

〈論 文〉

진동응답 계측결과를 이용한 기진력의 추정

한 상 보*

(1994년 1월 27일 접수)

Estimation of Excitation Forces from Measured Response Data

Sangbo Han

Key Words : Frequency Response Function(주파수 응답함수), Characteristic Matrices(진동 특성 행렬), Excitation Force(기진력), Mutually Orthonormal Basis Vectors in Frequency Domain(주파수영역 상호직교 기본벡터)

Abstract

It is attempted to estimate excitation force of a linear vibratory system using measured vibration responses. The excitation force is estimated from the relationship between the vibration response and system characteristic matrices which are extracted from both the mathematical model of the system and actual response in contrast to the usual approach of inverting the frequency response matrices. This extraction scheme is based on the fact that the vibration response can be expressed in terms of linear combination of frequency domain modal vectors defined as mutually orthonormal basis vectors in frequency domain. The extracted frequency domain basis vectors are very stable in computational manipulation. It is found that the estimated excitation force is in good agreement with actually measured force except at the natural frequencies the structure, which is the common feature still to be overcome by the research efforts in this area. From the results of this paper, this disagreement is considered to come from the discrepancy between the model and actual value of the mass, damping and stiffness of the structure.

1. 서 론

기진력의 정확한 산정 및 계측은 진동특성 파악을 위한 해석작업에 있어서나 진동평가 문제에 있어 해석 및 평가 결과의 성패를 좌우하는 주요한 인자의 하나로 그 중요성이 인식되고 있다.

그러나, 진동해석 및 진동계측과정에 있어서 종종 기진력의 정확한 파악이 힘들 경우가 있는데, 짧은 시간에 걸쳐 발생하는 충격력과 폭발력, 복잡한

기계구조에서 발생되는 내부력과 외부로 파생되는 전달력 등이 그 예이며, 이러한 힘들은 이론적 기술이나 직접적인 계측이 불가능할 때가 많다. 이와 같은 경우에 계의 진동응답 계측결과를 이용하여 기진력을 역으로 추정할 수 있는 방법을 제시한다면 주어진 교란에 대한 그 계의 진동현상을 보다 정확히 이해할 수 있을 것이며, 차후 설계에 유용하게 사용될 정보를 제공할 수 있을 것으로 판단된다.

이론상, 기진력은 계의 진동특성과 특정위치에서의 진동응답이 파악되면 손쉽게 구해질 수 있다. 그러나, 실제 응용에 있어서는 이러한 간단한 원리가 예견치 못한 어려움을 가져다 줄 뿐만 아니라

*정회원, 경남대학교 기계설계학과

중중 신뢰할 수 없는 결과를 도출하게 되는데, 그 이유는 역방향 해석 문제(inverse problem) 특유의 성질로서, 주어진 조건으로부터 유일한 해를 정의하지 못한다는 사실 때문이다.^(1,2)

지금까지의 연구결과로 제시된 기진력의 역추정 문제는 주파수 응답함수(frequency response function)로 구성된 계의 특성행렬(system characteristic matrix)의 역(inverse)을 구하는데 필요한 효과적 수치연산(numerical algorithm)의 개발에 치중되어 왔다.⁽³⁻⁵⁾ 즉,

$$\{X(\omega)\}=[H(\omega)]\{F(\omega)\} \quad (1)$$

로 표현되는 계의 진동응답과 계의 진동 특성, 그리고 기진력과 관계로부터 기진력을 추출하려는 방법으로써

$$\{F(\omega)\}=[H(\omega)]^{-1}\{X(\omega)\} \quad (2)$$

로 주어지는 주파수 응답함수 행렬의 역을 구할 수 있으면 기진력의 추정이 용이해질 것이라는 견해이다.

많은 연구결과들이 진동응답함수 행렬의 역을 구하는 효과적인 수치연산법으로서 다음과 같은 방법들을 제시하고 있다.

- 첫째, 가우스 소거법
- 둘째, 반복 및 순환역 방법
- 셋째, QR 분해법
- 넷째, Cholesky 분해법
- 다섯째, 특이치 분해법

그러나, Dobson 등^(4,5)의 연구결과에 의하면, 상기 연산방법들은 역을 구하려고 하는 행렬의 수치적 안정도(condition number)에 따라 그 효과가 가변적이며 일관성있는 결과를 주지 못한다는 것이다. 더욱이 상기한 연산방법들은 진동응답 계측시의 잡음오염(noise pollution)과 계의 주파수 응답함수 추정과정에 있어서의 조그만 오차(error)에 상당히 민감한 반응을 보여 기진력의 추정시 큰 폭의 오류를 야기시킬 수 있다는 것이다.

정방행렬(square matrix)로 주어지는 주파수 응답함수 행렬의 역행렬 계산과정에서 발생하는 수치 불안정성을 해소시키기 위한 노력의 일환으로 Kinn^(6,7)과 Fabunmi,⁽⁸⁾ Giansante⁽⁹⁾ 등은 가진점보다 많은 위치에서의 응답을 측정하여 사각행렬(rectangular matrix)로 표시되는 주파수 응답함수 행렬을 정의한 뒤, 의사역행렬(pseudo inverse) 기법을 사용하여 다음과 같이 기진력을 추정하였다. 즉,

$$\frac{\{X(\omega)\}}{\{P \times 1\}} = \frac{[H(\omega)]\{F(\omega)\}}{\{P \times Q\}\{Q \times 1\}} \quad (\text{단, } P > Q) \quad (3)$$

로 표시되는 계측결과를 이용하여 기진력을 다음과 같이 정의하는 것이다.

$$\{F(\omega)\}=[H(\omega)]^+ \{X(\omega)\} \quad (4)$$

여기서,

$$[H(\omega)]^+ = ([H(\omega)]^{*T} [H(\omega)]^{-1} [H(\omega)]^{*T}) \quad (5)$$

이며, $[H(\omega)]^{*T}$ 는 $[H(\omega)]$ 의 공액복소 전치행렬(complex conjugate transpose)이다. 이는 일종의 최소 자승오차(least square error)가 되는 해를 구하는 기법으로서 계의 진동특성 파라미터의 추출 때에도 많이 사용되는 기법이나, 몇몇 특별한 경우 외에 대해서는 아직도 일반화에 많은 난관이 있는 것으로 보고되고 있다.⁽⁹⁾

또한, Okubo 등⁽¹⁰⁾은 계의 주파수 응답함수를 기준진동형들로 구성된 모형(modal model)으로 치환하여 기진력을 추정해 보려는 시도를 꾀하였으나 비공진 주파수대(anti-resonance zone) 부근에서 수치연산 결과의 불안정이 상당히 심하다는 결론을 얻었을 뿐이다.

이상과 같이, 진동응답함수로 이루어진 계의 특성행렬의 역을 구하여 기진력을 추정해 보려는 시도는 궁극적으로 컴퓨터를 이용한 수치연산의 불안정성이라는 벽에 부딪쳐 큰 진전을 보지 못하고 있다.

이에 반해서, 기진력을 시간영역에서 바로 추정해 보려는 시도가 행해지고 있는데 Chan 등⁽¹¹⁾은 이산계로 모형화된 구조물의 운동방정식을 유한차분법으로 표시하여 구조물의 진동특성과 응답으로부터 기진력을 기술하고자 했으나 이 방법의 검증을 위한 실험을 행하지는 않았다. 한편, Dobson 등⁽⁴⁾은 이와 유사한 방법을 사용하여 간단한 계의 충격력 추정에 비교적 양호한 결과를 얻어낼 수 있었으나 충격력이 가해진 후의 시간영역에서는 계산 결과치가 불안정하다는 연구 보고를 하였다.

본 연구에서는 측정된 계의 주파수 응답함수를 이용하여 질량, 감쇠 및 강성과 같은 계의 특성치 행렬(system parameter matrix)들을 정의할 수 있다는 점에 착안하여 계측된 진동응답으로부터 등가의 유한요소들로 표시될 수 있는 질량, 감쇠 및 강성 행렬을 정의하고 계측된 계의 진동응답과의 연관을 통하여 기진력을 추정하고자 한다. 이 방법의 성패는 등가의 유한요소들로 표시되는 계의 특성치 행렬의 정확한 산정을 실험을 통해 구한 진동응답

함수들로부터 구해내는데 달려 있다.

2. 이론적 배경

2.1 진동 모형들 간의 연계 관계

본 연구는 수치적 불안정성을 초래하는 주파수 응답함수행렬의 역을 구하는 방법에서 탈피하여 계측된 진동응답 자체로부터 질량, 감쇠 및 강성행렬에 해당하는 등가의 특성행렬을 추출한 뒤 그와 같은 진동을 야기시키는 기진력을 역으로 추정해 내려는 것이다.

주어진 진동 대상물에 대하여 수치적 이산계 모형(finite element model), 모드 모형(modal model), 주파수 응답함수 사이에는 Fig. 1과 같은 상호관계가 존재한다.

