

<論 文>

# 에너지 저장시스템용 복합재 플라이휠 로터의 설계

정희문\* · 최상규\*\* · 하성규\*\*\*

(1995년 1월 18일 접수)

## Design of a Composite Flywheel Rotor for Energy Storage System

Hee-Moon Jeong, Sang-Kyu Choi and Sung-Kyu Ha

**Key Words :** Energy Storage System(에너지 저장장치), Composite Flywheel Rotor(복합재 플라이휠 로터), Axisymmetric Laminate Shell(축대칭 적층셸), Multi-Ring(다층링), Structure Analysis(구조해석), Sensitivity Analysis(민감도해석), Optimum Design(최적설계)

### Abstract

An optimum design has been performed to maximize specific energy density(SED) of composite flywheel rotor for energy storage system. The flywheel rotor is assumed to be an axisymmetric thick laminated shell with a plane strain state for structural analysis. For the structural analysis the centrifugal force is considered and the stiffness matrix equation was derived for each ring considering the interferences between the rings. The global stiffness matrix was derived by integrating the local stiffness matrix satisfying the conditions of force and displacement compatibilities. Displacements are then calculated from the global stiffness matrix and the stresses in each ring are also calculated. 3-D intra-laminar quadratic Tsai-Wu criterion is then used for the strength analysis. An optimum procedure is also developed to find the optimal interferences and lay up angle to maximize SED using the sensitivity analysis.

### 1. 서 론

에너지 저장시스템은 잉여의 에너지를 저장하여 에너지 소모가 클 때 이를 사용하는 것을 목적으로 한다. 기존의 에너지 저장시스템인 전기화학적 시스템은 짧은 수명과 단위질량당 에너지 저장능력이 낮기 때문에 대체 에너지 저장시스템이 요구되었다. 이에 따라, 수명이 길고 에너지 효율이 높은 플라이휠 에너지 저장시스템이 개발되고 있다.<sup>(1,2)</sup>

플라이휠은 잉여의 에너지를 로터의 회전관성에너

지로 저장하고 필요시 회전에너지를 전기적에너지로 변환하는 에너지 저장시스템이다. 플라이휠의 구성은 Fig. 1과 같이 에너지를 저장하는 로터부분과 이를 지지하는 지지장치 그리고 에너지의 입출력을 조정하는 입출력장치로 분류된다.<sup>(3)</sup> 플라이휠의 장점으로 전기적·기계적 에너지의 입출력이 용이하며, 충전과 방전이 신속히 이루어지며, 높은 에너지밀도를 지닌다.<sup>(2~4)</sup>

플라이휠에 저장되는 전체 에너지( $E$ )는 질량관성 모멘트  $I$ 와 각속도  $\omega$ 의 함수인  $I\omega^2/(2 \cdot 3600)$  [Wh]이 되며, 전체 에너지를 질량으로 나눈 값을 비에너지 밀도(SED)라 정의하며  $E/mass$  [Wh/kg]이 된다.<sup>(2~5)</sup> 플라이휠의 SED를 최대에 하기 위해 재료의 파손없이 로터가 가능한 최대의 회전 각속도로

\*한양대학교 기계설계학과

\*\*정희문, 한국기계연구원

\*\*\*정희문, 한양대학교 기계공학과

회전할 수 있도록 설계가 되어야 한다. 이로써 에너지밀도가 우수하고 고강도 고강성의 복합재 로터를 사용하게 되었고, (4,6) 로터와 고정자 사이에서 생기는 마찰손실을 없애기 위해 스포크(spoke)가 없는 자기베어링을 이용한 지지장치가 제안되었다. (7,8) 또한 최대의 회전 각속도는 파손이 일어나지 않는 최대의 응력값에 따라 결정되므로 회전시 발생하는 최대응력을 낮추기 위해 간섭량을 갖는 다층 링 로터가 제시되었다. 즉, 링사이의 간섭량을 주고 억지 끼워 맞추어져 내부응력을 조절하여 전체강도가 증가하도록 설계방법이 제시되고 있다. (9)

본 연구에서는 위에서 제시된 복합재 플라이휠 로터에 대한 간섭량이 고려된 응력해석을 수행하였으며 최대의 각속도를 지니도록 설계 민감도 해석을 통한 최적설계를 수행하여 최적 적층각도와 간섭량을 구하는 복합재 플라이휠 로터의 설계방법을 제시하였다.

2. 해석이론

본 논문에서 고려한 플라이휠 로터는 Fig. 1과 같이 복합재가 두겹게 적층된 축대칭의 쉘형태인

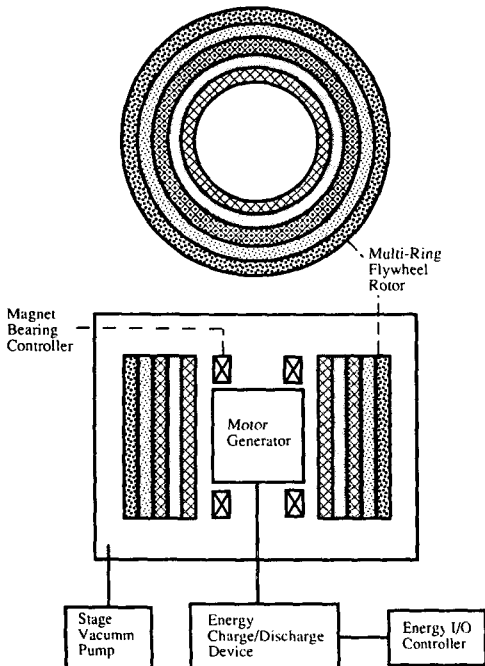


Fig. 1 Schematic diagram of flywheel energy storage system

다. 각 링에서의 적층각도는 각도 플라이(angle ply,  $(\pm\phi)_m$ ,  $\phi$ 는 적층각도,  $m$ 은 적층 플라이 그룹 수)로서 반경방향으로 적층된다. 원심력을 받는 로터의 각 링에서 지배방정식을 풀고 변위식을 구하였다. 각 링사이에서 간섭현상을 고려한 변위의 적합조건과 힘의 적합조건에 따라 전체 방정식을 세우고 여기에서 변위를 구하였다. 각 링의 변위에서 변형률을 구하고 변형률로부터 응력을 구하였다. 파손기준은 3차원 층간 2차 Tsai-Wu 파손기준을 사용하였고, 파손해석을 통하여 강도비(strength ratio,  $R$ )를 파손기준(failure criterion)으로 삼아 재료의 안정성 여부를 판단하였다. 로터의 응력해석을 바탕으로 플라이휠 로터가 최대의 SED를 지니도록 주어진 형상에서 적층각도와 간섭량에 의한 민감도를 고려하여 최적설계를 수행하였다. 본 연구의 응력해석 및 최적설계 순서도는 Fig. 2와 같다.

