

〈論 文〉

일관장 개념의 평면변형률 요소에의 확장

김 용 우*

(1994년 9월 14일 접수)

Extension of Field-Consistency to Plane Strain Elements

Yong-woo Kim

Key Words : Field-Consistency(일관장), Marginal Field(한계장), Excess Field(과잉장), Unmatched Term(불일치항), True Constraint(진성구속조건), Spurious Constraint(가성구속조건), Full Minimization(완전 최소화), Reduced Minimization(감차 최소화)

Abstract

The applicability of the field-consistency paradigm, which was originally employed for analysis of locking due to constrained energy having the second power of a strain, is extended to the constrained energy having a quadratic form of strain. For the extension, nearly-incompressible plane strain problem is considered by introducing the concept of reduced minimization. The field-consistent analysis of the plane strain problem leads to a clear and systematic understanding on the relation amongst constraints imposed on element, spurious constraint-free optimal points, and integration order used.

1. 서 론

최근의 연구들^(1~7)을 보면, 일관장(field-consistency) 개념을 사용하여 페널티승수(penalty multiplier)가 형성되는 에너지 범함수를 갖는 문제에서 발생하는 강성과잉현상의 원인을 설명하고, 더 나아가서 강성과잉현상을 극복하기 위한 등매개 C^0 -연속요소를 개발하고 있다. 이러한 연구들로, 티모센코보, 면내변형곡선보,^(1,2) 면외변형곡선보,⁽³⁾ 민드린 판 및 셀,^(4~6) 평면응력 요소로 모델링한 보⁽⁷⁾ 등을 들 수 있다. 보다 최근의 연구^(8~10)에서는, 동일한 문제들, 즉 페널티승수가 형성되는 에너지 범함수를 갖는 문제에 대하여 일관장 개념을 고려한 감차 최소화(reduced minimization) 개념을 도입하여 유한요소에 부과되는 구속조건, 최적 응력점, 적분

방법 등의 관계를 에너지를 최소화시키는 관점에서 통합적으로 설명하고 있다. 위의 연구들은, 변형률의 제곱꼴로 표현되는 구속에너지(constrained energy)만을 취급하고 있으며, 변형률의 제곱꼴이 아닌 구속에너지에 대하여 일관장 개념을 이용한 이론적 분석은 거의 찾아 보기 어렵다.

본 연구에서는, 변형률의 제곱꼴이 아닌 구속에너지에 대하여 일관장 및 감차 최소화 개념을 적용하여 요소의 거동을 검토하고자 한다. 이를 위하여, 변형률의 제곱꼴이 아닌 구속에너지를 갖는 준비압축성 평면변형률문제(nearly-incompressible plane strain problem)를 대상으로 일관장 개념을 확장 적용하고, 평면변형률 요소에 부과되는 구속조건, 최적응력점, 적분방법에 따른 변형률장 등의 관계를 통합적으로 설명하고자 한다.

본 논문에서는 문제를 단순화시켜 고려하기 위하여 전체좌표계와 요소좌표계의 방향이 일치하며, 자코비안 행렬식이 1인 4, 8, 9-절점 요소들을 대

*정회원, 순천대학교 기계공학과

상으로 삼았다. 이 요소들에 대하여 최소화의 방법(완전 최소화와 감차 최소화)에 따라서 요소에 부과되는 구속조건이 어떻게 달라지는가에 대하여 조사 분석하였다. 또한, 감차적분을 적용할 때 수치해의 정확도가 향상되는 이유를 설명하였다. 이로써 변형률의 제공꼴이 아닌 구속에너지를 갖는 문제에 일관장 개념을 확장·적용할 수 있는 이론적 근거를 마련하였다.

2. 일관장 개념의 확장

2.1 동등 범함수

등방성 물질의 평면변형률문제의 범함수는 다음과 같다.

$$I = I_1 + I_2 + W_p \quad (1)$$

위의 식에서

$$I_1 = \frac{D_1}{2} \int_A \{(\epsilon_x)^2 + (\epsilon_y)^2 + 2\lambda(\epsilon_x) \cdot (\epsilon_y)\} dA \quad (2)$$

$$I_2 = \frac{D_2}{2} \int_A (\gamma_{xy})^2 dA \quad (3)$$

이고, W_p 는 하중 포텐셜(potential of applied loads)이다. 식(2)와 (3)의 D_1 , D_2 및 λ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} D_1 &= E(1-\nu)/(1+\nu)(1-2\nu) \\ D_2 &= E/2(1+\nu) \\ \lambda &= \nu/(1-\nu) \end{aligned} \quad (4)$$

위의 식에서 ν 는 푸아송비이며 E 는 종탄성계수이다.

또한, ϵ_x 와 ϵ_y 는 각각 x 방향과 y 방향의 수직변형률이고, γ_{xy} 는 전단변형률로서 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \partial u / \partial x \\ \epsilon_y &= \partial v / \partial y \\ \gamma_{xy} &= \partial u / \partial y + \partial v / \partial x \end{aligned} \quad (5)$$

여기서, x 와 y 는 직교좌표 축이고, u 와 v 는 x 방향과 y 방향의 변위이다.

범함수 I 를 최소화시킨다는 것은, 이론해 $u = \bar{u}$ 과 $v = \bar{v}$ 를 해로 갖는 동등 범함수(equivalent functional)를 최소화시키는 것과 동일하다. 즉, 범함수 I 를 최소화시킨다는 것은, 다음과 같이 정의되는 동등 범함수를 최소화시키는 것과 같다.⁽¹¹⁾

$$\bar{I} = \bar{I}_1 + \bar{I}_2 \quad (6)$$

여기서,

$$\bar{I}_1 = \frac{D_1}{2} \int_A \{(\bar{\epsilon}_x)^2 + (\bar{\epsilon}_y)^2 + 2\lambda(\bar{\epsilon}_x) \cdot (\bar{\epsilon}_y)\} dA \quad (7)$$

$$\bar{I}_2 = \frac{D_2}{2} \int_A (\bar{\gamma}_{xy})^2 dA \quad (8)$$

이고 식(7)과 (8)의 $\bar{\epsilon}_x$, $\bar{\epsilon}_y$ 및 $\bar{\gamma}_{xy}$ 는 변형률 오차로서

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon}_x &= \epsilon_x - \bar{\epsilon}_x \\ \bar{\epsilon}_y &= \epsilon_y - \bar{\epsilon}_y \\ \bar{\gamma}_{xy} &= \gamma_{xy} - \bar{\gamma}_{xy} \end{aligned} \quad (9)$$

와 같이 정의되며, $\bar{\epsilon}_x$, $\bar{\epsilon}_y$, $\bar{\gamma}_{xy}$ 는 이론해 \bar{u} 와 \bar{v} 로부터 구한 변형률이다.

본 논문에서는, 준·비압축성 평면변형률문제의 유한요소 수치해의 거동을 검토하기 위하여 $\nu \rightarrow 1/2$ 일 때의 평면변형률문제를 취급한다. $\nu \rightarrow 1/2$ 일 때, 식(4)의 D_1 과 D_2 는 각각 $D_1 \rightarrow \infty$, $D_2 \rightarrow E/3$ 으로 되어, 식(6)의 수직변형률 에너지항에 페널티승수가 형성된다. 그러므로, 준·비압축성 평면변형률문제의 이론해 중에서 \bar{I}_1 과 관련된 자유도의 이론해는 \bar{I}_1 을 최소화시켜서 얻은 해에 접근하게 된다.⁽¹¹⁾ 따라서 본 연구에서는 \bar{I}_1 의 최소화애 일관장 개념을 도입하여 \bar{I}_1 과 관련된 자유도의 수치적 거동을 검토하고자 한다.