각 모형들 간의 연계는 다음의 3가지 식으로 표현될 수 있다.

$$H_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{\phi_{jr} \phi_{kr}}{\omega_r^2 - \omega^2 + j2\zeta_r \omega_r \omega} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} [\Phi]^T [M] [\Phi] &= [\backslash I \backslash] \\ [\Phi]^T [K] [\Phi] &= [\backslash \omega^2 \backslash] \\ [\Phi]^T [C] [\Phi] &= [\backslash 2\zeta_r \omega_r \backslash] \end{aligned} \quad (7)$$

$$(-\omega^2 [M] + j\omega [C] + [K]) \{X(\omega)\} = \{F(\omega)\} \quad (8)$$

수학적으로 정의된 혹은 실험적으로 추출된 계의 특성행렬 $[M]$, $[C]$, $[K]$, 그리고 계측된 진동응답 $\{X(\omega)\}$ 로부터 식(8)을 이용하여 기진력을 직접적으로 추정해 보고자 하는 것이 본 연구의 큰 줄기이다.

문제는 등가의 질량, 감쇠 및 강성행렬을 구하는 식(7)의 적절한 운용이다. 예를 들어 각 행렬은

$$[M] = [\Phi]^{-T} [\Phi]^{-1}$$

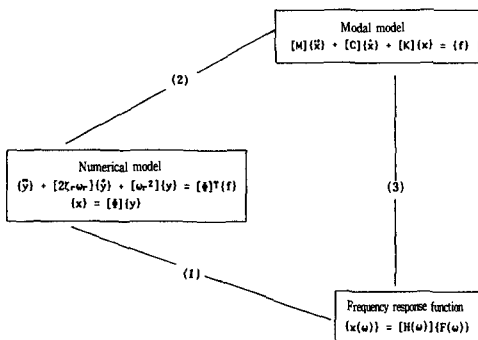


Fig. 1 Three different representations of vibration model

$$\begin{aligned} [K] &= [\Phi]^{-T} [\omega_r^2] [\Phi]^{-1} \\ [M] &= [\Phi]^{-T} [2\zeta_r \omega_r] [\Phi]^{-1} \end{aligned} \quad (9)$$

의 관계를 이용하여 구할 수 있다. 그러나, 실제 응용 상에서는 실험적으로 추출된 모드벡터(modal vector)의 수와 진동응답 측정위치의 수가 항상 일치하지는 않기 때문에 사각행렬로 표시되어지는 모드행렬(modal matrix) $[\Phi]$ 의 역을 정의할 수 없게 된다.

2.2 질량, 강성 및 감쇠행렬의 정의

본 연구에서는 다음의 방법을 사용하여 모우드행렬과 계의 특성치 행렬 즉, 질량, 감쇠 및 강성행렬을 구하는 시도를 피하고자 한다.

우선, 등가의 질량 및 강성행렬은 계의 수학적 모형으로부터 정의한다. 그 이유는, 유한요소를 이용한 구조해석기법의 발달에 힘입어 등가의 이산계로 치환된 계의 수학적 모형으로부터 계의 실제 거동을 충분히 묘사할 수 있는 유한요소 행렬을 손쉽게 구할 수 있기 때문이다. 계의 실제 거동을 나타내는 계측결과를 이용하여 등가의 질량 및 강성행렬들을 정의할 수도 있으며 그 방면의 연구도 활발하게 진행되고 있기는 하나, 수학적 모형으로 표현된 질량 및 강성행렬을 이용하여 실제 구조물의 거동을 충분히 잘 나타낼 수 있다는 것이 이제까지의 연구 결과에 의해 뒷받침되고 있다.

그러나, 계의 수학적 모형으로부터 감쇠행렬 $[C]$ 를 정의하는 데에는 아직 신뢰할 만한 확정적인 방법이 없는 실정이다. 이는 구조물의 실제 감쇠 기구가 수학적 모형으로 기술할 수 있을 만큼 간단하지 않다는 데에 그 어려움이 있다. 실제로, 진동하고 있는 구조물에서 발생되고 있는 에너지 소산 과정의 실질적 규명은 실제 계측결과를 이용할 수 밖에 없다는 것이 당연한 논리적 귀결이다. 따라서, 본 연구에서는 계의 진동응답을 주파수 영역에서 측정하고, 그 계측결과를 이용하여 해석하고자 하는 진동수 범위 내에서 계의 응답에 영향을 미치는 감쇠행렬의 각 요소를 직접적으로 구하는 방법을 제시하고자 한다. 즉, 계의 진동응답에 기여하는 모우드들의 수를 주파수영역 내에서 결정하고, 일련의 주파수영역 하에서의 기본벡터(basis vector in frequency domain)를 추출하여 이 기본벡터들로부터 계의 거동을 효과적으로 기술할 수 있는 감쇠행렬을 정의하는 것이다.

일단, 동가의 특성치행렬들이 정의되면 추정된 진동응답을 이용하여 진동을 야기시킨 기진력을 식(8)로부터 추정해 낼 수 있다.

2.3 진동응답으로부터의 감쇠행렬의 도출

N 자유도를 가진 이산계의 시간영역에서의 운동방정식을 행렬로 나타내면,

$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + [C]\{\dot{x}(t)\} + [K]\{x(t)\} = \{f(t)\} \quad (10)$$

과 같이 주어지며, 이 운동방정식을 주파수영역으로 변환시키면 다음 식을 얻게된다.

$$(-\omega^2[M] + [K] + j\omega[C])X(\omega) = F(\omega) \quad (11)$$

여기서, $X(\omega)$ 와 $F(\omega)$ 는 각각 $x(t)$ 와 $f(t)$ 의 Fourier 변환을 나타낸다. 식(11)을 다시 정리하면

$$\begin{aligned} (-\omega^2[M] + [K])X(\omega) + j\omega[C]X(\omega) &= F(\omega) \\ [C]X(\omega) &= \frac{1}{j\omega}[F(\omega) + (\omega^2[M] - [K])X(\omega)] \\ &= G(\omega) \end{aligned} \quad (12)$$

와 같이 쓸 수 있고, 식(12)의 좌변항 $[C]X(\omega)$ 는 다음과 같이 달리 표현할 수 있는데

$$[C]X(\omega) = [Y(\omega)]\{D_c\} \quad (13)$$

여기서,

$$[Y(\omega)] \equiv \text{Diag}[(X_i(\omega))^T], \quad i=1,2,\dots,N \quad (14)$$

이며, 열벡터로 치환된 감쇠행렬 $\{D_c\}$ 는

$$\{D_c\} \equiv (d_{11} \ d_{12} \ \dots \ d_{1N} \ \dots \ d_{N1} \ d_{N2} \ \dots \ d_{NN})^T \quad (15)$$

를 나타낸다.

만일, 해석하고자 하는 주파수 범위 내에서 주어진 진동응답 계측결과를 F 개의 주파수 값으로 기술한다면 각각의 주파수 값에 대하여 식(12)와 (13)을 정의할 수 있으므로 모든 계측결과에 대하여 다음과 같은 관계식을 얻을 수 있고,

$$\begin{bmatrix} Y(\omega_1) \\ Y(\omega_2) \\ \vdots \\ Y(\omega_F) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{11} \\ d_{12} \\ \vdots \\ d_{NN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G(\omega_1) \\ G(\omega_2) \\ \vdots \\ G(\omega_F) \end{bmatrix} \quad (16)$$

위 식을 보다 간략한 행렬식의 형태로 고쳐 쓰면

$$[Y]\{D_c\} = [G] \quad (17)$$

로 나타낼 수 있게 된다. 여기서, $[Y]$ 는 $FN \times N^2$ 의 차원을 가지며, $[G]$ 는 $FN \times 1$ 의 차원을 가지게 되고, 통상적인 실험결과에 대해서는 $F \gg N, FN \gg N^2$ 의 관계가 성립한다. 계의 진동응답 측정결과들로 구성된 행렬 $[Y]$ 를 다음과 같이 분할행렬의 꼴로 표시하기로 하자.

$$[Y] = \begin{bmatrix} [y_1] & [y_2] & [y_3] & \dots & [y_N] \\ \begin{matrix} x_1(\omega_1) & x_2(\omega_1) & \dots & \dots & x_N(\omega_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ x_1(\omega_2) & x_2(\omega_2) & \dots & \dots & x_N(\omega_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ x_1(\omega_F) & x_2(\omega_F) & \dots & \dots & x_N(\omega_F) \end{matrix} \end{bmatrix} \quad (18)$$

다시 말하면, 분할된 각각의 행렬 $[y_k]$ 는 주파수 영역에서 계측된 진동 응답들로 구성되어 있으며 다음의 열을 제외한 모든 열은 영(zero)인 행렬을 나타낸다.

$$[y_k(\omega_j)]_{(i-1)N+k} = x_i(\omega_j); \quad i=1, 2, \dots, N \quad j=1, 2, \dots, F \quad (19)$$

감쇠행렬 $\{D_c\}$ 를 구하기 위하여 식(17)을 바로 사용할 경우, 행렬 $[Y]$ 의 수치연산조건이 불량(ill-conditioned matrix)으로 말미암아 잘못된 결과를 얻기가 쉽다. 따라서, 본 연구의 핵심이라고 할 주파수영역에서의 기본벡터(basis vector in frequency domain) 추출작업이 이 과정에서 도입되는 것이다.