2.1 다층링 실린더 형태인 두꺼운 쉘의 응력해석  
 응력해석을 위하여 원주방향의 변위를 무시한 축대칭문제에 로터를 간주하였고, 평면 변형률상태로 가정하여 반경방향의 변위만을 고려하였다. 이에 따른 원통형 좌표계에서 로터의 지배방정식은 다음과 같다. (9)

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \rho r \omega^2 = 0 \tag{1}$$

여기서,  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$ 는 각각 반경방향, 원주방향의 응력이며,  $\rho$ 는 밀도,  $r$ 은 반경,  $\omega$ 는 각속도를 뜻한다.

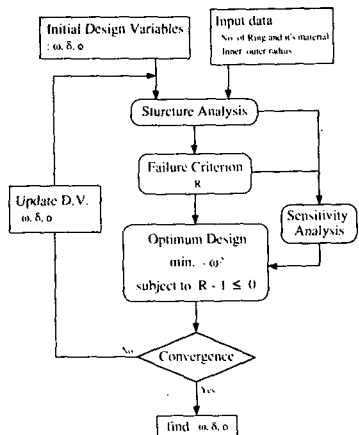


Fig. 2 Design procedure of composite multi-ring flywheel rotor

다층구조물의  $i$ 번째 링의 적층판 축(off-axis)에서 응력과 변형률의 관계는 다음과 같다.[부록 1]

$$\sigma^{(i)} = Q^{(i)} \epsilon^{(i)} \quad (2)$$

여기서, 위첨자  $i$ 는  $i$ 번째의 링을 의미하며  $\sigma^{(i)}$ ,  $Q^{(i)}$ ,  $\epsilon^{(i)}$ 는 적층판 축상태에서 응력, 모듈러스(modulus), 변형률이다.

축대칭 평면 변형률상태에서 고려되는 변형률과 변위의 관계는 다음과 같다.

$$\epsilon^{(i)} = \begin{Bmatrix} \epsilon_\theta \\ \epsilon_r \end{Bmatrix}^{(i)} = \begin{Bmatrix} \frac{u_r}{r} \\ \frac{\partial u_r}{\partial r} \end{Bmatrix}^{(i)} \quad (3)$$

식(2)와 (3)을 식(1)에 대입하여 반경방향의 변위  $u_r^{(i)}$ 을 구하면 다음과 같다.

$$u_r^{(i)} = \omega^2 \bar{\Phi} r^3 + C_1 \Phi_1 r^\kappa + C_2 \Phi_2 r^{-\kappa} \quad (4)$$

단,  $C_1, C_2$ 는 경계조건을 만족하도록 정해지는 상수이며  $\kappa, \bar{\Phi}, \Phi_1, \Phi_2$ 는  $i$ 번째 링의 물성치에 관련된 값으로 다음과 같이 정의된다.

$$\kappa = \sqrt{\frac{Q_{11}^{(i)}}{Q_{33}^{(i)}}} \quad (5)$$

$$\bar{\Phi} = -\frac{\rho^{(i)}}{(9 - \kappa^2) Q_{33}^{(i)}} \quad (6)$$

$$\Phi_1 = \frac{1}{Q_{33}^{(i)} \kappa + Q_{13}^{(i)}} \quad (7)$$

$$\Phi_2 = \frac{1}{-Q_{33}^{(i)} \kappa + Q_{13}^{(i)}} \quad (8)$$

식(2), (3), (4)를 이용하여 반경방향의 응력을 구하면 다음과 같다.

$$\sigma_r^{(i)} = \omega^2 \bar{\Phi} r^2 + C_1 r^{\kappa-1} + C_2 r^{-\kappa-1} \quad (9)$$

단,

$$\bar{\Phi} = \Phi(3Q_{33}^{(i)} + Q_{13}^{(i)}) \quad (10)$$

Fig. 3처럼 식(4)에서 반지름이  $r_1$ 과  $r_2$ 가 되는 곳의 반경방향 변위  $u_{r1}, u_{r2}$ 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$u_r^{(i)} = f_u^{(i)} + G^{(i)} \Phi^{(i)} C^{(i)} \quad (11)$$

여기서,

$$u_r^{(i)} = \begin{Bmatrix} u_{r1} \\ u_{r2} \end{Bmatrix}^{(i)} \quad (12)$$

$$f_u^{(i)} = \omega^2 \bar{\Phi} \begin{Bmatrix} r_1^3 \\ r_2^3 \end{Bmatrix}^{(i)} \quad (13)$$

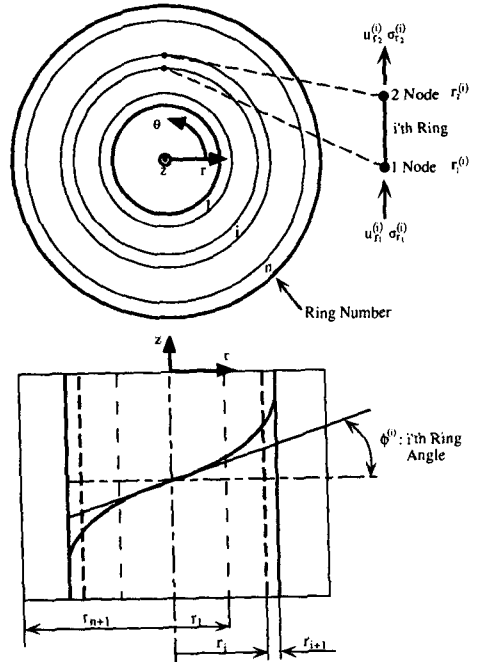


Fig. 3 Model of flywheel rotor and definition of  $i$ 'th ring components

$$G^{(i)} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} r_1^\kappa & r_1^{-\kappa} \\ r_2^\kappa & r_2^{-\kappa} \end{bmatrix}^{(i)}, \quad \Delta = r_1^\kappa r_2^{-\kappa} - r_1^{-\kappa} r_2^\kappa \quad (14)$$

$$\Phi^{(i)} = \begin{bmatrix} \Phi_1 & 0 \\ 0 & \Phi_2 \end{bmatrix}^{(i)} \quad (15)$$