2.2 불일치항과 가상구속조건

본 절에서는 불일치항(unmatched term)⁽⁸⁻¹⁰⁾과 수직변형률의 가상구속조건(spurious constraint)의 개념을 도입하기 위하여, $\nu \rightarrow 1/2$ 일 때 \bar{I}_1 의 최소화과정을 고찰한다. 문제를 단순화시키기 위해 전 좌표계(x, y)와 요소좌표계(r, s)의 방향이 동일하고, 자코비안 행렬식(Jacobian determinant)이 1인 경우를 고려한다.

4-절점 요소의 변위함수를 다음과 같이 가정하면

$$\begin{aligned} u &= a_0 + a_1 r + a_2 s + a_3 r s \\ v &= b_0 + b_1 r + b_2 s + b_3 r s \end{aligned} \quad (10)$$

이로부터 유도되는 수직변형률의 일차결합(linear combination)은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \epsilon_x + \epsilon_y &= (a_1 + \lambda b_2) + \lambda b_3 r + a_3 s \\ &\stackrel{let}{=} A_0 + A_1^r r + A_2^s s \\ \epsilon_y + \epsilon_x &= (b_2 + \lambda a_1) + b_3 r + \lambda a_3 s \end{aligned} \quad (11)$$

$$= B_0 + B_1^p r + B_2^s s \quad (12)$$

위 식(11)과 (12)에서 기호 $\overset{let}{=}$ 의 의미는 그 기호의 전항(前項)의 각 계수를 그 기호의 후항(後項)의 계수로 표시한다는 의미이다. 즉, 식(11)을 예로 들면, $A_0 = a_1 + \lambda b_2$, $A_1^p = \lambda b_3$ 및 $A_2^s = a_3$ 로 놓는다는 의미이다. 또한, 상점자 u 또는 v 는 근사 변형률의 불일치계수를 나타낸다. 근사 변형률에서 불일치계수의 외형적 특징은 서로 다른 변위함수의 계수 중, 어느 한 쪽만의 변위함수의 계수로 표현된다는 것이다. 상점자 u 나 v 는 그 불일치계수에 기여되는 변위를 나타낸다. 즉, $A_1^p = \lambda b_3$ 는 변위 v 만으로부터 기여된 계수로 표현되는 불일치 계수이고, $A_2^s = a_3$ 는 변위 u 만으로부터 기여된 계수로 표현되는 불일치 계수이다. 반면에 상점자가 없는 일치항(matched term)은 외형적으로 두 변위함수의 계수로 표현되고 있다.

정의-1(불일치항과 불일치계수)

가정한 다항 변위함수 u 와 v 를 사용하여 $\epsilon_x + \epsilon_y$ 및 $\epsilon_y + \epsilon_x$ 를 표현했을 때, 이것들의 근사 변형률도 다항식으로 표현된다. 이 근사 변형률의 다항(polynomial term)들 중, 변위함수 u 와 v 의 계수를 모두 포함하는 다항을 일치항이라 부르고, 어느 한쪽만으로 표현되는 다항을 불일치항이라 부른다. 또한, 일치항의 계수를 일치계수(matched coefficient), 불일치항의 계수를 불일치계수(unmatched coefficient)라 부른다.

위의 정의-1에서와 같이 근사 변형률의 각 항을 일치항과 불일치항으로 구분하는 이유와 일치항과 불일치항으로 구분하는데 $\epsilon_x + \epsilon_y$ 과 $\epsilon_y + \epsilon_x$ 을 사용하는 근거를 설명하기 위하여, Fig. 1의 다항들로 구성되는 세가지의 이론 변위장(exact displacement field)들을 식(10)의 선형 변위함수를 이용하여 나타내는 과정을 살펴보기로 한다.

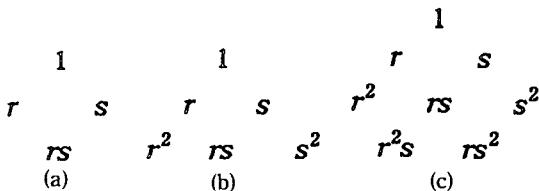


Fig. 1 The polynomial terms in the three exact displacement fields

2.2.1 선형 변위장

Fig. 1(a)의 다항들을 포함하는 이론 변위장을 다음과 같이 가정하면

$$\begin{aligned} \bar{u} &= a_0 + a_1 r + a_2 s + a_3 rs \\ \bar{v} &= \beta_0 + \beta_1 r + \beta_2 s + \beta_3 rs \end{aligned} \quad (13)$$

위 식으로부터 다음의 이론 변형률장(exact strain field)을 얻는다.

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon}_x + \lambda \bar{\epsilon}_y &= (a_1 + \lambda \beta_2) + \lambda \beta_3 r + a_3 s \\ \bar{\epsilon}_y + \lambda \bar{\epsilon}_x &= (\beta_2 + \lambda a_1) + \beta_3 r + \lambda a_3 s \end{aligned} \quad (14)$$

또한, 식(9)의 정의를 사용하여 다음의 변형률 오차들을 얻는다.

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon}_x + \lambda \bar{\epsilon}_y &= [A_0 - (a_1 + \lambda \beta_2)] + [A_1^p - \lambda \beta_3] r + [A_2^s - a_3] s \\ &\overset{let}{=} \bar{A}_0 + \bar{A}_1^p r + \bar{A}_2^s s \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon}_y + \lambda \bar{\epsilon}_x &= [B_0 - (\beta_2 + \lambda a_1)] + [B_1^p - \beta_3] r + [B_2^s - \lambda a_3] s \\ &\overset{let}{=} \bar{B}_0 + \bar{B}_1^p r + \bar{B}_2^s s \end{aligned} \quad (16)$$

본 논문에서는 근사 변형률의 불일치계수 및 불일치 계수를 포함하고 있는 $\bar{\epsilon}_x + \lambda \bar{\epsilon}_y$ 및 $\bar{\epsilon}_y + \lambda \bar{\epsilon}_x$ 의 계수들에 상점자 u 또는 v (불일치계수에 기여되는 변위)를 붙여 표시하고 있다.

2.2.2 2차 변위장

Fig. 1(b)의 다항들을 포함하는 이론 변위장을 다음과 같이 가정한다.

$$\begin{aligned} \bar{u} &= a_0 + a_1 r + a_2 s + a_3 rs + a_4 r^2 + a_5 s^2 \\ \bar{v} &= \beta_0 + \beta_1 r + \beta_2 s + \beta_3 rs + \beta_4 r^2 + \beta_5 s^2 \end{aligned} \quad (17)$$

위 식으로부터 다음의 이론 변형률장을 얻는다.

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon}_x + \lambda \bar{\epsilon}_y &= (a_1 + \lambda \beta_2) + (2a_4 + \lambda \beta_3) r + (a_5 + 2\lambda \beta_5) s \\ \bar{\epsilon}_y + \lambda \bar{\epsilon}_x &= (\beta_2 + \lambda a_1) + (\beta_3 + 2\lambda a_4) r + (2\beta_5 + \lambda a_5) s \end{aligned} \quad (18)$$

식(18)의 이론 변형률장을 살펴보면, 각 변형률은 식(11)과 (12)의 변형률이 갖는 모든 항을 갖고 있으며, 이 변형률장의 각 항은 식(17)의 이론 변위장 \bar{u} 와 \bar{v} 로부터 기여되는 성분들을 갖고 있다. 이와 같은 변위장 및 변형률장을 4-절점 요소의 한계 변위장 및 한계 변형률장이라고 부르기로 한다.