우선, 주파수영역에서의 계의 진동응답 $x_i(\omega)$ 를 다음과 같이 나타내기로 하자.

$$\begin{aligned} x_i(\omega) &= \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \Phi_{ik} \Phi_{jk} F_j P_k(\omega) \\ &= \sum_{k=1}^N g_{ik} P_k(\omega) \end{aligned} \quad (20)$$

식(20)은 계의 진동응답을 서로 독립적인 N 개의 주파수영역 함수들의 선형 조합으로 나타낼 수 있

다는 것을 의미한다. 여기서, 각각의 계의 진동응답 계측결과를 벡터로 간주할 때 벡터 $x_i(\omega)$ 를 표현할 수 있는 상호독립적인 J 개의 직교벡터(J independent orthonormal vectors)가 존재한다고 가정하고 이 상호 직교벡터를 ϕ_k 라고 하면 각각의 진동응답을 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$x_i(\omega) = \sum_{k=1}^J \alpha_{ik} \phi_k(\omega); i=1, \dots, N, k=1, \dots, J \quad (21)$$

식(21)로 표현되는 상호 직교벡터 ϕ_k 는 수정된 Gram-Schmidt 직교화과정(modified Gram-Schmidt orthogonalization process)을 이용하여 구할 수 있으며 계수 α_{ik} 는 추출된 직교벡터 ϕ_k 로부터 다음 관계식을 통하여 얻을 수 있다.

$$\alpha_{ik} = \{\phi_k(\omega)\}^T \{x_i(\omega)\} \quad (22)$$

식(18) 및 (19)로 정의된 행렬 확장과정을 이용하여, J 개의 상호 직교벡터로부터 N 자유도계의 진동응답을 표시하도록 하자. 즉,

$$[\Phi] = [[\Psi_1] [\Psi_2] [\Psi_3] \dots [\Psi_N]]$$

$$\begin{bmatrix} \phi_1(\omega_1) & \phi_2(\omega_1) & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & \phi_1(\omega_1) & \phi_2(\omega_1) & \dots & \phi_J(\omega_1) & & & \\ \phi_1(\omega_2) & \phi_2(\omega_2) & \dots & & & & & & & \\ & & & \phi_1(\omega_2) & \phi_2(\omega_2) & \dots & \phi_J(\omega_2) & & & \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \phi_1(\omega_F) & \phi_2(\omega_F) & \dots & & & & & & & \\ & & & \phi_1(\omega_F) & \phi_2(\omega_F) & \dots & \phi_J(\omega_F) & & & \end{bmatrix} \quad (23)$$

로 확장되며, 동시에

$$[B] = [[B_1] [B_2] \dots [B_N]] \quad (24)$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \dots & \alpha_{N1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{N2} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \alpha_{1J} & \alpha_{2J} & \dots & \alpha_{NJ} \end{bmatrix}$$

이며, 확장된 감쇠행렬은

$$[A] = \text{Diag}[B_i] \quad (25)$$

로 표시된다. 여기서, $[\Phi]$ 는 $NF \times NJ$, $[B]$ 는 $J \times N$, $[A]$ 는 $NJ \times N^2$ 의 차원을 갖게 된다. 따라서, 진동응답 계측결과를 다음 식으로 표시할 수 있으며,

$$[Y] = [\Phi][A] \quad (26)$$

식(23) (24) (25), 그리고 (26)의 관계를 식(17)에 대입하면 최종적으로 다음 관계식을 얻게 된다.

$$[\Phi][A][D_c] = [G] \quad (27)$$

즉,

$$\begin{aligned} [A][D_c] &= ([\Phi]^* [\Phi])^{-1} [\Phi]^* [G] \\ &= [\Phi]^* [G] \\ &= [H] \end{aligned} \quad (28)$$

식(28)이 바로 실험적으로 얻어진 계의 진동응답과 감쇠행렬과의 관계를 설명하는 방정식이며 이 선형 방정식을 풀면 실험적으로 추출된 계의 감쇠행렬 $[D_c]$ 를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$[D_c] = [A]^{-1} [H] \quad (29)$$

2.4 가진력의 추정

상기 기술된 방법을 사용하여 추출된 감쇠계수에 대한 행렬, 그리고 수치적 모형으로부터 정의된 질량 및 강성행렬의 값과 구조물의 정의된 자유도에 해당하는 절점(node)에서의 진동응답 계측결과를 운동방정식에 대입함으로써 주파수영역에서 정의된 가진력의 크기를 아래의 식을 이용해 직접적으로 추정해 낼 수 있다.

$$(-\omega^2[M] + [K] + j\omega[C])X(\omega) = F(\omega) \quad (30)$$

3. 실험장치 및 실험방법

3.1 실험장치

상기 기술된 이론의 적용을 위해 주어진 계의 주파수영역에서의 진동응답함수들을 실험적으로 추출하였다.

실험 대상구조물은 Fig. 2에 주어진 것과 같이 연강으로 된 양단 자유의 단순보로서 그 체원이 $25 * 25 * 2000$ mm이다. 경계조건을 양단 자유보로 한 것은 잘 알려져 있는 바와 같이 실험적으로 가장 구현하기 쉬운 경계조건이기 때문이다. 이 단순보를 길이방향으로 11개의 균등한 절점으로 분해하여 주어진 특정절점에서의 가진력에 대한 11개 절점에

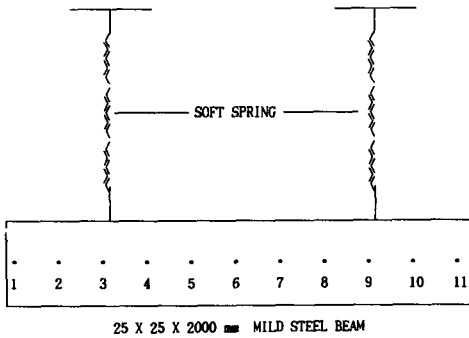


Fig. 2 Free-free beam used to extract vibration response in the experiment with node number convention

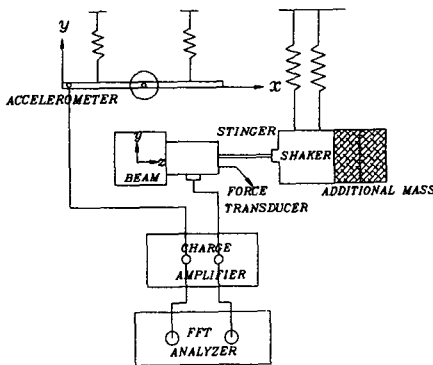


Fig. 3 Schematic diagram of experimental set-up

서의 진동응답을 계측하였는데, 이는 주어진 구조물을 11개의 자유도를 가진 이산계로 치환하여 실험 모형을 정의하였다는 것을 의미한다. 진동응답을 측정하기 위한 실험장치로는 Fig. 3에 주어진 것과 같은 실험적 모드해석법을 위한 표준 실험계를 사용하였다.

3.2 실험방법

계에 가해지는 가진력은 힘측정기(PCB quartz force transducer 218A)를 사용하여 계측하였으며 가진력의 형태는 충격해머(impulse hammer)를 사용한 충격력과 랜덤신호를 이용한 연속 신호 2가지를 병용하였으나 본 실험결과에는 충격력의 경우만을 해석 대상으로 하였다.

진동 응답은 가속도계(PCB accelerometer 302 A07)를 이용하여 계측하였으며 힘측정기와 가속도계의 전압감도는 각각 2.24 mV/N, 10 mV/g이다. 힘측정기와 가속도계에 의해 측정된 가진력과 가속도는 PCB 제품의 신호안정기(480D06

power unit)와 전하증폭기(463A dual mode charge amplifier)를 통하여 Onosoki 제품의 신호분석기(CF350 FFT)에 각각 Ch.A(입력신호)와 Ch.B(출력신호) 신호로 제공되었다. 신호분석기(Onosoki CF 350 FFT)는 401 주파수선의 해상도를 가진 신호분석기로서, 주어진 입력(Ch.A)과 출력(Ch.B)신호의 자기스펙트럼 밀도함수(auto spectral density function) 및 상호 스펙트럼 밀도함수(cross spectral density function), 이들 2 신호의 비율인 주파수 응답함수 등을 자체에 내장된 fast fourier transform 프로그램(FFT Algorithm)에 의해 계산해 낸다.

상호 스펙트럼 밀도함수의 계측 상한주파수의 결정은 계의 진동모드 5개가 확연히 드러나는 500 Hz까지로 하였으며, 이는 시간영역에서 총 길이 2.0 sec에 해당하는 샘플량이다. Ch.A의 충격력은 사각형 창문함수(rectangular window function)를 사용하였으며, 가속도에 해당하는 Ch.B의 진동응답은 지수형 창문함수(exponential window function)를 사용하여 계측하였고 분석된 상호 스펙트럼 밀도함수는 독립된 8회 실험치의 선형평균(linear average)을 취한 신호를 바탕으로하여 계산하였다.

FFT에서 계산된 가진력에 대한 자기 스펙트럼 밀도함수(auto spectral density function)와 가진력과 진동응답사이의 상호 스펙트럼 밀도함수(cross spectral density function)는 general purpose interface bus program(GPIB program)을 통해 컴퓨터(personal computer)에 이송되어 차후 분석 및 계산에 사용되었다.