이며,  $u_r$ 에서 아래첨자  $r$ 은 반경방향을 의미하며  $r$ 의 아래첨자 1과 2는 그 링의 절점 1과 절점 2를 각각 의미한다. 위에서  $f_u^{(i)}$ 는 체력이 고려된 항이며  $G$ 는 반경의 함수로 표현되는 항이며,  $\Phi$ 는 적층판의 물성치를 나타내는 항이 된다.  $C^{(i)}$ 는 상수 벡터로서 식(11)로부터 구하여지며 다음과 같이 표현된다.

$$C^{(i)} = \Phi^{(i-1)} G^{(i-1)} (u_r^{(i)} - f_u^{(i)}) \quad (16)$$

여기서,  $\Phi^{(i-1)}, G^{(i-1)}$ 는  $\Phi^{(i)}, G^{(i)}$ 의 역행렬을 의미한다.

또한, 변위와 마찬가지로  $i$ 번째 적층링의 1, 2번 절점에서 반경방향 응력성분(식(9))과 반지름과의 곱을 다음과 같은 벡터로 정의한다.

$$f_\sigma^{(i)} = f_\sigma^{(i)} + I^* G^{(i)} \Phi^{(i)} C^{(i)} \quad (17)$$

단,

$$f_\sigma^{(i)} = \begin{Bmatrix} -r_1 \sigma_{r1} \\ r_2 \sigma_{r2} \end{Bmatrix}^{(i)} \quad (18)$$

$$I^* = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$f_{\delta}^{(i)} = \omega^2 \bar{\Phi} \begin{Bmatrix} -r_1^3 \\ r_2^3 \end{Bmatrix}^{(i)} \quad (20)$$

식(20)의  $f_{\delta}^{(i)}$ 는 체력 항이며 물성치와 연계되어 있다.

$i$ 번째 링의 강성행렬식(stiffness matrix equation)은 식(16)을 식(17)에 대입하여  $C^{(i)}$ 를 소거하면 다음과 같이 구해진다.

$$k^{(i)} u_r^{(i)} = f_r^{(i)} + f_{\omega}^{(i)} \quad (21)$$

여기서,

$$k^{(i)} = I^* G^{(i)} \Phi^{(i-1)} G^{(i-1)} = \frac{\zeta^{\kappa}}{1 - \zeta^{2\kappa}} \begin{bmatrix} \kappa \zeta_1 Q_{33} + \zeta_2 Q_{13} & -2\kappa Q_{33} \\ -2\kappa Q_{33} & \kappa \zeta_1 Q_{33} - \zeta_2 Q_{13} \end{bmatrix}^{(i)} \quad (22)$$

단,

$$\zeta = \frac{r_1^{(i)}}{r_2^{(i)}} \quad (23)$$

$$\zeta_1 = \zeta^{\kappa} + \zeta^{-\kappa} \quad (24)$$

$$\zeta_2 = \zeta^{\kappa} - \zeta^{-\kappa} \quad (25)$$

로서 강성행렬이 되며,  $f_{\omega}^{(i)}$ 는 체력이 고려된 링 하중벡터로서 다음과 같다.

$$f_{\omega}^{(i)} = -f_{\delta}^{(i)} + k^{(i)} f_{\delta}^{(i)} = \begin{Bmatrix} f_{\omega_1} \\ f_{\omega_2} \end{Bmatrix}^{(i)} \quad (26)$$

$n$ 개의 링을 갖는 경우 각각의 링마다 서로 인접하는 곳에서의 변위가 같다는 변위의 적합조건과 압력이 같다는 힘의 적합조건이 성립되며 다음과 같다.

$$u_{r_1}^{(i+1)} = u_{r_2}^{(i)} + \delta^{(i)} \quad (27)$$

$$\sigma_{r_1}^{(i+1)} = -\sigma_{r_2}^{(i)} \quad (28)$$

단,  $i=1, 2, \dots, n-1$

식(12)와 식(27)을 이용하여 식(21)은 Fig. 4에 보이듯이 간섭량  $\delta^{(i)}$ 가 고려된  $i$ 번째 링 강성행렬식이 되며 다음과 같다.

$$k^{(i)} d^{(i)} = f_r^{(i)} + f_{\omega}^{(i)} + f_{\delta}^{(i)} \quad (29)$$

여기서,

$$d^{(i)} = \begin{Bmatrix} u_{r_1}^{(i)} \\ u_{r_1}^{(i+1)} \end{Bmatrix} = u_r^{(i)} + \delta^{(i)} \quad (30)$$

$$f_{\delta}^{(i)} = k^{(i)} \delta^{(i)} = \begin{Bmatrix} f_{\delta_1} \\ f_{\delta_2} \end{Bmatrix}^{(i)} \quad (31)$$

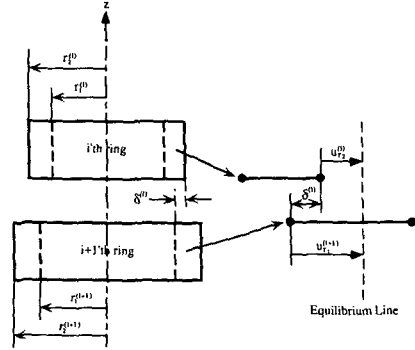


Fig. 4 Modeling of rings with interferences

$$\delta^{(i)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \delta \end{Bmatrix}^{(i)} \quad (32)$$

이며  $f_{\delta}^{(i)}$ 는 간섭량이 고려된 하중 벡터이다.