정의-2(한계 변위장과 한계 변형률장)

표현하고자 하는 이론 변형률장($\bar{\epsilon}_x + \lambda \bar{\epsilon}_y$ 또는 $\bar{\epsilon}_y + \lambda \bar{\epsilon}_x$)의 다항들이, n -절점 요소의 변위함수로부터

터 얻은 근사변형률($\epsilon_x + \lambda\epsilon_y$, 또는 $\epsilon_y + \lambda\epsilon_x$)이 갖고 있는 다항과 일치하고, 그 이론변형률장($\bar{\epsilon}_x + \lambda\bar{\epsilon}_y$, 또는 $\bar{\epsilon}_y + \lambda\bar{\epsilon}_x$)의 각 항이 모두 \bar{u} 와 \bar{v} 로부터 기여 되는 성분들을 갖고 있을 때; 이러한 다항 변위장 (\bar{u} , \bar{v}) 및 변형률장($\bar{\epsilon}_x + \lambda\bar{\epsilon}_y$, $\bar{\epsilon}_y + \lambda\bar{\epsilon}_x$)을 각각 n -절점 요소의 한계변위장(marginal displacement field), 한계변형률장(marginal strain field)이라 부른다.

식(11), (12)와 식(18)을 사용하여 다음의 변형률 오차를 얻는다.

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon}_x + \lambda\bar{\epsilon}_y &= [A_0 - (\alpha_1 + \lambda\beta_2)] + [A_1^p - (2\alpha_1 + \lambda\beta_3)]r \\ &\quad + [A_2^p - (\alpha_3 + 2\lambda\beta_5)]s \\ &\stackrel{let}{=} \bar{A}_0 + \bar{A}_1^p r + \bar{A}_2^p s \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon}_y + \lambda\bar{\epsilon}_x &= [B_0 - (\beta_2 + \lambda\alpha_1)] + [B_1^p - (\beta_3 + 2\lambda\alpha_4)]r \\ &\quad + [B_2^p - (2\beta_5 + \lambda\alpha_5)]s \\ &\stackrel{let}{=} \bar{B}_0 + \bar{B}_1^p r + \bar{B}_2^p s \end{aligned} \quad (20)$$

2.2.3 완전 2차 다항과 r^2s 및 rs^2 항을 포함하는 변위장

Fig. 1(c)의 다항들을 포함하는 이론변위장을 다음과 같이 가정한다.

$$\begin{aligned} \bar{u} &= a_0 + a_1 r + a_2 s + a_3 rs + a_4 r^2 + a_5 s^2 \\ &\quad + a_6 r^2 s + a_7 rs^2 \\ \bar{v} &= b_0 + b_1 r + b_2 s + b_3 rs + b_4 r^2 + b_5 s^2 \\ &\quad + b_6 r^2 s + b_7 rs^2 \end{aligned} \quad (21)$$

위 식으로부터 다음의 이론변형률장을 얻는다.

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon}_x + \lambda\bar{\epsilon}_y &= (\alpha_1 + \lambda\beta_2) + (2\alpha_1 + \lambda\beta_3)r + (\alpha_3 + 2\lambda\beta_5)s \\ &\quad + \lambda\beta_6 r^2 + (2\alpha_6 + 2\lambda\beta_7)rs + \alpha_7 s^2 \\ \bar{\epsilon}_y + \lambda\bar{\epsilon}_x &= (\beta_2 + \lambda\alpha_1) + (\beta_3 + 2\lambda\alpha_4)r + (2\beta_5 + \lambda\alpha_5)s \\ &\quad + \beta_6 r^2 + (2\beta_7 + 2\lambda\alpha_6)rs + \lambda\alpha_7 s^2 \end{aligned} \quad (22)$$

식(11), (12)와 식(22)를 사용하여, 다음의 변형률 오차를 구한다.

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon}_x + \lambda\bar{\epsilon}_y &= [A_0 - (\alpha_1 + \lambda\beta_2)] + [A_1^p - (2\alpha_1 + \lambda\beta_3)]r \\ &\quad + [A_2^p - (\alpha_3 + 2\lambda\beta_5)]s + [-\lambda\beta_6]r^2 \\ &\quad + [-(2\alpha_6 + 2\lambda\beta_7)]rs + [-\alpha_7]s^2 \\ &\stackrel{let}{=} \bar{A}_0 + \bar{A}_1^p r + \bar{A}_2^p s + \bar{A}_3^+ r^2 \\ &\quad + \bar{A}_4^+ rs + \bar{A}_5^+ s^2 \\ \bar{\epsilon}_y + \lambda\bar{\epsilon}_x &= [B_0 - (\beta_2 + \lambda\alpha_1)] + [B_1^p - (\beta_3 + 2\lambda\alpha_4)]r \\ &\quad + [B_2^p - (2\beta_5 + \lambda\alpha_5)]s + [-\beta_6]r^2 \\ &\quad + [-(2\beta_7 + 2\lambda\alpha_6)]rs + [-\lambda\alpha_7]s^2 \end{aligned} \quad (23)$$

$$\stackrel{let}{=} \bar{B}_0 + \bar{B}_1^p r + \bar{B}_2^p s + \bar{B}_3^+ r^2 + \bar{B}_4^+ rs + \bar{B}_5^+ s^2 \quad (24)$$

여기서, 상첨자 +는 식(21)의 밀출된 항으로부터 온 항들을 나타낸다. 이러한 항들은 식(11)과 (12)의 근사변형률이 갖고 있는 고유항이 아니기 때문에 식(10)의 변위함수를 사용해서는 식(21)로 주어지는 변위장을 제대로 묘사할 수 없다. 따라서 본문에서는 이러한 항들을 과잉항(excess term)이라 부르기로 한다.

정의-3(과잉변위장, 과잉변형률장 및 과잉항)

표현하고자 하는 이론변형률장($\bar{\epsilon}_x + \lambda\bar{\epsilon}_y$, $\bar{\epsilon}_y + \lambda\bar{\epsilon}_x$)의 다항들이, n -절점 요소의 변위함수로부터 얻은 근사변형률($\epsilon_x + \lambda\epsilon_y$, $\epsilon_y + \lambda\epsilon_x$)이 갖고 있는 다항뿐만 아니라, 근사변형률이 갖고 있지 않는 추가적인 항을 포함하고 있을 경우; 이 때의 이론 변형률장($\bar{\epsilon}_x + \lambda\bar{\epsilon}_y$, $\bar{\epsilon}_y + \lambda\bar{\epsilon}_x$)을 n -절점 요소의 과잉 변형률장(excess strain field)이라 부르고, 그 추가적인 항을 과잉항, 과잉항의 계수를 과잉계수(excess coefficient)라 부른다. 그리고 이 때의 이론 변위장(\bar{u} , \bar{v})을 과잉변위장(excess displacement field)이라 부른다.