이론상, 주어진 특정절점에 가해지는 가진 신호에 대해 11개 절점의 진동응답을 동시에 측정하여야 하는데, 11개의 가속도계를 동시에 부착하여 입/출력 모두 12 channel의 신호를 동시 분석할 수 있는 실험여건이 되지 않았기 때문에 다음과 같은 방법으로 11개의 진동응답을 계측하였다. 즉, 실험적으로 계획된 가진력에 대하여 동일한 파형의 신호를 얻을 수 있도록 충격해머와 힘측정기가 부착된 입력장치를 추에 연결하여 이 추를 일정한 위치에서 낙하시킴으로써 하나의 절점에 가해지는 가진력과 동일한 크기 및 파형을 가진 가진력을 연속적으로 얻을 수 있도록 하였으며, 이 일정한 크기의 가진력에 대한 각 절점의 진동응답을 차례로 계측하였고, 그 결과로 얻어지는 진동 응답들을 주어진

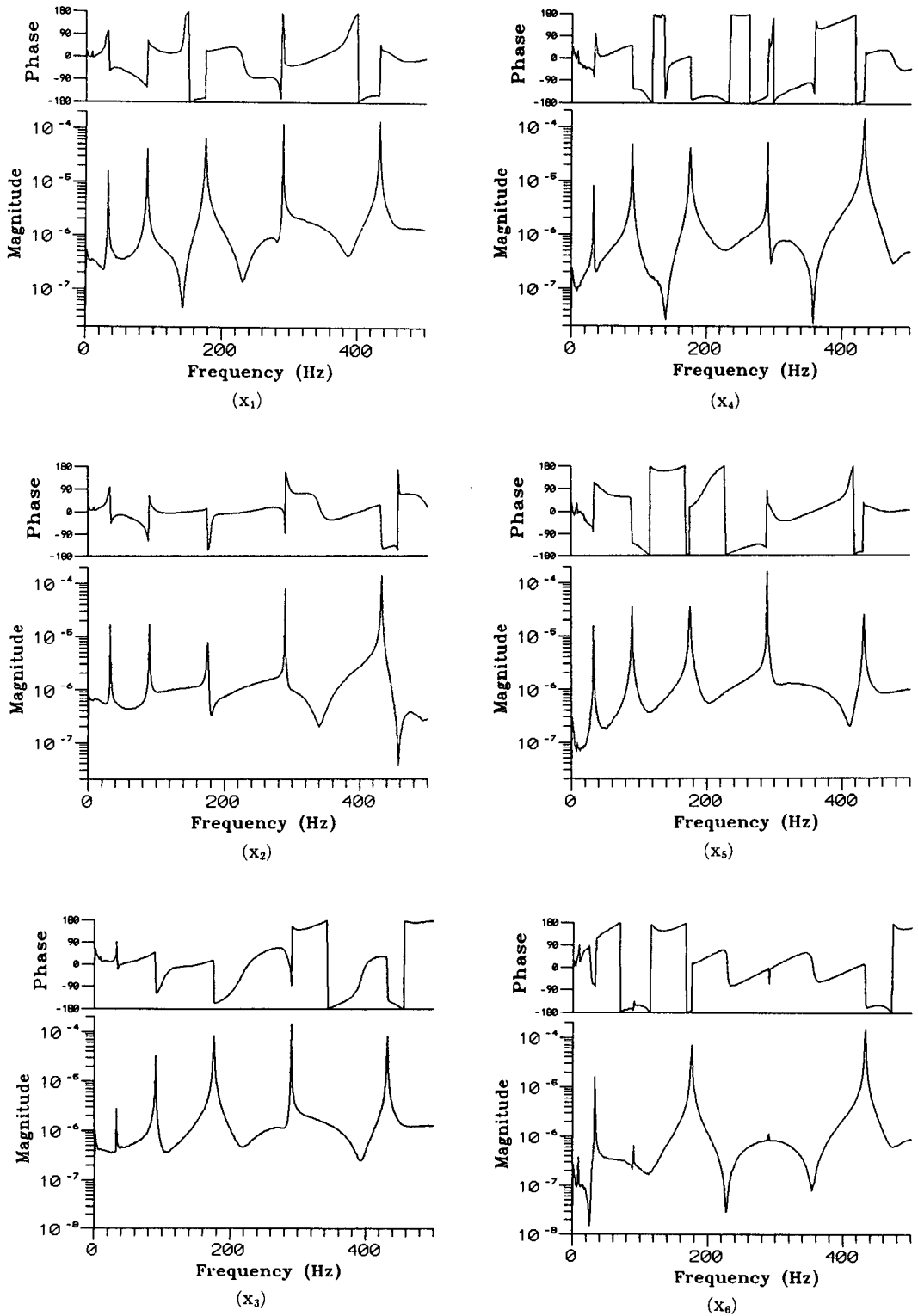


Fig. 4 Continued (from node to node clockwise starting bottom left)

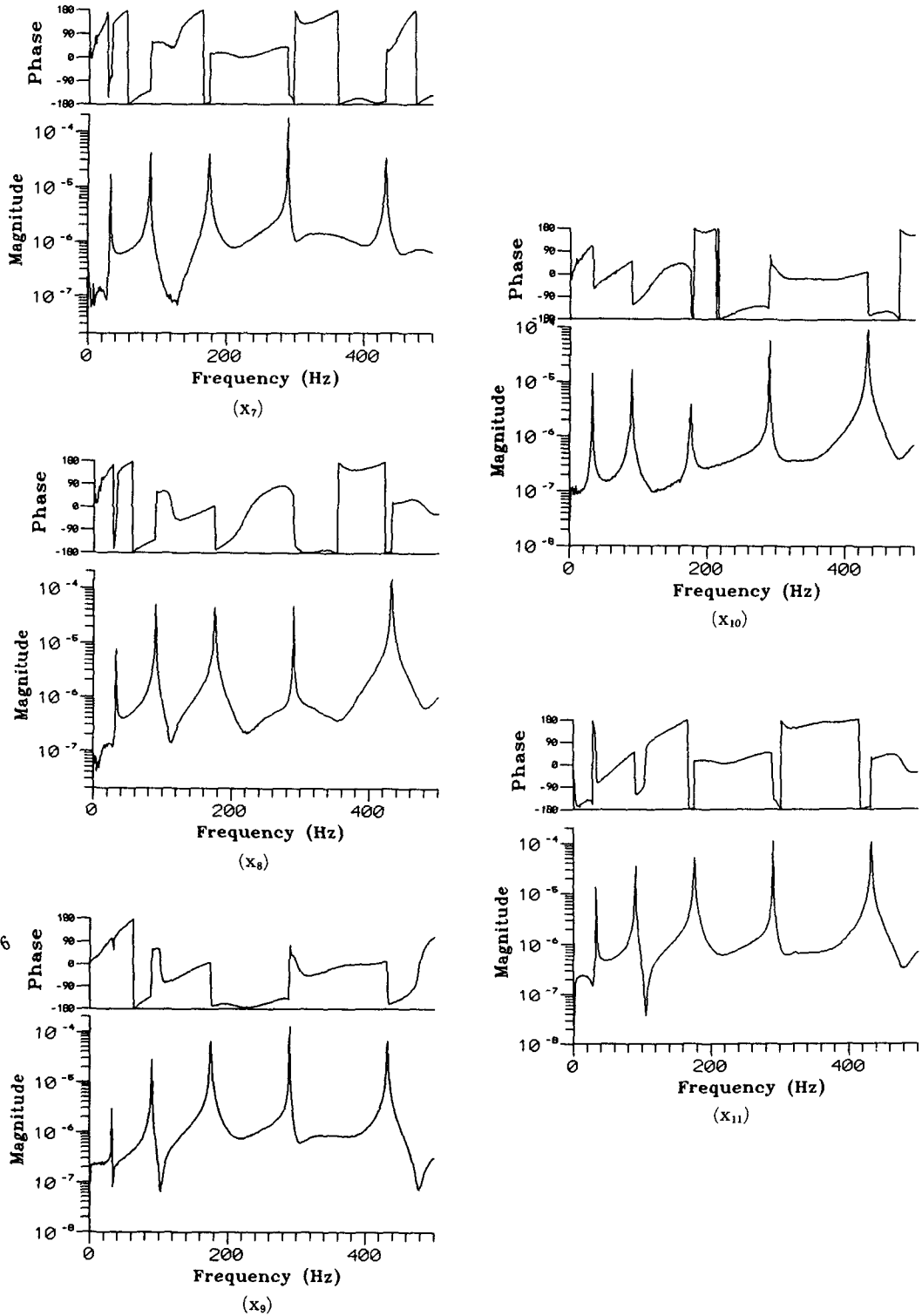


Fig. 4 Bode diagram of vibration response in terms of cross spectral dsensity functions at each node(from node 7 to node 11 clockwise starting bottom left)