각 링의 강성행렬식(29)를 적합조건식(27)과(28)을 만족하도록 전체 강성행렬식을 구하면 다음과 같다.

$$KD = F_r + F_{\omega} + F_{\delta} \quad (33)$$

단,

$$K = \sum_{i=1}^n k^{(i)} = \begin{bmatrix} k_{11}^{(1)} \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & k_{22}^{(i-1)} + k_{11}^{(i)} & k_{12}^{(i)} & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & k_{21}^{(i)} & k_{22}^{(i)} + k_{11}^{(i+1)} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & k_{22}^{(n)} \end{bmatrix} \quad (34)$$

$$F_r = \sum_{i=1}^n f_r^{(i)} = \begin{Bmatrix} -r_1 \sigma_{r_1}^{(1)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ r_{n+1} \sigma_{r_2}^{(n)} \end{Bmatrix} \quad (35)$$

$$F_{\omega} = \sum_{i=1}^n f_{\omega}^{(i)} = \begin{Bmatrix} f_{\omega_1}^{(1)} \\ \vdots \\ f_{\omega_2}^{(i)} + f_{\omega_1}^{(i+1)} \\ \vdots \\ f_{\omega_2}^{(n)} \end{Bmatrix} \quad (36)$$

$$F_{\delta} = \sum_{i=1}^n f_{\delta}^{(i)} = \begin{Bmatrix} f_{\delta_1}^{(1)} \\ \vdots \\ f_{\delta_2}^{(i)} + f_{\delta_1}^{(i+1)} \\ \vdots \\ f_{\delta_2}^{(n)} \end{Bmatrix} \quad (37)$$

위에서  $\mathbf{K}$ 는 전체 강성행렬이며  $\mathbf{F}_r$ 은 전체 절점 하중벡터(global nodal force vector)로서 링에 가해지는 경계조건에 의한 하중이 되고  $\sigma_{on}^{(i)}$ ,  $\sigma_{on}^{(n)}$ 는 내압과 외압이 된다.  $\mathbf{F}_\omega$ 는 체력이 고려된 전체 링하중벡터(global ring force vector)가 되며,  $\mathbf{F}_\delta$ 는 간섭량이 고려된 전체 하중벡터(global interference force vector)가 된다. 또한,  $\mathbf{D}$ 는 각 링의 접합부에서의 변위량을 성분으로 하는 변위벡터이다.

식(33)으로부터 변위  $\mathbf{D}$ 를 구하고, 변형률-변위 관계식(3)과 응력-변형률 관계식(2)를 이용하여 각 링에서의 응력을 구한다.

2.2 파손이론

파손기준(failure criterion)은 플라이휠 로터의 설계시 최대 각속도, 즉 최대 SED를 갖을때 재료의 안전성 여부를 판단한다. 두껍게 적층된 복합재는 플라이 축(on-axis) 상태에서 가로 등방성(transversly isotropic)이며 이에 대한 3차원 층간 2차 Tsai-Wu 파손기준<sup>(10)</sup>은  $i$ 번째 링에서 다음과 같다.

$$\sigma_{on}^{(i)T} \mathbf{F}^{(i)} \sigma_{on}^{(i)} + \bar{\mathbf{F}}^{(i)} \sigma_{on}^{(i)} R^{(i)} - R^{(i)2} = 0 \quad (38)$$

$R^{(i)}$ 는 최대강도와 각 층에서 구해진 플라이 축 응력  $\sigma_{on}^{(i)}$  사이의 강도비로서 각 층에서 1보다 작으면 안전하도록 정의하였다.  $\mathbf{F}^{(i)}$ 와  $\bar{\mathbf{F}}^{(i)}$ 는 플라이 축 강도변수(strength parameter)이며 식(38)로부터 강도비  $R$ 은 다음과 같다.

$$R^{(i)} = \frac{b + \sqrt{b^2 + 4a}}{2}$$

$$a = \sigma_{on}^{(i)T} \mathbf{F}^{(i)} \sigma_{on}^{(i)}$$

$$b = \bar{\mathbf{F}}^{(i)} \sigma_{on}^{(i)} \quad (39)$$

여기서, 플라이 축의 강도 변수  $\mathbf{F}^{(i)}$ 와  $\bar{\mathbf{F}}^{(i)}$ 는 가로 등방성의 재료인 경우 다음과 같다.

$$\mathbf{F}^{(i)} = \begin{bmatrix} F_{\theta\theta} & F_{\theta r} & F_{\theta z} & 0 \\ F_{\theta r} & F_{rr} & F_{rz} & 0 \\ F_{\theta z} & F_{rz} & F_{zz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & F_{ss} \end{bmatrix}^{(i)}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{XX'} & -\frac{1}{2\sqrt{XX'YY'}} & -\frac{1}{2\sqrt{YY'}} & 0 \\ -\frac{1}{2\sqrt{XX'YY'}} & \frac{1}{YY'} & -\frac{1}{2XX'} & 0 \\ -\frac{1}{2\sqrt{YY'}} & -\frac{1}{2XX'} & \frac{1}{YY'} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{S^2} \end{bmatrix}^{(i)} \quad (40)$$

$$\bar{\mathbf{F}}^{(i)} = [F_\theta, F_r, F_z, 0]^{(i)}$$

$$= \left[ \frac{1}{X} - \frac{1}{X'}, \frac{1}{Y} - \frac{1}{Y'}, \frac{1}{Y} - \frac{1}{Y'}, 0 \right]^{(i)} \quad (41)$$

여기서,  $X, X'$ 는 섬유방향의 인장, 압축강도이며  $Y, Y'$ 는 섬유방향의 수직인장, 압축강도이며,  $S$ 는 섬유방향의 전단강도이다.

2.3 최적설계

복합재 플라이휠의 축과 전체의 크기로부터 내경과 외경 그리고 높이가 주어지며 로터의 형상이 결정된다. 로터가 파손이 일어나지 않는 최대 각속도로 회전하여 최대의 SED를 갖도록, 각 링사이의 간섭량과 각 링의 적층각도가 설계되어야 한다. 그러므로 각속도의 제곱항이 최대값이 되도록 목적함수가 주어지며, 각 링에서 강도비율  $R$ 이 1을 넘지 않도록 구속조건이 주어진다. 강도비율을 낮추어 더 높은 각속도를 얻기위해 각 링사이에서의 간섭량과 각 링에서 적층각도가 설계변수로 도입된다. 이에 대한 정식화는 다음과 같다. 따라서 각속도를 목적함수로, 각 링에서의 강도비  $R$ 을 구속조건으로 선정하여 다음과 같은 최적설계 정식화를 하였다.

Minimize  $-\omega^2$   
 Subject to  $R \leq 1$   
 Find  $x_j(\omega^2, \phi^{(i)}, \delta^{(i)}) \quad (42)$

여기서,  $l$ 은 1, 2, 3, ...,  $n$ 이며,  $n$ 은 적층된 링의 개수이다.