2.2.4 가성구속조건

준·비압축성 평면변형률문제에서 \bar{I} 을 최소화시켜 얻는 이론해중, \bar{I}_1 과 관련된 자유도의 이론해는 ν 가 1/2에 접근할수록 \bar{I}_1 를 최소화시켜 얻는 이론해에 접근하므로, ⁽¹¹⁾ 본 연구에서는 \bar{I}_1 의 최소화를 사용하여 \bar{I}_1 과 관련된 자유도의 수치적 거동을 검토한다. \bar{I}_1 의 최소화는 식(15), (16), (19), (20), (23), (24)의 $\bar{\epsilon}_x + \lambda\bar{\epsilon}_y$ 과 $\bar{\epsilon}_y + \lambda\bar{\epsilon}_x$ 를 사용하여 다음과 같이 행한다.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial a_i} &= 0 \\ \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial b_i} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{for } i=0, 1, 2, 3 \quad (25)$$

다시, 식(7)을 식(25)에 대입하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

For $i=0, 1, 2, 3$;

$$\int_A (\bar{\epsilon}_x + \lambda\bar{\epsilon}_y) \frac{\partial (\bar{\epsilon}_x + \lambda\bar{\epsilon}_y)}{\partial a_i} dA = 0 \quad (26)$$

$$\int_A (\bar{\epsilon}_y + \lambda\bar{\epsilon}_x) \frac{\partial (\bar{\epsilon}_y + \lambda\bar{\epsilon}_x)}{\partial b_i} dA = 0 \quad (27)$$

이제, 위의 세 가지 경우의 변위장에 대해, 식

(26)과 (27)을 사용하여 최소화시켜, 그 결과를 검토한다. 먼저, 2.2.2절의 경우를 고려한다. 식(19)를 식(26)에 대입하여 다음 식들을 얻는다.

$$\bar{A}_0=0 \text{ or } A_0=a_1+b_2=a_1+\lambda\beta_2 \quad (28)$$

$$\bar{A}_2^s=0 \text{ or } A_2^s=a_3=\alpha_3+2\lambda\beta_3 \quad (29)$$

위 식(28)과 (29)에서 밑줄친 부분은 유한차분법을 이용하여 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$a_1+\lambda b_2 \approx (u,r)_0 + \lambda(v,s)_0 \quad (30)$$

$$a_3 \approx (u,rs)_0 \quad (31)$$

여기서, 하첨자 0는 요소의 도심을 의미한다. 위의 식(30), (31)의 우변은 식(17)의 변위를 사용하여 계산하면 다음과 같다.

$$(\bar{u},r)_0 + \lambda(\bar{v},s)_0 = \alpha_1 + \lambda\beta_2 \quad (32)$$

$$(\bar{u},rs)_0 = \alpha_3 \quad (33)$$

식(28), (29)와 식(32), (33)을 비교해 보면, 식(28)은 식(32)와 일치하나, 식(29)는 식(33)과 일치하지 않음을 알 수 있다. 식(28)과 같은 구속조건을 '진성구속조건(true constraint)'이라 부르고, 식(29)와 같은 구속조건을 '가성구속조건(spurious constraint)'이라 부른다. 이 가상구속조건은 요소에 실제와 다른 조건을 부여함으로써 식(17)의 변위장을 정확히 묘사할 수 없게 만든다. 또한, 여기서 눈여겨 보아야 할 점은, $\epsilon_x + \lambda\epsilon_y$ 의 한계 변위장을 묘사할 때, 가상구속조건은 상첨자 u 를 갖는 불일치항으로부터 발생되며 진성구속조건은 일치항으로부터 발생된다는 사실이다. $\epsilon_x + \lambda\epsilon_y$ 의 가상구속조건이 상첨자 u 를 갖는 불일치항으로부터 발생하는 이유는 식(25)의 첫번째 식에 의해, 자유도 $b_i(i=0, 1, 2, 3)$ 에 관해 최소화시켰기 때문이다. 따라서 본 논문에서는 A_i^s 를 ' $\epsilon_x + \lambda\epsilon_y$ 의 실질 불일

치계수(real unmatched coefficient)'라 부른다.

식(20)을 식(27)에 대입하여 다음의 구속조건들을 얻는다.

$$\bar{B}_0=0 \text{ or } B_0=b_2+\lambda a_1=\beta_2+\lambda\alpha_1 \quad (34)$$

$$\bar{B}_1^r=0 \text{ or } B_1^r=b_3=\beta_3+2\lambda\alpha_3 \quad (35)$$

위의 구속조건들을 식(30)~(33)에서 사용한 동일한 방법을 사용하여 검토하면, 식(34)는 진성구속조건이며 식(35)는 가상구속조건임을 알 수 있다. 또한, $\epsilon_y + \lambda\epsilon_x$ 의 한계변위장을 묘사할 때, 진성구속조건은 근사변형률($\epsilon_y + \lambda\epsilon_x$)의 일치항으로부터 발생되고, 가상 구속조건은 상첨자 v 를 갖는 불일치항으로부터 발생됨을 확인할 수 있다. $\epsilon_y + \lambda\epsilon_x$ 의 가상 구속조건이 상첨자 v 를 갖는 불일치항으로부터 발생하는 것은 식(25)의 두번째 식에 의해, 자유도 $b_i(i=0, 1, 2, 3)$ 에 관해 최소화시켰기 때문이다. 본 논문에서는 B_i^r 를 ' $\epsilon_y + \lambda\epsilon_x$ 의 실질 불일치계수(real unmatched coefficient)'라 부른다.

정의-4(실질 불일치항과 실질 불일치계수)

가정한 다항 변위함수 u 와 v 를 사용하여 $\epsilon_x + \lambda\epsilon_y$ 및 $\epsilon_y + \lambda\epsilon_x$ 를 표현했을 때, 이것들의 근사 변형률도 다항식으로 표현된다. $\epsilon_x + \lambda\epsilon_y$ 의 불일치계수중, 변위함수 u 만으로부터 기여되는 불일치계수를 ' $\epsilon_x + \lambda\epsilon_y$ 의 실질 불일치계수(real unmatched coefficient)'라 부르고, $\epsilon_y + \lambda\epsilon_x$ 의 불일치계수중, 변위함수 v 만으로부터 기여되는 불일치계수를 ' $\epsilon_y + \lambda\epsilon_x$ 의 실질 불일치계수(real unmatched coefficient)'라 부른다. 또한, 이러한 실질 불일치항의 계수를 포함하는 항을 ' $\epsilon_x + \lambda\epsilon_y$ 또는 $\epsilon_y + \lambda\epsilon_x$ 의 실질 불일치항(real unmatched term)'이라 부른다.

다음으로, 2.2.1절과 2.2.3절의 이론변위장을 선형

Table 1 The constraints imposed on bilinear element when the polynomial displacement fields in Eq. (13) are represented by bilinear element ; where T denotes a true constraint

	Constraints	Alternative forms of the constraints and their values calculated by using Eq.(13)	Type of constraints
By Eq.(26)	$A_0=a_1+\lambda b_2=\alpha_1+\lambda\beta_2$	$(u,r)_0+\lambda(v,s)_0=\alpha_1+\lambda\beta_2$	T
	$A_2^s=a_3=\alpha_3$	$(u,rs)_0=\alpha_3$	T
By Eq.(27)	$B_0=b_2+\lambda a_1=\beta_2+\lambda\alpha_1$	$(v,s)_0+\lambda(u,r)_0=\beta_2+\lambda\alpha_1$	T
	$B_1^r=b_3=\beta_3$	$(v,rs)_0=\beta_3$	T

Table 2 The constraints imposed on bilinear element when the polynomial displacement fields in Eq. (17) are represented by bilinear element ; where T, S_U and S_E denote true constraint, spurious constraint due to unmatched term, and spurious constraint due to excess term, respectively

	Constraints	Alternative forms of the constraints and their values calculated by using Eq.(17)	Type of constraints
By Eq.(26)	$A_0 = a_1 + \lambda b_2 = \alpha_1 + \lambda \beta_2$	$(u_{,r})_0 + \lambda(v_{,s})_0 = \alpha_1 + \lambda \beta_2$	T
	$A_2^y = a_3 = \alpha_3 + 2\lambda \beta_5$	$(u_{,rs})_0 = \alpha_3$	S _U
By Eq.(27)	$B_0 = b_2 + \lambda a_1 = \beta_2 + \lambda \alpha_1$	$(v_{,s})_0 + \lambda(u_{,r})_0 = \beta_2 + \lambda \alpha_1$	T
	$B_1^y = b_3 = \beta_3 + 2\lambda \alpha_4$	$(v_{,rs})_0 = \beta_3$	S _U

Table 3 The constraints imposed on bilinear element when the polynomial displacement fields in Eq.(21) are represented by bilinear element ; where T, S_U and S_E denote true constraint, spurious constraint due to unmatched term, and spurious constraint due to excess term, respectively