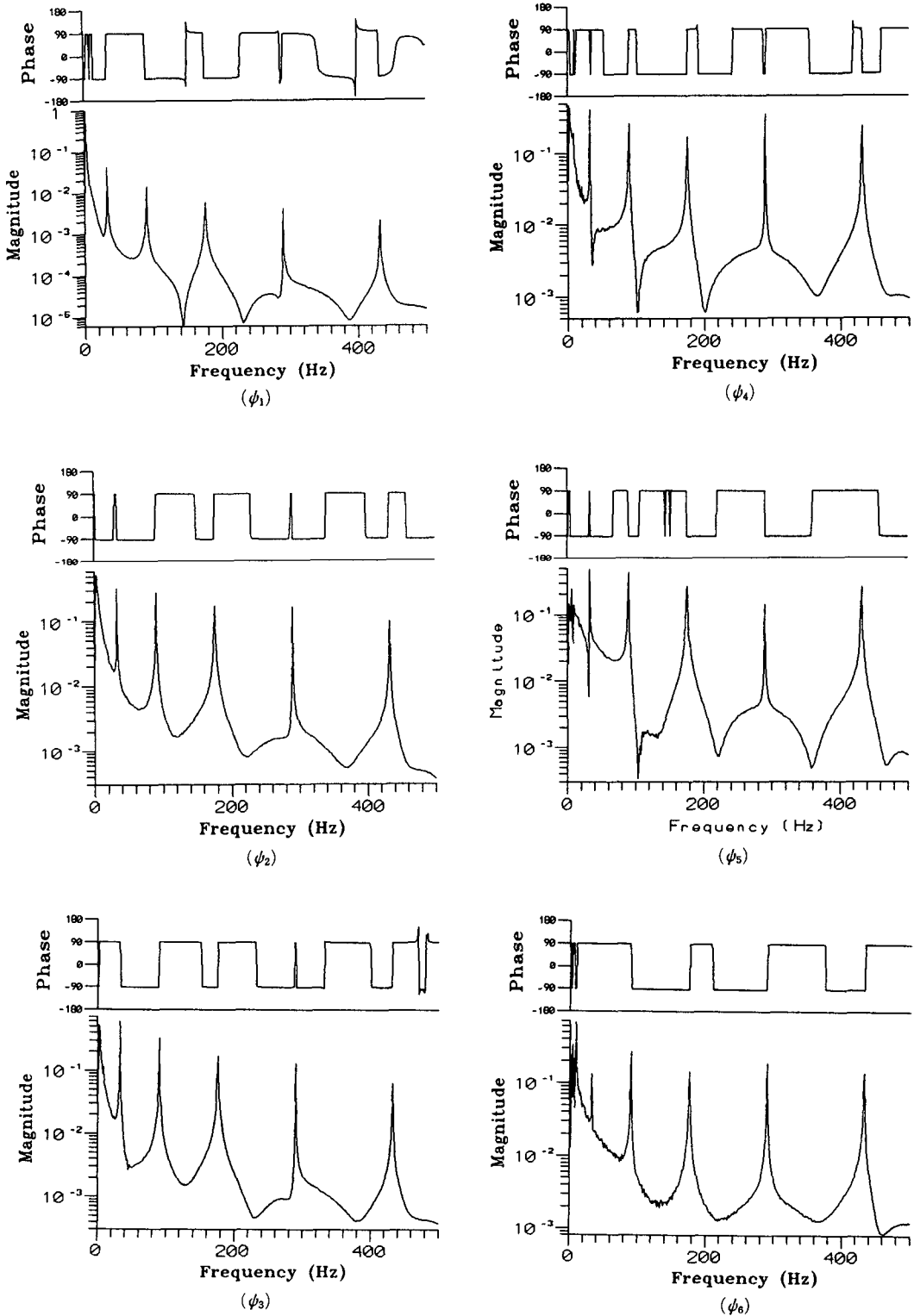


Fig.5 Continued (from ψ_1 to ψ_6 clockwise starting bntom left)

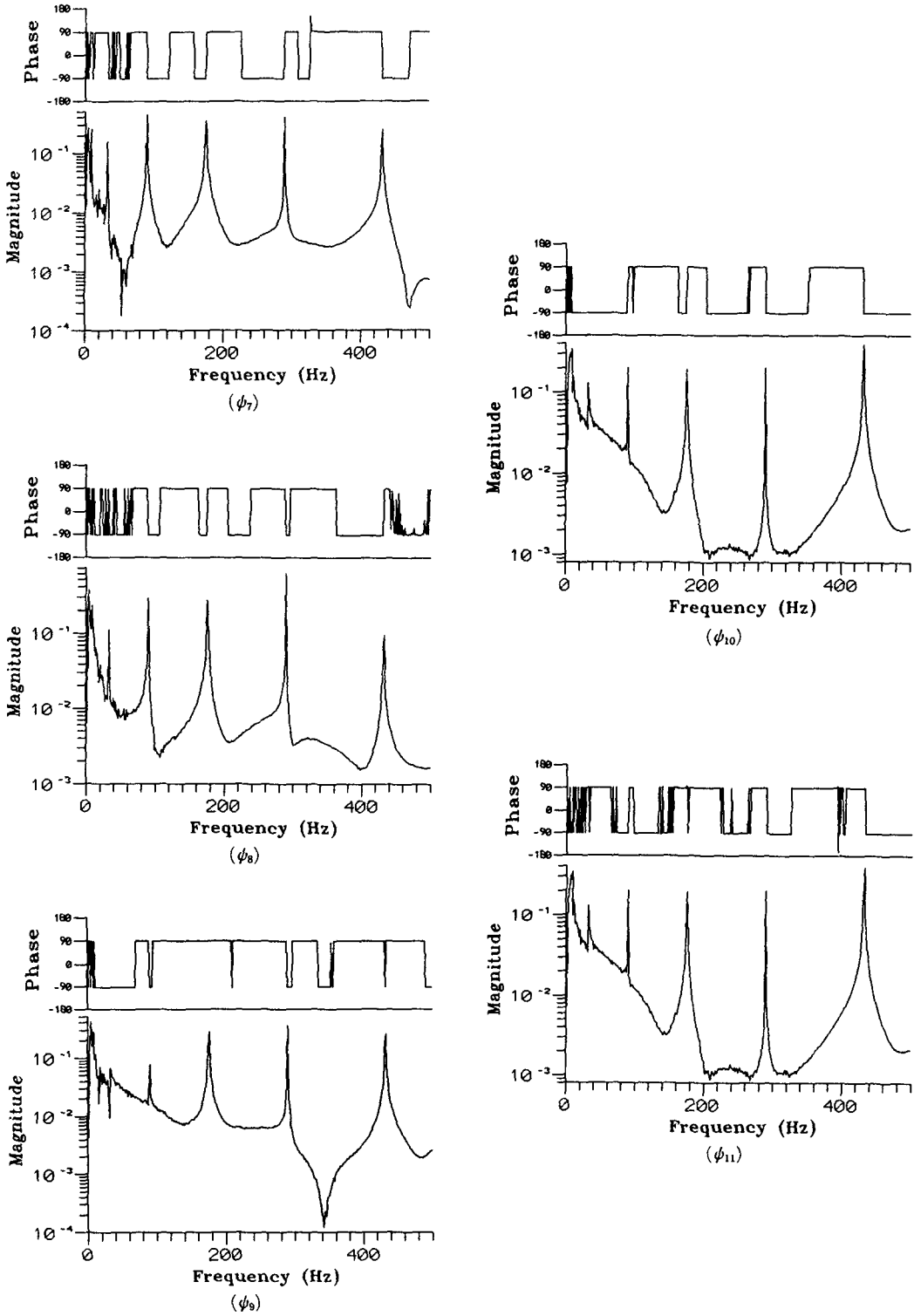


Fig. 5 Bode diagram of frequency domain basis vectors in terms of displacement type vibration response (from ψ_7 to ψ_{11} clockwise starting bottom left)

하나의 절점에 가해지는 기진력에 대한 11개 절점의 진동응답으로 간주하였다.

따라서, 식(8) 및 식(10)~(29)에서 감쇠행렬 추출에 사용되는 $X(\omega)$ 는 변위로 주어진 진동응답 $x(t)$ 의 Fourier transform이지만 본 실험에서는 위와 같이 구한 각각의 진동응답과 기진력 사이의 위상을 고려해 주기 위해 기진력과 진동응답 사이의 상호 스펙트럼 밀도함수를 $X(\omega)$ 로 사용하였다.

4. 결과 및 고찰

4.1 주파수영역 직교 기본벡터의 추출

Fig. 4에 보의 절점 1번에서 충격력 형태의 기진력이 주어졌을 때 11개 절점에서의 진동 응답이 기진력과 진동응답 사이의 상호 스펙트럼 밀도함수의 형태로 주어져 있다. 좌측 하단으로부터 시계방향으로 절점번호 1번에서부터 절점번호 6번까지의 진동응답이 첫번째 페이지, 그리고 절점번호 7번에서 절점번호 11번까지의 진동응답이 두번째 페이지로 나누어져 있다. 각각의 그림의 하단은 상호 스펙트럼 밀도함수의 절대값(magnitude)을 나타내며, 상단은 위상각(phase)을 나타낸다. Fig. 4는, 일반적으로 많이 접할 수 있는 주파수 응답함수의 형태와 흡사한데, 이는 충격형 또는 랜덤신호 형태의 기진력에 대해서는 이들 양자가 절대값의 크기만을 제외하고는 거의 동일하기 때문이다. 위 그림으로부터 제측주파수 범위(0~500 Hz) 내에서는 주어진 보의 고유진동수가 5개이며, 이들 함수를 이용하여 추출할 수 있는 보의 고유 진동형은 5개라는 사실을 익히 알 수 있다.