2.3.1 민감도해석

수렴속도의 향상을 위해 설계 민감도해석(sensitivity analysis)이 수행되었다.<sup>(11)</sup> 설계변수  $x_j$ 는 식(42)에서 주어진 것처럼 각속도 제곱  $\omega^2$ , 적층각도  $\phi^{(i)}$ , 간섭량  $\delta^{(i)}$ 로서 주어진다. 여기서 민감도 해석은 구속조건의 강도비  $R$ 에 대해 수행되었고, 이의 민감도해석을 위해 변위에 대한 민감도해석이 수행되었다.

강도비  $R$ 의 민감도는 각 링에 대한 강도비  $R^{(i)}$ 의 민감도를 구한 후 전체의 링에 대해서 구하게 된다.  $i$ 번째 링의 강도비  $R^{(i)}$ 는 플라이 축응력,  $\sigma_{on}^{(i)}$ 의 함수가 되며 설계변수  $x_j$ 에 대한 구배(gradient)는 다음과 같이 나타난다.

$$\frac{\partial R}{\partial x_j} = \frac{\partial R^{(i)}}{\partial \sigma_{on}^{(i)}} \frac{\partial \sigma_{on}^{(i)}}{\partial x_j} \quad (43)$$

여기서,  $\partial R^{(i)}/\partial \sigma_{\phi n}^{(i)}$ 은 식(38)로부터 구해지며 다음과 같다.

$$\frac{\partial R^{(i)}}{\partial \sigma_{\phi n}^{(i)}} = \frac{2\sigma_{\phi n}^{(i)T} \mathbf{F}^{(i)T} + \bar{\mathbf{F}}^{(i)} R^{(i)}}{2R^{(i)} - \bar{\mathbf{F}}^{(i)} \sigma_{\phi n}^{(i)}} \quad (44)$$

한편, 플라이 축응력  $\sigma_{\phi n}^{(i)}$ 은 적층판 축응력  $\sigma^{(i)}$ 의 좌표변환행렬을 통하여 구하여지고 적층판 축응력  $\sigma^{(i)}$ 를 다시 변형률로 나타내면 다음과 같다.

$$\sigma_{\phi n}^{(i)} = \mathbf{T}^{(i)} \sigma^{(i)} = \mathbf{T}^{(i)} \mathbf{Q}^{(i)} \boldsymbol{\epsilon}^{(i)} \quad (45)$$

적층판 축응력  $\sigma^{(i)}$ 에 대한 구배는 변형률과 좌표 변환행렬의 구배로서 나타나며 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{\phi n}^{(i)}}{\partial x_j} &= \frac{\partial \mathbf{T}^{(i)}}{\partial x_j} \mathbf{Q}^{(i)} \boldsymbol{\epsilon}^{(i)} + \mathbf{T}^{(i)} \frac{\partial \mathbf{Q}^{(i)}}{\partial x_j} \boldsymbol{\epsilon}^{(i)} \\ &\quad + \mathbf{T}^{(i)} \mathbf{Q}^{(i)} \frac{\partial \boldsymbol{\epsilon}^{(i)}}{\partial x_j} \end{aligned} \quad (46)$$

식(46)에서 좌표변환 행렬의 구배  $\partial \mathbf{T}^{(i)}/\partial x_j$ 와 모듈러스의 구배  $\partial \mathbf{Q}^{(i)}/\partial x_j$ 는 설계변수  $x_j$ 가 적층각도  $\phi^{(i)}$ 로서  $l$ 이  $i$ 와 같을 때에만 값이 존재하며 각각 식(A-6), (A-4)로부터 구해진다. 또한, 변형률의 구배  $\partial \boldsymbol{\epsilon}^{(i)}/\partial x_j$ 는

$$\frac{\partial \boldsymbol{\epsilon}^{(i)}}{\partial x_j} = \left[ \frac{1}{l} \frac{\partial u_r^{(i)}}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_r^{(i)}}{\partial r} \right) \right]^T \quad (47)$$

으로 나타난다.

식(47)에서  $\partial u^{(i)}/\partial x_j$ 는 전체 강성행렬식(33)을 이용하여 구하게 된다. 식(33)의 설계변수  $x_j$ 에 대한 구배는 다음과 같다.

$$\mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial x_j} = \frac{\partial \mathbf{F}_r}{\partial x_j} + \frac{\partial \mathbf{F}_\omega}{\partial x_j} + \frac{\partial \mathbf{F}_\delta}{\partial x_j} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_j} \mathbf{D} \quad (48)$$

식(48)에서  $\mathbf{F}_r$ 은 경계조건에 의한 하중이므로  $\partial \mathbf{F}_r/\partial x_j$ 는 0이 되며,  $\partial \mathbf{F}_\omega/\partial x_j$ 는 식(26)으로부터 다음과 같이 구해진다.

$$\frac{\partial \mathbf{F}_\omega}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^n \left( -\frac{\partial \mathbf{f}_\omega^{(i)}}{\partial x_j} + \frac{\partial \mathbf{k}^{(i)}}{\partial x_j} \mathbf{f}_u^{(i)} + \mathbf{k}^{(i)} \frac{\partial \mathbf{f}_u^{(i)}}{\partial x_j} \right) \quad (49)$$

여기서,  $\partial \mathbf{f}_\omega^{(i)}/\partial x_j$ 와  $\partial \mathbf{f}_u^{(i)}/\partial x_j$ 는 식(20), (13)으로부터 구해지고  $\partial \mathbf{k}^{(i)}/\partial x_j$ 는 식(22)로부터 구해지며 각 설계변수에 따른 식(49)는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{F}_\omega}{\partial \omega^2} &= \sum_{i=1}^n \left( -\frac{\partial \mathbf{f}_\omega^{(i)}}{\partial \omega^2} + \mathbf{k}^{(i)} \frac{\partial \mathbf{f}_u^{(i)}}{\partial \omega^2} \right) \\ \frac{\partial \mathbf{F}_\omega}{\partial \phi^{(l)}} &= \sum_{i=1}^n \left( -\frac{\partial \mathbf{f}_\omega^{(i)}}{\partial \phi^{(l)}} + \frac{\partial \mathbf{k}^{(i)}}{\partial \phi^{(l)}} \mathbf{f}_u^{(i)} + \mathbf{k}^{(i)} \frac{\partial \mathbf{f}_u^{(i)}}{\partial \phi^{(l)}} \right) \\ \frac{\partial \mathbf{F}_\omega}{\partial \delta^{(l)}} &= 0 \end{aligned} \quad (50)$$