	Constraints (underlined terms come from excess terms)	Alternative forms of the constraints and their values calculated by using Eq.(21)	Type of constraints
By Eq.(26)	$A_0 = a_1 + \lambda b_2 = \alpha_1 + \lambda \beta_2 + \underline{(\alpha_7 + \lambda \beta_6)}/3$	$(u_{,r})_0 + \lambda(v_{,s})_0 = \alpha_1 + \lambda \beta_2$	S _E
	$A_2^y = a_3 = \alpha_3 + 2\lambda \beta_5$	$(u_{,rs})_0 = \alpha_3$	S _U
By Eq.(27)	$B_0 = b_2 + \lambda a_1 = \beta_2 + \lambda \alpha_1 + \underline{(\beta_6 + \lambda \alpha_7)}/3$	$(v_{,s})_0 + \lambda(u_{,r})_0 = \beta_2 + \lambda \alpha_1$	S _E
	$B_1^y = b_3 = \beta_3 + 2\lambda \alpha_4$	$(v_{,rs})_0 = \beta_3$	S _U

요소로 묘사할 경우에 대하여 앞에서 했던 방법을 쫓아서 얻은 결과를 각각 Table 1과 Table 3에 정리한다. 그리고 비교를 위해 2.2.2절의 결과를 Table 2에 정리하였다.

Table 1에서 보는 바와 같이, 2.2.1절의 이론 변위장(식(13))을 선형요소를 사용하여 묘사할 때는 식(13)이 1차 변위장이므로 불일치항이 존재하여도 가성구속조건이 발생하지 않는다. 그러나, Table 2와 3에서 보는 바와 같이, 2.2.3절의 이론변위장(식(17)과 식(21))을 선형요소를 사용하여 묘사할 때는 다음과 같은 요인에서 비롯되는 가성구속조건들이 발생한다.

- ① 가정한 변위함수의 고유한 실질 불일치항으로부터 발생하는 가성구속조건
- ② 묘사하고자 하는 이론변위장의 과잉항(예 : 2.2.3절의 $\alpha_6 r^2 s$, $\alpha_7 r s^2$, $\beta_6 r^2 s$, $\beta_7 r s^2$)으로부터 기인하는 가성구속조건

한계변위장(식(17))의 경우, Table 2에서 보는 바와 같이 가성구속조건은 실질 불일치항으로부터 발생한다. 반면에, 과잉변위장(식(21))의 경우, Table 3에서 보는 바와 같이 실질 불일치항 및 과잉항으로부터 기인한다.

2.3 감차 최소화와 구속조건

앞 절에서 가성구속조건때문에 주어진 장을 정확히 묘사할 수 없음을 보였다. 특히, 불일치항은 가정한 변위함수의 고유한 것이므로 실질 불일치항으로부터 기인하는 가성구속조건은 그 요소의 고유한 결점으로 보인다. 이러한 결점을 보완하기 위하여 감차적분이 제안, 사용되고 있다.⁽¹¹⁾ 본 절에서는 감차적분이 수치해의 정확도를 향상시키는 이유를 최소화과정의 관점에서 이론적으로 설명하고자 한다. 이를 위하여 ‘감차 최소화’의 개념⁽⁸⁻¹⁰⁾을 도입하여 앞 절에서 다룬 문제에 적용하고 그 결과를

검토한다.

정의-5(완전 최소화와 감차 최소화)

① 완전 최소화(full minimization) : 앞의 2.2.4절에서처럼, 변형에너지를 그 에너지에 관련된 모든 자유도에 관하여 최소화시키는 것을 말한다.

② 감차 최소화(reduced minimization) : 변형에너지를 그 에너지와 관련한 일치항에 포함된 자유도(이하, 일치 자유도라 일컫는다)만에 관하여 최소화시키는 것을 말한다.

이제, 주어진 변위장을 감차 최소화를 통하여 묘사하고자 할 때, 감차 최소화와 그 효과에 대해 고려한다. 선형요소를 사용하여 감차 최소화할 경우, $\epsilon_x + \lambda\epsilon_y$ 의 일치 자유도는 식(11)로부터 a_1 과 b_2 이고, $\epsilon_y + \lambda\epsilon_x$ 의 일치 자유도는 식(12)로부터 a_1 과 b_2 이다. 따라서 \bar{I}_1 의 감차 최소화는 다음의 두 식에 의해 행해진다.

$$\left\{ \int_A (\bar{\epsilon}_x + \lambda\bar{\epsilon}_y) \frac{\partial(\bar{\epsilon}_x + \lambda\bar{\epsilon}_y)}{\partial a_i} dA = 0, \quad i=1 \quad (36) \right.$$

$$\left. \int_A (\bar{\epsilon}_y + \lambda\bar{\epsilon}_x) \frac{\partial(\bar{\epsilon}_y + \lambda\bar{\epsilon}_x)}{\partial b_i} dA = 0, \quad i=2 \quad (37) \right.$$

2.3.1 선형요소로 식(17)의 이론변위장을 표현할 때의 감차 최소화

식(19)와 (20)을 식(36)과 (37)에 각각 대입하여 감차 최소화시키면 다음의 구속조건들을 얻는다.

$$\begin{aligned} \bar{A}_0 &= 0 \text{ or } A_0 = a_1 + \lambda b_2 = a_1 + \lambda b_2 \\ \bar{B}_0 &= 0 \text{ or } B_0 = b_2 + \lambda a_1 = b_2 + \lambda a_1 \end{aligned} \quad (38)$$

위의 구속조건들은 모두 진성구속조건들이다.

식(38)의 구속조건들을 식(19)와 (23)에 적용하면, 식(19)와 (20)은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon}_x + \lambda\bar{\epsilon}_y &= \bar{A}^p r + \bar{A}^q s \\ \bar{\epsilon}_y + \lambda\bar{\epsilon}_x &= \bar{B}^p r + \bar{B}^q s \end{aligned} \quad (39)$$

식(39)를 $r=s=0$ 에서 계산한다면, $\bar{\epsilon}_x + \lambda\bar{\epsilon}_y$ 과 $\bar{\epsilon}_y + \lambda\bar{\epsilon}_x$ 는 영이 될 것이다. 이는, 변형률을 $r=s=0$ 에서 채취하면 $\bar{A}_k^\square = 0, \bar{B}_k^\square = 0 (k=1, 2; \square$ 는 u 또는 v 이다)과 같은 가성구속조건을 발생시키지 않으면서 정확한 변형률을 얻을 수 있음을 의미한다.

2.3.2 선형요소로 식(21)의 이론변위장을 표현할 때의 감차 최소화

식(23)과 (24)를 식(36)과 (37)에 각각 대입하여

감차 최소화시키면 다음의 구속조건들을 얻는다.

$$\begin{aligned} \bar{A}_0^+ + \bar{A}_3^+ / 3 + \bar{A}_4^+ / 3 &= 0 \\ \bar{B}_0^+ + \bar{B}_3^+ / 3 + \bar{B}_4^+ / 3 &= 0 \end{aligned} \quad (40)$$

식(40)의 첫번째 구속조건을 식(23)의 $\bar{\epsilon}_x + \lambda\bar{\epsilon}_y$ 에 적용하면 $\bar{\epsilon}_x + \lambda\bar{\epsilon}_y$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon}_x + \lambda\bar{\epsilon}_y &= \bar{A}_3^+(r^2 - 1/3) + \bar{A}_4^+(s^2 - 1/3) + \bar{A}^p r \\ &\quad + \bar{A}^q s + \bar{A}_1^+ r s \end{aligned} \quad (41)$$

식(41)을 $r=s=0$ 에서 계산하면, $\bar{\epsilon}_x + \lambda\bar{\epsilon}_y$ 는

$$\bar{\epsilon}_x + \lambda\bar{\epsilon}_y |_{r=s=0} = -\bar{A}_3^+ / 3 - \bar{A}_4^+ / 3 \quad (42)$$

로 된다. 그러나 $\bar{\epsilon}_x + \lambda\bar{\epsilon}_y |_{r=s=0}$ 는, $\bar{A}_3^+ = -\lambda\beta_6 \neq 0, \bar{A}_4^+ = -\alpha_7 \neq 0$ 이므로 영이 되지 못한다. 이는 감차 최소화를 하여도 과잉항에 의해 발생하는 구속조건에 의한 오차는 피할 수 없음을 의미한다. 따라서, 식(40)의 첫번째 구속조건은 가성구속조건으로 분류할 수 있다. 동일한 방법으로 식(40)의 두번째 구속조건도 과잉항으로 인한 가성구속조건임을 보일 수 있다.