그 이유는, 이들 주파수영역의 벡터로 정의된 각 함수들을 통하여 추출해 낼 수 있는 보의 고유 진동모드는 5개가 최대이며, 이론상 5개의 주파수 영역 벡터만 있으면 임의의 절점에 해당하는 진동응답을 이들 진동모드 함수의 선형 조합으로 구성해 낼 수 있기 때문이다.

Fig. 4에 주어진 11개의 상호 스펙트럼 밀도함수들로부터 수정된 Gram-Schmidt 직교화과정을 통하여 추출해 낸 주파수영역 직교 기본벡터들이 Fig. 5에 주어져 있다. 직교화과정에 사용된 각각의 상호 스펙트럼 밀도함수들은 401선의 주파수 해상도를 가진 주파수영역 함수들이므로 각각의 진동응답은 401개의 주파수 값에서 정의되는 자유도 401의 복소벡터들로 간주할 수 있다. 따라서, 이론

상 위의 진동응답함수들로부터는 모두 401개의 주파수영역 직교 기본벡터를 추출해 낼 수 있으나 주어진 실험결과를 이용하여 추출할 수 있는 전체 직교벡터의 수는 진동응답 제측의 수, 즉 실험적 모형의 자유도와 같은 11개 뿐이다.

이 주파수영역 직교 기본벡터들의 그림을 자세히 관찰하면 처음 6개의 기본벡터들은 원래의 상호 스펙트럼 밀도함수와 유사하게 각 공진점들의 위치와 위상의 변화를 뚜렷하게 파악할 수 있으나 차츰 고차로 갈수록 잡음성분이 섞이어 이들로부터 구조물의 진동에 관한 정보를 얻을 수 없게 됨을 알 수 있다. 즉, Fig. 5에 의하면 추출된 직교 기본벡터의 수가 6개 뿐이라는 사실을 알 수 있다. 우선, 고차의 직교 기본벡터들이 의미 없는 잡음 성분으로 구성되어 있다는 사실에 대한 설명은 앞에서 언급한 바와 같이 주어진 제측주파수 범위 내에서 표현할 수 있는 보의 고유 진동형은 5개이며, 따라서 각 모드의 선형 조합에 의해 진동응답을 기술할 수 있다면, 5개의 기본벡터만으로 보의 진동응답을 기술할 수 있기 때문이다. 문제는 5개의 기본 모드만이 내포되어 있는 진동응답으로부터 어떻게 하여 6개로 간주될 수 있는 기본벡터를 추출해 내었느냐는 것인데, 그이유는 실제 제측시 내포된 여러 잡음(noise) 성분들로 말미암아, 실제 구조물의 거동을 충분히 기술하기 위해서는 내포된 잡음성분의 효과까지 표현해 줄 수 있는 기본벡터의 개수가 추가로 더 필요한 것이라고 해석할 수 있다. Fig. 5에 주어진 주파수영역 기본벡터들은 변위(displacement) 형태로 주어진 상호 스펙트럼 밀도함수를 바탕으로 추출한 것이므로 첫번째 모드에서의 변위값이 다섯번째 모드에서의 변위값보다 월등히 크게 나타나 있다. 각 모드 간의 상대적 크기가 비교적 동일한가속도(acceleration)를 바탕으로 한 상호 스펙트럼 밀도함수로부터 추출된 기본벡터의 경우가 Fig. 6에 주어져 있는데, 이 그림에 의하면 6차 이상의 기본벡터는 거의 잡음성분에 의해 덮혀져 있다는 것을 확연히 알 수 있다. 추출된 상호 직교 기본벡터의 직교성을 검증한 결과의 일부가 Table 1에 주어져 있으며, 이 표의 결과는 각각의 기본벡터들 사이의 직교성이 주어진 수치계산 범위내에서 잘 보장된다는 것을 보여주고 있다.

4.2 감쇠행렬 추출결과

본 연구의 목적 중의 하나는 선형 진동계의 수학

적 모형상의 감쇠행렬을 실험결과로부터 추출해 내는 것이다. 즉, 일반적인 실험적 모드해석법에서 구해 내려고 하는 진동형 감쇠(modal damping)의 값이 아니라 수치적 이산화 모형상에서 정의되는 감쇠행렬의 각 요소를 등가의 실험치로 대치시키는

것이다. 2장에서 제안된 방법을 따라 추출해 낸 감쇠행렬 값의 일부가 Table 2에 주어져 있다. 본 실험에서 정의된 구조물의 자유도는 11이므로 총 121개(11×11)의 감쇠행렬 요소 값이 정의된다.

이 경우 역시 이론상, 주어진 구조물이 균질보이

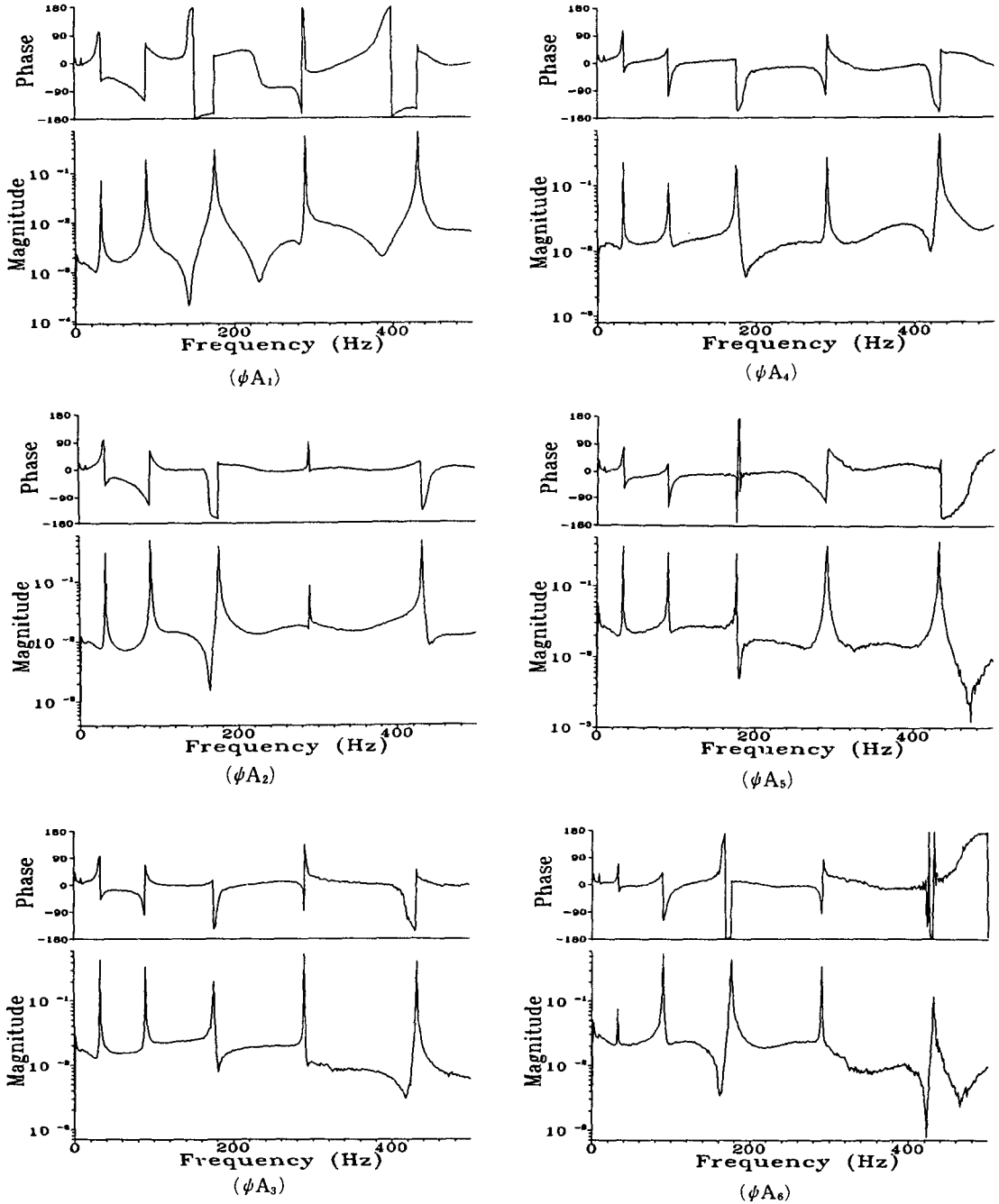


Fig. 6 Continued (from ψA_1 to ψA_6 clockwise starting bottom left)