식(48)의  $\partial \mathbf{F}_\delta/\partial x_j$ 는 식(31)로부터 다음과 같이 구해진다.

$$\frac{\partial \mathbf{F}_\delta}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial \mathbf{k}^{(i)}}{\partial x_j} \boldsymbol{\delta}^{(i)} + \mathbf{k}^{(i)} \frac{\partial \boldsymbol{\delta}^{(i)}}{\partial x_j} \right) \quad (51)$$

여기서,  $\partial \boldsymbol{\delta}^{(i)}/\partial x_j$ 는 식(32)로부터 구해지며 각 설계변수에 따른 식(51)은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{F}_\delta}{\partial \omega^2} &= 0 \\ \frac{\partial \mathbf{F}_\delta}{\partial \phi^{(l)}} &= \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial \mathbf{k}^{(i)}}{\partial \phi^{(l)}} \boldsymbol{\delta}^{(i)} \right) \\ \frac{\partial \mathbf{F}_\delta}{\partial \delta^{(l)}} &= \sum_{i=1}^n \left( \mathbf{k}^{(i)} \frac{\partial \boldsymbol{\delta}^{(i)}}{\partial \delta^{(l)}} \right) \end{aligned} \quad (52)$$

또한,

$$\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_j} \mathbf{D} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial \mathbf{k}^{(i)}}{\partial \phi^{(l)}} \mathbf{d}^{(i)} \right) \quad (53)$$

이며 위 식에서 위첨자  $l \neq i$ 일때 값은 0이 된다. 식(49)~(53)을 이용하여 식(48)의 오른쪽 항을 구한 후, 식(33)을 풀 때 얻어진  $\mathbf{K}$ 의 아래-위 삼각 분해행렬(L-U decomposition)을 이용하여 식(48)로부터  $\partial \mathbf{D}/\partial x_j$ 를 구할 수 있다.

또한, 식(47)에서  $\partial(\partial u_r^{(i)}/\partial r)/\partial x_j$ 를 구하기 위해 식(4)를  $r$ 에 대해 미분하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} u_r^{(i)} &= \frac{\partial u_r^{(i)}}{\partial r} \\ &= 3\omega^2 \Phi r^2 + \kappa C_1 \Phi_1 r^{\kappa-1} - \kappa C_2 \Phi_2 r^{-\kappa-1} \end{aligned} \quad (54)$$

$i$ 번째 적층링의 1, 2번 절점에서 변위의 도함수(식(54)와 반지름과의 곱을 식(16)을 이용하여 다음과 같은 벡터로 정의한다.

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_r^{(i)} &= \begin{Bmatrix} r_1 u_r^{(i)} \\ r_2 u_r^{(i)} \end{Bmatrix} \\ &= 3\mathbf{f}_u^{(i)} - \mathbf{L}^{(i)}(\mathbf{u}_r^{(i)} - \mathbf{f}_u^{(i)}) \end{aligned} \quad (55)$$

여기서,

$$\mathbf{L}^{(i)} = \kappa \mathbf{G}^{(i)} \mathbf{I}^* \mathbf{G}^{(i)-1} \quad (56)$$

식(55)의 설계변수에 대한 구배는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}_r^{(i)}}{\partial \omega^2} &= 3 \frac{\partial \mathbf{f}_u^{(i)}}{\partial \omega^2} + \mathbf{L}^{(i)} \frac{\partial \mathbf{f}_u^{(i)}}{\partial \omega^2} \\ \frac{\partial \mathbf{u}_r^{(i)}}{\partial \phi^{(l)}} &= 3 \frac{\partial \mathbf{f}_u^{(i)}}{\partial \phi^{(l)}} - \frac{\partial \mathbf{L}^{(i)}}{\partial \phi^{(l)}} (\mathbf{u}_r^{(i)} - \mathbf{f}_u^{(i)}) \\ &\quad - \mathbf{L}^{(i)} \frac{\partial (\mathbf{u}_r^{(i)} - \mathbf{f}_u^{(i)})}{\partial \phi^{(l)}} \\ \frac{\partial \mathbf{u}_r^{(i)}}{\partial \delta^{(l)}} &= \mathbf{L}^{(i)} \frac{\partial \boldsymbol{\delta}^{(i)}}{\partial \delta^{(l)}} \end{aligned} \quad (57)$$

식 (57)에서  $L^{(i)}$ 는 식 (56)에 식 (5), (14), (19)를 대입함으로써  $\phi^{(i)}$ 만의 함수가 됨을 알 수 있으며  $\partial L^{(i)}/\partial \phi^{(i)}$ 가 구해진다. 또한, 변위의 적합조건식 (30)으로부터  $\partial u_f^{(i)}/\partial \delta^{(i)}$ 가 구해진다.

### 3. 결과 및 고찰

응력해석과 민감도해석 결과를 이용하여 최적설계를 수행하였고, 최적설계시 각 설계변수들의 값은 무차원화 되어 같은 차수(order)를 지니도록 고려되었다. 즉, 하중은 섬유방향의 인장 강도  $X$ 로, 길이는 안쪽 반경  $r_1$ 로 무차원화 되었다. 최적설계에 사용된 알고리즘으로는 연속선형 프로그래밍(sequential linear programming, SLP)과 수정된 실행가능방향법(modified method of feasible direction)이 사용되었으며, 선탐색(line search) 방법으로 황금분할법(golden section method)과 다항식(polynomial)에 의한 방법을 이용하였다.

응력해석 및 최적설계에서 유도된 결과를 컴퓨터 코드로 프로그램하여 다음과 같은 예제에 적용하였다. 로터의 기하학적인 형태와 최적설계시 요구되는 초기값은 Table 1에 표시되었다. 각 링의 재료는 복합재료인 탄소섬유/에폭시(Graphite/Epoxy)

**Table 1** Geometric input data and initial design variables of flywheel rotor

Input data	Value	Unit
Inner radius( $r_1$ )	0.05	m
Outer radius( $r_{11}$ )	0.1	m
No. of ring	10	Number
Initial angle( $\phi_1$ )	20	Degree
Initial interference( $\delta_1$ )	0.000005	m

T300/5208이 쓰였으며 물성치는 가로 등방성으로서 Table 2에 표시되었다.<sup>(12,13)</sup> 로터의 높이는 0.1 m로, 질량관성모멘트는  $0.023562 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ 으로 주어졌다.