위의 예로부터, 불일치항에 의한 오차는 감차 최소화를 적용함으로써 제거할 수 있으나 과잉항에 의한 오차는 감차 최소화를 적용하여도 피할 수 없음을 알 수 있다. 이 결론은, 다항식 형태의 이론변위장을 라그랑지 계열의 변위함수 또는 시렌디피티 계열의 변위함수를 사용하여 표현하고자 할 때 성립된다. 따라서, 과잉항에 의한 오차를 제거하기 위한 과잉장에 대한 고려는 의미가 없다. 그러나 불일치항에 의한 오차는 감차 최소화를 통하여 제거할 수 있으므로, 이후로는 $\epsilon_x + \lambda\epsilon_y$ 및 $\epsilon_y + \lambda\epsilon_x$ 의 한계변위장만을 고려한다.

지금까지의 4-절점 요소에 적용한 분석방법을 8-절점 및 9-절점 요소의 한계변위장에 동일하게 적용하여, 완전 최소화 또는 감차 최소화시켰을 때 나타나는 구속조건들의 형태는 다음과 같이 정리할 수 있다.

(한계변위장에 대한 구속조건 형태 분류)

- (1) 진성구속조건은 다음과 같은 형태를 갖는다.
(일치계수) = constant 또는
(일치계수와 불일치계수들의 일차 결합) = constant

- (2) 가성구속조건은 다음과 같은 형태를 갖는다.
(실질 불일치계수) = constant

위의 형태는 참고문헌(8)의 γ_{xy} 의 구속조건의 형태 분류와 일치한다.

2.4 일관장 개념에 의한 감차 최소화

참고문헌 (7)과 (8)에서는, 페널티승수가 형성되는 가느다란 보(slender beam)를 2차원 연속체 요소를 사용하여 유한요소해석을 할 때 구속 전단에너지(constrained shear energy)의 감차 최소화에 관하여 일관장 이론을 바탕으로 논의하였다. 본 논문에서는 준·비압축성 평면변형률문제에서와 같이 수직변형률 에너지에 페널티승수가 형성되는 경우에 대하여 지금까지의 논의를 바탕으로 수직변형률 에너지에 대한 감차 최소화 이론을 체계적으로 정리한다.

통상적으로 널리 사용되는 라그랑지 계열의 요소 및 시렌디퍼티 계열의 요소를 사용할 경우, 근사 변형률 $\epsilon_x + \lambda\epsilon_y$ 과 $\epsilon_y + \lambda\epsilon_x$ 의 실질 불일치항은 정의-4을 사용하여 찾을 수 있다. 실질 불일치항들을 수식적으로 정의하면 다음과 같다.

정의-6(실질 불일치항과 일치항)

등매개(isoparametric) n -절점 변위함수를 사용하여 변위를

$$u = \sum_{i=0}^{n-1} a_i N_i, \quad v = \sum_{i=0}^{n-1} b_i N_i$$

여기서, a_i 와 b_i 는 상수이고, N_i 는 다항이다. 과 같이 가정할 경우, 다음과 같은 집합들을 정의하자.

$$D_n = \{\text{independent polynomial terms of } N_{k,r}, k=0, 1, \dots, n-1\}$$

$$= \{d_k, k=1, 2, 3, \dots, m_d\}$$

$$E_n = \{\text{independent polynomial terms of } N_{k,s}, k=0, 1, \dots, n-1\}$$

$$= \{e_k, k=1, 2, 3, \dots, m_e\}$$

$$F_n = D_n \cup E_n$$

$$= \{f_k, k=1, 2, \dots, m_f\}$$

$$R_n = D_n \cap E_n$$

$$= \{r_k, k=1, 2, \dots, m_r\}$$

그러면, 집합 $(D_n - R_n)$ 은 $\epsilon_x + \lambda\epsilon_y$ 의 실질 불일치항들의 집합이며, 집합 $(E_n - R_n)$ 은 $\epsilon_y + \lambda\epsilon_x$ 의 실질 불일치항들의 집합이다. 또한, 집합 R_n 은 근사 변형률 $\epsilon_x + \lambda\epsilon_y$ 및 $\epsilon_y + \lambda\epsilon_x$ 의 일치항들의 집합이며, 집합 $(F_n - R_n)$ 은 불일치항들의 집합이다.

정의-6의 기호를 사용하여, $\epsilon_x + \lambda\epsilon_y$ 및 $\epsilon_y + \lambda\epsilon_x$ 에 관한 한계변위장에 대하여 수직변형률 에너지의 최소화방법과 구속조건과의 관계를 요약하면 다음

과 같다.

정리-1(수직변형률 에너지의 완전 최소화와 감차 최소화)

다음과 같은 수직변형률 에너지는

$$I_1 = \frac{D_1}{2} \int_A \{(\epsilon_x)^2 + (\epsilon_y)^2 + 2\lambda(\epsilon_x) \cdot (\epsilon_y)\} dA$$

다음의 오차-모멘트 식에 의하여 최소화시킬 수 있다.

For $k=1, 2, \dots, m_w$;

$$\left\{ \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} (\tilde{\epsilon}_x + \nu \tilde{\epsilon}_y) \tilde{w}_k dr ds = 0 \right. \quad (43)$$

$$\left. \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} (\tilde{\epsilon}_y + \nu \tilde{\epsilon}_x) \tilde{w}_k dr ds = 0 \right. \quad (44)$$

여기서, $\tilde{w}_k, \tilde{w}_k (k=1, 2, \dots, m_w)$ 는 다음의 어떤 집합 \tilde{W}_n 및 \tilde{W}_n 의 원소이다.

$$\tilde{W}_n = \{\tilde{w}_k, k=1, 2, \dots, m_w\}$$

$$\tilde{W}_n = \{\tilde{w}_k, k=1, 2, \dots, m_w\}$$

식(43)과 식(44)에서

(1) $\tilde{W}_n = D_n (m_w = m_d)$ 이고 $\tilde{W}_n = E_n (m_w = m_e)$ 이면, $\epsilon_x + \lambda\epsilon_y$ 및 $\epsilon_y + \lambda\epsilon_x$ 의 실질 불일치계수는 모두 가성구속조건으로 바뀐다. 이와 같은 최소화를 수직변형률 에너지의 완전 최소화라 부른다.

(2) $\tilde{W}_n = \tilde{W}_n = R_n (m_w = m_r)$ 이면, 요소내의 특정점에 관하여 오직 일치 구속조건만이 존재하게 된다. 이러한 최소화를 수직변형률 에너지의 감차 최소화라 부른다.

위의 정리는 참고문헌(8)에서 제시한 정리의 증명과 동일한 방법으로 증명할 수 있다.