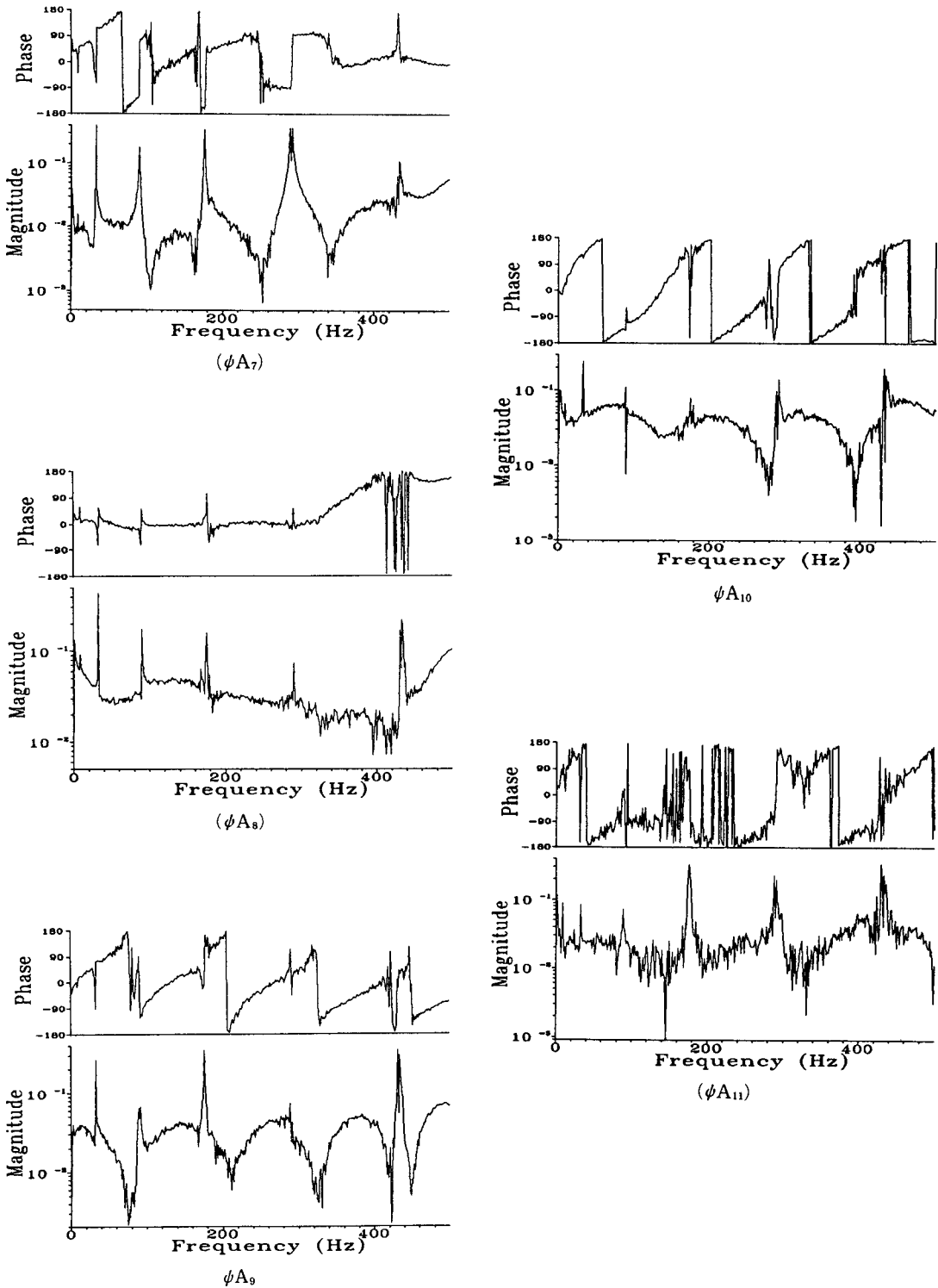


Fig. 6 Bode diagram of frequency domain basis vectors in terms of acceleration type vibration response (from ψA_7 to ψA_{11} clockwise starting bottom left) (Continued)

Table 1 Part of the orthogonality calculation result for the frequency domain complex vectors using vibration responses given in Fig. 5.

| i | j | $(\varphi_i(\omega) * \varphi_j(\omega))$ | $\ \varphi_i(\omega) * \varphi_j(\omega)\ $ |
|---|----|---|---|
| 1 | 1 | (1., 0.) | 1. |
| 1 | 2 | (-1.239E-13, 1.021E-13) | 1.605E-13 |
| 1 | 3 | (-7.720E-14, 8.082E-14) | 1.118E-13 |
| 1 | 4 | (3.286E-14, -3.019E-13) | 3.037E-13 |
| 1 | 5 | (3.150E-14, 2.188E-13) | 2.210E-13 |
| 1 | 6 | (-3.858E-13, -2.546E-13) | 4.622E-13 |
| 1 | 7 | (4.483E-13, -1.673E-13) | 4.785E-13 |
| 1 | 8 | (-3.204E-13, -2.831E-15) | 3.204E-13 |
| 1 | 9 | (-1.126E-13, -8.687E-14) | 1.422E-13 |
| 1 | 10 | (3.915E-13, 2.498E-14) | 3.923E-13 |
| 1 | 11 | (-2.200E-12, 1.702E-12) | 2.784E-12 |
| 2 | 1 | (-1.239E-13, -1.021E-13) | 1.605E-13 |
| 2 | 2 | (1., 0.) | 1. |
| 2 | 3 | (-3.552E-15, 1.110E-15) | 3.722E-15 |
| 2 | 4 | (5.773E-15, -1.776E-15) | 6.042E-15 |
| 2 | 5 | (-7.105E-15, 2.886E-15) | 7.662E-15 |
| 2 | 6 | (1.887E-14, -6.217E-15) | 1.977E-14 |

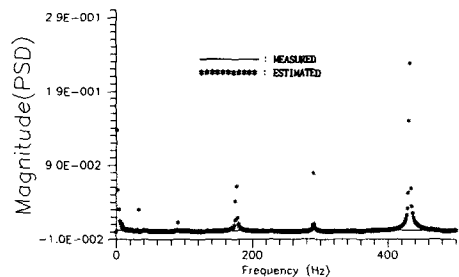
므로 그에 해당하는 감쇠계수의 값도 질량행렬 또는 강성행렬의 요소와 같이 대각선 행렬 또는 대칭행렬의 형태로 주어져야 할 것이다. 그러나, 실험 결과를 이용하여 추출된 감쇠행렬의 값들에서는 이러한 특징을 전혀 발견해 낼 수가 없다. 그 이유는, 실험결과로부터 추출된 감쇠행렬은 이론적으로 산정된 질량 및 강성행렬과, 주어진 계의 실제 거동 결과를 가장 이상적으로 연결시켜주는 등가의 수치일 뿐이며, 실제 해석 상에서 정의되는 균질보의 성격을 반영하지 않고 있다고 보면 된다.

4.3 가진력의 추정

주파수영역에서의 가진력을 계산하기 위하여 이론적으로 계산된 질량 및 강성행렬, 그리고 주어진 충격력에 대한 보의 자유도에 해당되는 개수의 진동응답 결과를 식(30)에 대입하여 계산된 결과를

Table 2 Parts of elements of extracted damping matrix

| i | j | Real | Imaginary |
|---|----|-----------|-----------|
| 1 | 1 | -0.92E+03 | -0.10E+04 |
| 1 | 2 | 0.75E+03 | 0.15E+04 |
| 1 | 3 | -0.39E+03 | -0.49E+03 |
| 1 | 4 | -0.18E+03 | -0.78E+03 |
| 1 | 5 | -0.21E+03 | 0.16E+04 |
| 1 | 6 | 0.91E+03 | -0.50E+02 |
| 1 | 7 | -0.11E+04 | -0.11E+04 |
| 1 | 8 | 0.32E+03 | 0.16E+04 |
| 1 | 9 | 0.12E+03 | 0.67E+03 |
| 1 | 10 | -0.19E+04 | -0.19E+04 |
| 1 | 11 | 0.16E+04 | 0.20E+04 |
| 2 | 1 | -0.93E+03 | -0.10E+04 |
| 2 | 2 | 0.75E+03 | 0.15E+04 |
| 3 | 3 | -0.39E+03 | -0.49E+03 |
| 4 | 4 | -0.18E+03 | -0.78E+03 |
| 5 | 5 | -0.21E+03 | 0.16E+04 |
| 6 | 6 | 0.91E+03 | -0.49E+02 |



(— : PSD function of measured force)
 (*** : PSD function of estimated force)

Fig. 7 Comparison of measured and estimated force in terms of Power Spectral Density(PSD) function

자기주파수 밀도함수의 형태로 그리고 실제 계에 가해진 가진력과 비교한 것이 Fig. 6에 나타나 있다. 이 그림에서 보는 바와 같이 추정된 힘의 크기

는 특정주파수 부근을 제외하고는 진 주파수 내에서 비교적 계측된 실제 힘의 크기와 잘 일치함을 보여주고 있다. 이 주파수 값들은 보의 고유진동수에 해당하는 점이라는 것을 쉽게 알 수 있다. 즉, 공진주파수에서의 기진력의 추정이 몹시 불만스러운 것을 알 수 있는데, 그 이유는 다음과 같이 설명할 수 있다.