본 예제를 통한 결과는 고려된 설계변수에 따라 경우(case) 1~4로 분류하였다. 경우 1은 설계변수로 각속도  $\omega$ 만 고려하였고, 경우 2는 각속도  $\omega$ 와 적층각도  $\phi$ 를, 경우 3은 각속도  $\omega$ 와 간섭량  $\delta$ 를, 경우 4는 각속도  $\omega$ , 적층각도  $\phi$ , 간섭량  $\delta$ 를 모두 고려하였다. 각 경우에 따라 얻어진 최대 각속도와 SED를 Table 3에 나타내었다. 이 결과 적층각도보다는 간섭량에 의한 효과가 크다는 것을 알

**Table 2** Material properties of Graphite/Epoxy(T300/5208)

Material property	Value	Unit	Strength	Value	Unit
$E_{\theta\theta}$	181	Gpa	X	1500	MPa
$E_{zz}=E_{rr}$	10.3	GPa	X'	1500	MPa
$G_{\theta r}=G_{\theta r}$	7.17	GPa	Y	40	MPa
$G_{rz}$	7.17	GPa	Y'	246	MPa
$\nu_{\theta r}=\nu_{\theta z}$	0.28		S	68	MPa
$\nu_{rz}$	0.28		Density	1600	$\text{kg}/\text{m}^3$

**Table 3** Case of optimum design of flywheel rotor

Case	Considered D. V.	Not considered D. V.	Max. $\omega$ [rpm]	SED[Wh/kg]
1	$\omega$	$\phi=0, \delta=0$	55900	29.75
2	$\omega, \phi$	$\delta=0$	56400	30.28
3	$\omega, \phi$	$\phi=0$	86900	71.88
4	$\omega, \phi, \delta$		87000	72.05

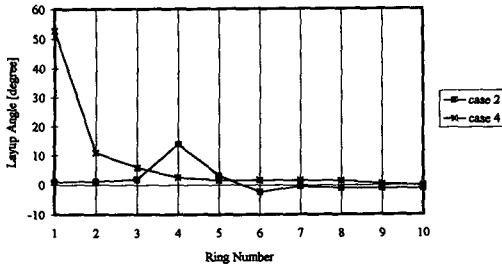


Fig. 5 Distribution of optimum layup angle

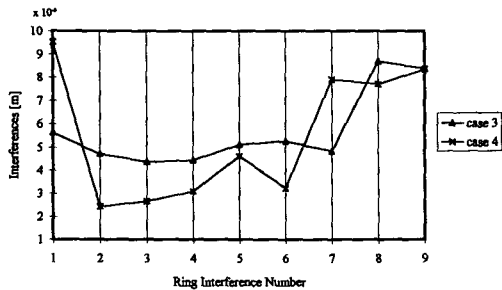


Fig. 6 Distribution of optimum interferences

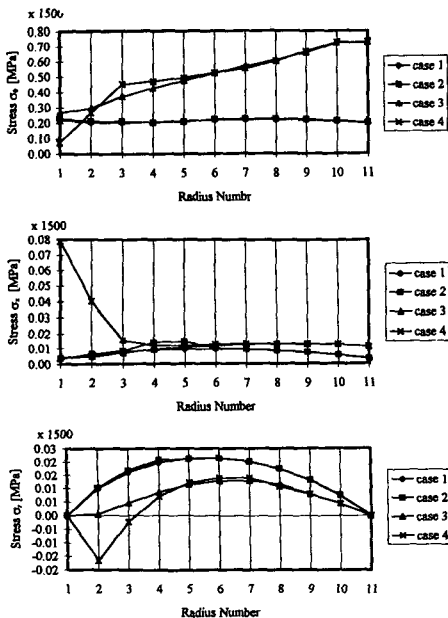


Fig. 7 Comparison of stresses in each case

수 있다. 또한, 적층각도가 설계변수로 선정된 경우 2와 4에서의 최적 적층각도는 Fig. 5, 간섭량이 설계변수로 선정된 경우 3과 4에서의 최적 간섭량은 Fig. 6에 나타내었다.

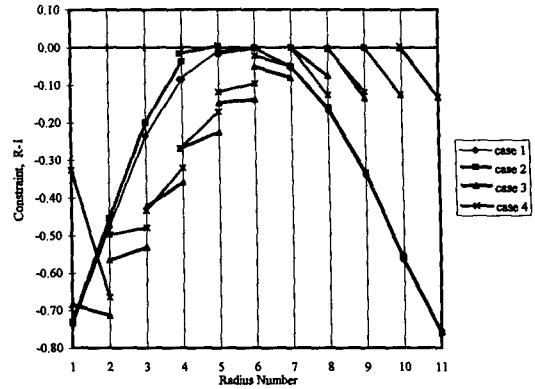


Fig. 8 Comparison of constraints in each case

각 경우에서 얻어진 최적상태에서의 응력( $\sigma_\theta$ ,  $\sigma_z$ ,  $\sigma_r$ )의 분포는 Fig. 7과 같다. 경우 1에서 원주방향의 응력은 가장 안쪽 반경에서 최대가 되는 등방성(isotropic) 재료와는 달리 바깥 반경이 커질수록 로터의 중간 부분에서 발생함을 알 수 있다. 또한, 간섭량 및 적층각도의 영향으로 반경방향 응력  $\sigma_r$ 이 로터의 안쪽 부분에서 감소되며, 원주방향 응력  $\sigma_\theta$ 은 로터의 바깥쪽으로 증가된다.

각 경우에 대한 구속조건인  $R-1$ 의 값은 Fig. 8과 같다.  $R-1$ 의 값이 제한값인 0에 더 많이 근접해 있을수록 더 높은 각속도를 지니게 됨을 알 수 있다. 즉, 로터의 반경에 따른 강도비의 분포는 간섭량과 적층각도가 고려되지 않은 경우 로터의 중간 부분에서 최대이나 이 설계변수들이 고려되면 강도비의 분포는 로터의 안쪽에서는 감소하고 중간부 이후의 각 링의 안쪽에서 최대값을 지니게 되어 결국 회전수를 그 만큼 증가할 수 있어 SED를 높일 수 있다.