3. 확장된 일관장 이론의 응용

본 장에서는 확장된 일관장 개념을 이용하여 얻어진 정리-1을 4, 8, 9-절점 요소에 적용하고 그 결과를 검토한다.

4, 8, 9-절점 요소의 변위함수를 다음과 같이 가정한다.

4-절점 요소의 경우,

$$u^{(4)} = a_0 + a_1 r + a_2 s + a_3 rs$$

$$v^{(4)} = b_0 + b_1 r + b_2 s + b_3 rs$$

(45)

8-절점 요소의 경우,

$$u^{(8)} = a_0 + a_1 r + a_2 s + a_3 r^2 + a_4 rs$$

$$+ a_5 s^2 + a_6 r^2 s + a_7 rs^2$$

$$v^{(8)} = b_0 + b_1r + b_2s + b_3r^2 + b_4rs + b_5s^2 + b_6r^2s + b_7rs^2 \quad (46)$$

9-절점 요소의 경우,

$$u^{(9)} = a_0 + a_1r + a_2s + a_3r^2 + a_4rs + a_5s^2 + a_6r^2s + a_7rs^2 + a_8r^2s^2$$

$$v^{(9)} = b_0 + b_1r + b_2s + b_3r^2 + b_4rs + b_5s^2 + b_6r^2s + b_7rs^2 + b_8r^2s^2 \quad (47)$$

여기서, a_i 와 $b_i(i=0, 1, \dots)$ 는 각 요소마다 독립적으로 가정된 것이다.

자코비안 행렬식의 값이 1이고 $x_s=y_r=0, x_r=y_s=1$ 인 요소를 사용하여 각 근사 변형률($\epsilon_x+\lambda\epsilon_y, \epsilon_y+\lambda\epsilon_x$)의 한계 변위장을 표현하고자 할 때, 변형률 오차($\tilde{\epsilon}_x+\lambda\tilde{\epsilon}_y, \tilde{\epsilon}_y+\lambda\tilde{\epsilon}_x$)는 식(45)~(47)을 이용하면 다음과 같이 표현된다.

4-절점 요소를 사용할 경우,

$$\tilde{\epsilon}_x + \lambda\tilde{\epsilon}_y = \tilde{A}_0 + \tilde{A}_1^r r + \tilde{A}_2^s s$$

$$\tilde{\epsilon}_y + \lambda\tilde{\epsilon}_x = \tilde{B}_0 + \tilde{B}_1^r r + \tilde{B}_2^s s \quad (48)$$

8-절점 요소를 사용할 경우,

$$\tilde{\epsilon}_x + \lambda\tilde{\epsilon}_y = \tilde{A}_0 + \tilde{A}_1 r + \tilde{A}_2 s + \tilde{A}_3^r r^2 + \tilde{A}_4 rs + \tilde{A}_5^s s^2$$

$$\tilde{\epsilon}_y + \lambda\tilde{\epsilon}_x = \tilde{B}_0 + \tilde{B}_1 r + \tilde{B}_2 s + \tilde{B}_3^r r^2 + \tilde{B}_4 rs + \tilde{B}_5^s s^2 \quad (49)$$

9-절점 요소를 사용할 경우,

$$\tilde{\epsilon}_x + \lambda\tilde{\epsilon}_y = \tilde{A}_0 + \tilde{A}_1 r + \tilde{A}_2 s + \tilde{A}_3^r r^2 + \tilde{A}_4 rs + \tilde{A}_5^s s^2 + \tilde{A}_6^r r^2s + \tilde{A}_7^r rs^2$$

$$\tilde{\epsilon}_y + \lambda\tilde{\epsilon}_x = \tilde{B}_0 + \tilde{B}_1 r + \tilde{B}_2 s + \tilde{B}_3^r r^2 + \tilde{B}_4 rs$$

$$+ \tilde{B}_5^s s^2 + \tilde{B}_6^r r^2s + \tilde{B}_7^r rs^2 \quad (50)$$

위의 식(48)~(50)의 우변의 각 계수들은 각 요소마다 독립적으로 정의된 것이다.

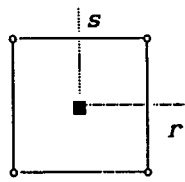
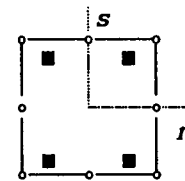
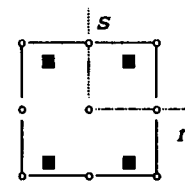
정리-1을 식(48)~(50)의 $\tilde{\epsilon}_x + \lambda\tilde{\epsilon}_y$ 과 $\tilde{\epsilon}_y + \lambda\tilde{\epsilon}_x$ 에 적용하여, 완전 최소화의 경우에 발생하는 구속조건을 Table 4에 그리고 감차 최소화의 경우에 발생하는 구속조건을 Table 5에 각각 정리한다.

Table 4에서 보는 바와 같이, 수직변형률 에너지의 완전 최소화는 가상구속조건을 발생시킨다. 이러한 가상구속조건들은 요소의 변위함수에 실제와 다른 구속조건을 부과함으로써 표현하고자 하는 변위장을 정확히 묘사할 수 없게 만든다. 그러나, Table 5에서 보는 바와 같이, 감차 최소화는 어느 특정점(최적 응력점)에서 변형률을 채취할 경우 변형률을 정확히 계산할 수 있으며, 이 특정점에서 변형률을 계산하면 가상구속조건도 발생시키지 아니한다. 따라서 수치해는 완전 최소화의 경우보다 감차 최소화의 경우가 훨씬 정확하게 계산된다. 이러한 사실은 참고문헌(8)의 전단변형률 에너지에도 똑같이 성립된다. 또한, 여기서 주목할 사실은 감차 최소화의 경우 특정점이 감차적분의 가우스점과 일치하고 있다는 점이다. 이 사실로부터 감차 최소화를 적용한다는 것은, 4, 8, 9-절점 요소에 감차적분을 적용한다는 것과 동일한 과정임을 알 수 있

Table 4 The constraints obtained by applying full minimization in Theorem-1 into normal strain energy, where $\langle T \rangle$ denotes a true constraint and $\langle S \rangle$ denotes a spurious constraint

Node	by Eq. (43)	by Eq. (44)
4	<ul style="list-style-type: none"> ○ The Set : $D_4 = \{1, s\}$ ○ Constraints $\langle T \rangle : \tilde{A}_0 = 0$ $\langle S \rangle : \tilde{A}_2^s = 0$ 	<ul style="list-style-type: none"> ○ The Set : $E_4 = \{1, r\}$ ○ Constraints $\langle T \rangle : \tilde{B}_0 = 0$ $\langle S \rangle : \tilde{B}_1^r = 0$
8	<ul style="list-style-type: none"> ○ The Set : $D_8 = \{1, r, s, rs, s^2\}$ ○ Constraints $\langle T \rangle : \tilde{A}_0 + \tilde{A}_3^r/3 = 0, \tilde{A}_1 = 0,$ $\tilde{A}_2 = 0, \tilde{A}_4 = 0$ $\langle S \rangle : \tilde{A}_5^s = 0$ 	<ul style="list-style-type: none"> ○ The Set : $E_8 = \{1, r, s, r^2, rs\}$ ○ Constraints $\langle T \rangle : \tilde{B}_0 + \tilde{B}_3^r = 0, \tilde{B}_1 = 0,$ $\tilde{B}_2 = 0, \tilde{B}_4 = 0,$ $\langle S \rangle : \tilde{B}_5^s = 0$
9	<ul style="list-style-type: none"> ○ The Set : $D_9 = \{1, r, s, rs, s^2\}$ ○ Constraints $\langle T \rangle : \tilde{A}_0 + \tilde{A}_3^r/3 = 0, \tilde{A}_1 = 0,$ $\tilde{A}_2 + \tilde{A}_6^r/3 = 0, \tilde{A}_4 = 0$ $\langle S \rangle : \tilde{A}_5^s = 0, \tilde{A}_7^r = 0$ 	<ul style="list-style-type: none"> ○ The Set : $E_9 = \{1, r, s, r^2, rs, r^2s\}$ ○ Constraints $\langle T \rangle : \tilde{B}_0 + \tilde{B}_3^r/3 = 0, \tilde{B}_2 = 0,$ $\tilde{B}_1 + \tilde{B}_6^r/3 = 0, \tilde{B}_4 = 0$ $\langle S \rangle : \tilde{B}_5^s = 0, \tilde{B}_7^r = 0$