첫째, 주어진 진동 계측결과에 의해 나타난 고유진동수 값들은 식(30)의 처리 과정에서 사용된 질량 및 강성행렬에 의해 계산된 구조물의 이론적 고유진동수와는 그 값이 다르다는 것이다. 즉, 식(11)의 좌변으로 표시되는 진동응답은 이론적 고유진동수와 실제 계측결과에 의한 고유진동수의 혼합된 효과가 반영된 것이라는 점이다. 따라서, 공진주파수 부근에서의 기진력 추정이 불완전한 이유는 고유진동수의 이론치와 실측치와의 괴리로부터 기인한다고 볼 수 있다. 이러한 문제점의 해결책은 식(11)에 사용되는 질량 및 강성행렬의 값을 수치적 모형에 근거한 이론치가 아니라 이들 역시 실제계의 거동을 바탕으로 한 실측치를 사용해야 한다는 것이다. 그러나, 실험결과로부터 질량 및 강성행렬을 추출하는 문제는 향후 실험기법 및 이론적 근거가 더 확립되어야 할 또 다른 분야이다.

둘째, FFT 연산 프로그램을 근거로한 신호분석기 고유의 문제점으로서, 한정된 시간영역 신호를 근거로 계산된 각종 주파수영역 함수들은 해상도(resolution)의 제약에서 야기되는 각종 편향오차(bias error)를 가지게 되며 이러한 편향오차는 신호/잡음비(signal/noise ratio)가 낮은 공진주파수 부근에서 두드러지게 나타나게 된다. 따라서, 주어진 구조물의 진동응답함수들을 고려해 볼 때 특정 절점에서 얻은 진동응답의 크기는 다른 절점에서의 진동응답에 비해 지나치게 크게 나타나든가 아니면 지나치게 작게 나타나게 됨으로서 이들 진동응답들의 크기를 규정지어 주는 모형들 사이에 존재하는 일관성이 상실된다는 점이다. 이는 진동 계측상의 불완전에서 기인하는 문제점으로 이의 해결을 위한 차후 연구의 필요가 있다. 공진주파수 대에서의 편향 오차로 인한 문제점의 해결책으로, 확대측정법(zoom measurement)을 사용하여 공진주파수 부근의 해상도를 증가시킨 측정을 행한 뒤 이 계측결과와 기존의 계측결과를 합성하여 만들어진 진동응답함수를 사용하면 보다 만족스러운 결과를 얻을 것으로 본다.

5. 결 론

주어진 선형계의 수학적 모형과 실제 진동 계측 결과를 병용하여 진동을 야기시킨 기진력을 추정하고자 하는 방법을 제시하였다. 일반적인 모드해석법 상에서 사용되는 주파수 응답함수행렬의 역을 이용한 방법이 수치적으로 불안정하다는 단점이 있다는 사실에 주목하여, 본 연구는 수학적 모형으로부터 정의된 질량 및 강성행렬과 진동응답으로부터 추출된 감쇠행렬을 결합하여 행렬의 역을 구하지 않고 직접적으로 기진력을 추정하는 방법을 사용하였다. 주파수영역에서의 계의 진동응답을 표현할 수 있는 주파수영역 상호 직교 기본벡터의 추출을 시도하였고 추출된 상호 직교 기본벡터는 다양한 진동 모형들 간의 연계 작업에 효과적으로 사용될 수 있다.

본 연구로부터 얻은 결론을 요약하면 다음과 같다.

(1) 주파수영역에서 얻어진 계의 진동응답은 상호 직교하는 주파수영역 기본벡터들의 선형합으로 표시할 수 있으며, 역으로 측정된 진동응답으로부터 이에 대응하는 주파수영역 상호 직교 기본벡터들을 추출해 낼 수 있다. 이렇게 추출된 주파수 영역상호 직교 기본벡터들은 공간좌표로 주어지는 모드 벡터(modal vector)와 마찬가지로 계의 진동특성을 대표하는 기본 모드로 사용될 수 있다.

(2) 실제 계측된 계의 진동응답을 충실히 나타낼 수 있는 주파수영역 상호 직교 기본벡터의 수는 실험 모형에서 정의된 자유도 즉, 진동 계측점의 수와 같은 수만큼 추출해 낼 수 있으나, 이렇게 추출된 상호 직교 기본벡터들 중 계의 진동특성에 관한 정보를 보유하고 있는 벡터의 수는 측정주파수 범위 내에 포함되어 있는 진동모드의 수(고유진동수의 수)에 의해 제한을 받는다.

(3) 실험적으로 추출 및 산정된 감쇠행렬의 각 요소는 복소수로 나타나며, 이는 수학적 모형과 실험 결과를 가장 잘 결합시켜 주는 값들로 간주할 수 있다. 이와 같이 구한 감쇠계수의 값은 공간 좌표로 표시된 수학적 모형상의 감쇠계수로서 실험적으로 직접 구할 수 있는 모드감쇠(modal damping)와의 비교 및 연계에 사용될 수 있다.

(4) 추정된 기진력의 크기는 특정주파수 대를 제외하고는 과거 발표된 유사한 연구 보고에 비하여

비교적 만족할 만한 결과를 나타내고 있는데, 이 특정주파수 대는 해석 대상 구조물의 고유진동수에 해당한다는 사실을 알 수 있다. 가진력 추정에 대한 기존의 연구 결과들과 마찬가지로 본 연구에서도 고유진동수 부근에서 기진력의 추정이 불만족스러운 이유는 본 연구에서 시도된 수학적 모형으로부터 정의된 질량 및 강성행렬과 실제 구조물의 진동 특성을 반영하는 질량 및 강성행렬이 서로 다르다는 점, 진동응답 계측결과로부터의 감쇠 추정이 아직도 불완전하다는 점, 그리고 잡음신호의 영향으로 인하여 계측된 신호에서 추출할 수 있는 주파수영역 상호 직교 기본벡터의 수가 명확하게 정의되지 않는다는 점 등에 의한 것이라 판단되며 이의 시정을 위한 더 깊은 연구가 수행되어야 하겠다.

후 기

본 연구는 한국과학재단의 신진연구과제(과제번호 013-0910-018-2)의 지원을 받아 이루어졌다.

참고문헌

- (1) Bartlett, F. D. and Flannelly, W. G., 1979, "Modal Verification of Force Determination for Measuring Vibratory Loads," *J. Am. Helicopter Soc.*, Vol. 24, pp. 10~18.
- (2) Giansante, N., Jones, R. and Calapodas, N. J., 1983, "Determination of in Flight Helicopter Loads," *J. Am. Helicopter Soc.*, Vol. 27, pp. 58~64.
- (3) Ibrahim, S. R., 1989, "The Condition of Matrix Inversion in Modal Analysis," *Proceedings of IMAC 7*, Las Vegas, Nevada, pp. 307~312.
- (4) Dobson, B. J. and Dubowski, D. G., 1985, "Computation of Excitation Forces Using Structural Response Data," *Proceeding of Fifty-sixth Symposium on Shock and Vibration*, Monterey California.
- (5) Dobson, B. J. and Rider, E., 1990, "A Review of the Indirect Calculation of Excitation Force from Measured Structural Response Data." *Proc Instn Mech Engrs*, Vol. 204.
- (6) Kinns, R., 1979, "The Deduction of Bearing Forces in Rotating Machinery," *Proceeding of The Euromech Colloquim 122 on The Numerical Analysis of the Dynamics of Ship Structures*, Ecole Polytechnique, Paris, 3~5, pp. 345~361.
- (7) Kinns, R., McColl, J. H. and McKinstry, J., 1983, "Use of Forced Response Measurements for the Estimation of Machine Source Properties," *Proceedings of Internoise*, Edinburgh, pp. 475~478.
- (8) Fabunmi, J. A., 1989, "Effects of Structural Modes on Vibration Force Determination by the Pseudo-Inverse Technique," *AIAA J*, pp. 504~509.
- (9) Liang, Z. and Inman, D. J., 1988, "A Tutorial on Matrix Inversion in Time Domain Modal Analysis," *Proceedings of IMAC 7*, Las Vegas, Nevada, pp. 324~330.
- (10) Okubo, N., Tanabe, S. and Tatsuno, 1985, "Identification of Forces Generated by a Machine Under Operating Conditions." *Proceeding of IMAC 3*, Orlando, Florida, pp. 920~927.
- (11) Chan, S. P., Cox, H. L. and Benfield, W. A., 1962, "Transient Analysis of Forced Vibration of Complex Structural-Mechanical System," *J. R. Aeronaut. Soc.*, Vol. 66, pp. 457~460.
- (12) Han, S. and McConnell, K. G., 1990, "Measuring True Acceleration Vectors with Tri-Axial Accelerometers," *Experimental Techniques*, Vol. 14, No. 3, pp. 36~40.
- (13) Han, S. and McConnell, K. G., 1989, "The Effect of Transducer Cross-Axis Sensitivity in Modal Analysis," *Proceeding of IMAC 7*, Las Vegas, Nevada, pp. 505~511.
- (14) McConnell, K. G. and Han, S., 1986, "The Effect of Mass on Force Transducer Sensitivity," *Experimenter Techniques*, Vol. 10, No.7, pp. 19~22.
- (15) Hallauer, Jr. W. L. and Franck, A., 1979, "On Determining the Number of Dominant Modes in Sinusoidal Response," *Shock and Vibration Bulletin* 49, pp. 19~34.
- (16) Febunmi, J., Chang, P. and Vorwald, J., 1988, "Damping Matrix Identification Using the Spectral Basis Technique," *Transaction of the ASME*, Vol. 110, pp. 332~337.