#### 4. 결 론

에너지 저장시스템용 복합재 플라이휠 로터에서 적층각도와 간섭량을 반경방향으로 변화시킬 수 있는 다층링을 이용해서 저장 에너지를 높일 수 있었다.

즉, 적층각도  $0^\circ$ 와 간섭량이 없을 때 보다 최적 설계 하여 얻어진 적층각도와 간섭량이 고려되면 약 242%의 SED가 증가되었다.

또한, 최대 에너지를 갖게 하는 설계변수 중에서 간섭량이 적층각도보다 약 2.4배나 SED를 증가시킬 수 있었다. 이는 적층각도의 변화가 로터의 회



전시 발생하는 응력분포를 최적화 하는 방법보다 간섭량을 주어 미리 내부에 압축응력을 발생 시킨 후 회전시 발생하는 인장응력을 상쇄시키는 방법이 더 효율적임을 보인다.

## 후 기

본 연구는 통산사업부 소속 에너지자원 절약기술개발 지원센터에서 주관하는 에너지절약 기술개발사업의 일환으로 한국기계연구원의 위탁연구로서 수행되었으며, 모든 관계자 여러분께 감사드립니다.

## 참고문헌

- (1) Rodriguez, G. E., Studer, P. A. and Baer, D. A., 1983, "Assessment of Flywheel Energy Storage for Space Craft Power System," *NASA Technical Memorandum 85061*.
- (2) Khan, A. A., 1984, "Maximization of Flywheel Performance," M. S. Thesis, University of Maryland.
- (3) Mitchell Olszewski, Eisenhaure, Norman Beachley, D. B. and Kirk, J. A., 1988 "Advanced Energy Systems-On the Fly or Under Pressure," *Mechanical Engineering*, June.
- (4) Kulkarri, S., 1982, "Energy and Technology Review," *Lawrence Livermore National Laboratory, UCRL-52000-82-3*, March.
- (5) Ries, D. M., 1991, "Manufacturing Analysis for a Composites Multi-Ring Flywheel," M. S. Thesis, University of Maryland.
- (6) Portnov, G. G., 1989, *Composite Flywheels, Structure and Design*(Edited by Herakovich C. T. and Tarnopolskii Y. M.), Vol. 2, Elsevier Science Publishing Company Inc., New York, U. S.A., pp. 531~582.
- (7) Kirk, J. A., 1977, "Flywheel Energy Storage, Part I-Basic Concepts," *International Journal of Mechanical Science*, Vol. 19, No. 4, pp. 223~231.
- (8) Kirk, J. A. and Studer, P. A., 1977, "Flywheel Energy Storage, Part II-Magnetically Suspended Superflywheel," *International Journal of Mechanical Science*, Vol. 19, No. 4, pp. 223 ~ 245.

- (9) Lekhenitskii, S. G., 1968, *Anisotropic Plates*(Translated by Tasi, S. W. and Cheron, T.), Gordon and Breach Science Publishers Inc., New York, U.S.A., pp. 1~5, 106~116, 150~155.
- (10) Tsai, S. W., 1988, *Composites Design*, Think Composites, Dayton, U.S.A.
- (11) Haug, E. J., Chok, K. K. and Vadim Komkov, 1986, *Design Sensitivity Analysis of Structural Systems*, Academic Press, pp. 25~49.
- (12) Tsai, S. W. and Hahn, H. T., 1980, *Introduction to Composite Materials*, Technomic Co., Westport, U.S.A., pp. 1~24.
- (13) Ha, S. K. and O. S., 1993, "A Study on the Design Optimization of Hip Prosthesis of Advanced Fiber Reinforced Composites," *ICCM/9*, Vol. 4, pp. 729~739.

## 부 록

좌표변환과 응력-변형률의 관계  
다층구조물의  $i$ 번째 링의 적층판 축(off-axis)의 응력-변형률의 관계는 다음과 같다.

$$\sigma^{(i)} = Q^{(i)} \epsilon^{(i)} \quad (\text{A-1})$$

여기서,  $\sigma^{(i)}$ 는

$$\sigma^{(i)} = [\sigma_\theta \ \sigma_z \ \sigma_r \ \sigma_{\theta z}]^{(i)T} \quad (\text{A-2})$$

와 같이 구성되며 축대칭 평면 변형률상태에서의

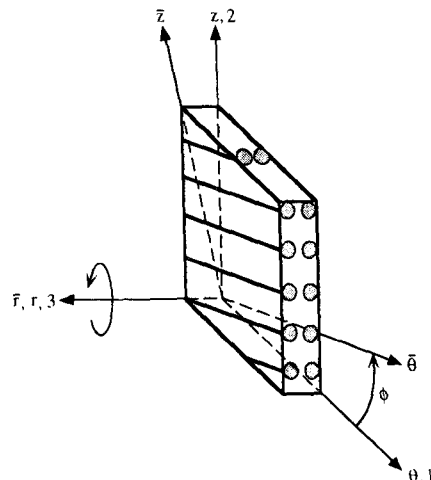


Fig. A-1 Transformation angle and its coordinate system

변형률은 다음과 같이 나타난다.

$$\begin{aligned} \epsilon^{(i)} &= [\epsilon_\theta \epsilon_r]^{(i)T} \\ &= \left[ \frac{u_r}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} \right]^{(i)T} \end{aligned} \quad (\text{A-3})$$

이때의 적층판 축의 모듈러스는 아래와 같이 정의된다.

$$Q^{(i)} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{33} \\ Q_{61} & Q_{63} \end{bmatrix}^{(i)} \quad (\text{A-4})$$

적층판 축의 응력과 플라이 축과의 응력관계는 다

음과 같이 나타난다.

$$\sigma_{\theta n}^{(i)} = T^{(i)} \sigma^{(i)} \quad (\text{A-5})$$

여기서,  $\sigma_{\theta n}^{(i)}$ 는 플라이 축응력이며,  $T^{(i)}$ 는 좌표변환 행렬로서 다음과 같이 정의된다.

$$T^{(i)} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 0 & 2mn \\ n^2 & m^2 & 0 & -2mn \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -mn & mn & 0 & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \quad (\text{A-6})$$

단,  $m = \cos \phi^{(i)}$ ,  $n = \sin \phi^{(i)}$ 이며  $\phi^{(i)}$ 는 Fig. A-1과 같이  $i$ 번째 링에서의 플라이 축, 적층판 축 사이의 변환각을 의미한다.