Table 5 The results obtained by applying reduced minimization in Theorem-1 into normal strain energy

Node	by Eq. (43)	by Eq. (44)	Spurious Constraint-free Optimal Points of $\bar{\epsilon}_x + \lambda \bar{\epsilon}_y$ and $\bar{\epsilon}_y + \lambda \bar{\epsilon}_x$
4	The set : $\mathbf{R}_4 = \{1\}$		○ Optimal points(■) :  $(r, s) = (0, 0)$
	○ Constraint : $\tilde{A}_0 = 0$ ○ Strain field : $\bar{\epsilon}_x + \lambda \bar{\epsilon}_y = \tilde{A}_1 r + \tilde{A}_2 s$	○ Constraint : $\tilde{B}_0 = 0$ ○ Strain field : $\bar{\epsilon}_y + \lambda \bar{\epsilon}_x = \tilde{B}_1 r + \tilde{B}_2 s$	
8	The set : $\mathbf{R}_8 = \{1, r, s, rs\}$		○ Optimal points(■) :  $(r^2, s^2) = (1/3, 1/3)$
	○ Constraint : $\tilde{A}_1 = 0, \tilde{A}_2 = 0, \tilde{A}_4 = 0$ $\tilde{A}_0 + \tilde{A}_3/3 + \tilde{A}_6/3 = 0$ ○ Strain field : $\bar{\epsilon}_x + \lambda \bar{\epsilon}_y = \tilde{A}_3(r^2 - 1/3) + \tilde{A}_6(s^2 - 1/3)$	○ Constraint : $\tilde{B}_1 = 0, \tilde{B}_2 = 0, \tilde{B}_4 = 0$ $\tilde{B}_0 + \tilde{B}_3/3 + \tilde{B}_6/3 = 0$ ○ Strain field : $\bar{\epsilon}_y + \lambda \bar{\epsilon}_x = \tilde{B}_3(r^2 - 1/3) + \tilde{B}_6(s^2 - 1/3)$	
9	The set : $\mathbf{R}_9 = \{1, r, s, rs\}$		○ Optimal points(■) :  $(r^2, s^2) = (1/3, 1/3)$
	○ Constraint : $\tilde{A}_0 + 1/3(\tilde{A}_3 + \tilde{A}_6) = 0$ $\tilde{A}_1 + 1/3\tilde{A}_4 = 0$ $\tilde{A}_2 + 1/3\tilde{A}_5 = 0$ $\tilde{A}_4 = 0$ ○ Strain field : $\bar{\epsilon}_x + \lambda \bar{\epsilon}_y = (\tilde{A}_3 + \tilde{A}_6 s)(r^2 - 1/3) + (\tilde{A}_6 + \tilde{A}_4 r)(s^2 - 1/3)$	○ Constraint : $\tilde{B}_0 + 1/3(\tilde{B}_3 + \tilde{B}_6) = 0$ $\tilde{B}_1 + 1/3\tilde{B}_4 = 0$ $\tilde{B}_2 + 1/3\tilde{B}_5 = 0$ $\tilde{B}_4 = 0$ ○ Strain field : $\bar{\epsilon}_y + \lambda \bar{\epsilon}_x = (\tilde{B}_3 + \tilde{B}_6 r)(r^2 - 1/3) + (\tilde{B}_6 + \tilde{B}_4 r)(s^2 - 1/3)$	

으며, 동시에 감차적분이 어떻게 수치해를 향상시켜 주는지를 알 수 있다.

4. 결 론

종래에 전단변형률 에너지에 페널티승수가 존재하는 평면응력 문제에 국한하여 적용되오던 일관장 개념을 수직변형률 에너지에 페널티승수가 존재하는 평면변형률문제에도 적용이 가능하도록 확장하였다. 이를 위해, 근사변형률의 불일치항과 일치항, 변위함수의 한계변위장 및 과잉장(또는 과잉항)의 개념을 도입하였다. 이러한 개념들을 사용하여 확장된 일관장 개념의 근거와 유용성을 보이기

위해, 푸아송비가 1/2에 접근하는 평면변형률 요소를 고려하였다.

확장된 일관장 개념을 4-, 8-, 9-절점 요소에 적용한 결과 다음과 같은 사실들을 이론적으로 확인하였다.

(1) 수직변형률 에너지를 감차 최소화를 시킨다는 것은 해당 강성행렬에 감차적분을 적용하는 것과 동등하다.

(2) 한계변위장에 관한 최소화방법과 이에 따른 구속조건과의 관계는 다음과 같다. 즉, 완전 최소화를 적용하면 실질 불일치계수들은 모두 가성구속조건으로 변화되는 반면, 감차 최소화를 적용하면 요소내의 특정위치(최적 적분점)에 관하여 진성구

속조건만이 존재한다. 따라서 최적 적분점은 가성 구속조건이 나타나지 않도록 변형에너지를 감차 최소화하여 구할 수 있다.

후 기

이 논문은 1993년도 한국학술진흥재단의 공모과제 연구비에 의하여 연구되었다.

참고문헌

- (1) Prathap, G. and Babu, C. R., 1986, "An Isoparametric Quadratic Thick Curved Beam Element," *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 23, pp. 1583~1600.
- (2) Prathap G. and Ramesh Babu, C. 1986, "Field-Consistent Strain Interpolation for the Quadratic Shear Flexible Beam Element," *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 23, pp. 1973~1984.
- (3) Naganarayana, B. P. and Prathap, G., 1990, "Consistency Aspects of Out-of-plane Bending, Torsion and Shear in a Quadratic Curved Beam Element," *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 30, pp. 177~200.
- (4) Prathap, G. and Viswanath, S., 1984, "An Optimally Integrated Four-node Quadrilateral Plate Bending Element," *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 19, pp. 831~840.
- (5) Argiris Kamoulakos, 1988, "Understanding and Improving the Reduced Integration of Mindlin Shell Element," *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 26, pp. 2009~2029.
- (6) Hinton, E. and Huang, H. C., 1986, "A Family of Quadrilateral Mindlin Plate Element with Substitute Shear Strain Fields," *Computers & Structures*, Vol. 23, No. 3, pp. 409~431.
- (7) Gangan Prathap, 1985, "The Poor Bending Response of the Four-node Plane Stress Quadrilateral," *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 21, pp. 825~835.
- (8) Kim Yong-woo and Min Oak-key, 1993, "Theoretical Review on the Spurious Modes in Plane-Stress/Strain Isoparametric Meshes," *Computers & Structures*, Vol. 49, No. 6, pp. 1069~1082.
- (9) Min Oak-key and Kim Yong-woo, 1994, "Reduced Minimization Theory in Beam Elements," *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 37, pp. 2115~2125.
- (10) Min Oak-key and Kim Yong-woo, 1994, "Reduced Minimization of Mindlin Plate," *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 37, pp. 4263~4284.
- (11) Zienkiewicz, O. C. and Taylor, R. L., 1989, *The Finite Element Method ; Basic Formulation and Linear Problems*, McGraw-Hill, New York.