Functions," Ph. D. Thesis, University of Manchester.
- (7) Rao, S. S., 1990, *Mechanical Vibrations*, Addison-Wesley.