

〈論 文〉

강성 구속기계계의 해법에 관한 연구

한형석* · 박태원**

(1994년 6월 20일 접수)

A Study on Numerical Solution Methods in Stiff Constrained Mechanical Systems

Hyung Suk Han and Tae Won Park

Key Words : Constrained Mechanical Systems(구속기계계), Stiff System(강성계), DAE(미분-대수 방정식), ODE(상미분방정식), Stiffness(강성도)

Abstract

In this paper, integration methods for stiff constrained mechanical systems are studied to analyze dynamic response of the stiff mechanical system efficiently. The stiff, non-stiff systems are identified by using eigenvalues of the Jacobian of the systems. To integrate both stiff system and non-stiff system efficiently a new switching method between the non-stiff differential equation solver and the stiff differential equation solver is presented.

1. 서 론

컴퓨터의 발달로 인하여 구속기계계에 대한 동역학 운동방정식을 자동적으로 유도하고 해를 구하는 알고리즘들이 발전되었다. 구속기계계의 동역학 해석을 하려면 운동을 나타내는 미분방정식의 해를 구하고 또한 구속조건들을 만족시켜야 한다. 이들 방정식은 DAE(differential-algebraic equations)⁽¹⁾으로 알려져 있으며 현재 몇가지의 DAE해법들이 제안되어 있다.^(2~5) 만일 방정식이 비강성계(non-stiff system)이면 이제까지의 해법들이 비교적 잘 적용이 된다. 첫째 방법은 미분방정식과 구속방정식에 모든 일반좌표계에 대하여 강성계 해법인 BDF(backward differentiation formula)를 직접 적용하는 방법이다.⁽²⁾ 둘째 방법은 일반좌표 중 독립좌표와 종속좌표를 국소적으로 구한 후 독립좌표는 비강성해법을 적용하여 적분을 수행하고 종속좌

표들은 구속방정식과 속도방정식에 반복법을 적용하여 종속좌표의 속도와 변위를 구한다.⁽³⁾ 이 해법을 GCP(generalized coordinate partitioning method)라 한다. 셋째로는 구속방정식과 속도방정식을 가속도방정식에 첨가하여 직접 적분을 수행하는 CSM(constrained stabilization method)가 있다.⁽⁴⁾ 넷째로는 구속방정식, 속도방정식, 가속도방정식을 운동방정식에 모두 첨가한 우결정 비선형계(overdetermined nonlinear system)를 이용하는 해법이 제시되었다.⁽⁵⁾

이상의 해법들은 미분방정식이 비강성계(non-stiff system)이면 잘 적용이 되나 강성계(stiff system)이면 불안정성을 나타낸다.⁽⁶⁾ 강성계란 변위의 지수형태식에서 매우 다른 시상수를 갖는 계를 말하며 기계계에서는 일반적으로 과도감쇠, 강스프링이 포함될 때 강성계의 특성을 보이게 되는 것으로 알려져 있다. 또한 기계계내의 변수들의 주파수 차이가 아주 많이 날때 수치해석적으로 강성계의 현상이 나타난다. 상미분방정식에 있어서의 강성계에 적분법들을 적용했을 때의 특성은 이미

*정회원, 아주대학교 대학원 기계공학과

**정회원, 아주대학교 생산자동화공학과

잘 알려져 있으나 구속기계에 나타나는 강성계에 대하여는 잘 알려져 있지 않다. 강성계에 대하여는 수학적으로 잘 정의되어 있으나 구속기계에서의 강성계에 대하여는 명확히 정의되어 있지 않다.

본 연구에서는 구속기계에 있어서 비강성계와 강성계를 판단하는 기준을 제시하고 2가지의 예제에 대하여 해법들을 적용하였다. 적용결과를 이용하여 강성계를 판단하는 기준을 설정하고 설정된 기준을 이용하여 구속기계의 해석시 강성계와 비강성계를 자동적으로 판별하고 판별결과에 따라서 해법을 변환함으로써 모든 구속기계를 효율적으로 해석하는 방법과 결과를 제시한다. 본 연구에 이용되는 DAE 해법은 가장 안정되었다고 알려진 GCP를 사용하였고 비강성계의 해법으로는 비강성계에 적합한 PECE⁽⁷⁾를 사용하였고 또한 강성계의 적분은 BDF⁽⁸⁾법을 사용하였다.

2. 강성계의 정의

2.1 강성계

강성계(stiff system)를 정의하기 위하여 일반적인 선형계수문제 (1)을 예로 들면

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y} + \boldsymbol{\phi}(x), \quad \mathbf{y}, \boldsymbol{\phi} \in \mathbb{R}^m \quad (1)$$

\mathbf{A} 는 $m \times m$ 행렬이고 \mathbf{A} 의 고유치는 $\lambda_t, t=1, 2, \dots, m$ 이라 하고 그에 대한 고유벡터가 $\mathbf{c}_t, t=1, 2, \dots, m$ 이라 하면 (1)식의 일반해는 (2)식으로 표시된다. (2)식에서 $\boldsymbol{\psi}(x)$ 는 특수적분(particular integral)이다.

$$\mathbf{y}(x) = \sum_{t=1}^m K_t \exp(\lambda_t x) \mathbf{c}_t + \boldsymbol{\psi}(x) \quad (2)$$

여기서, 식(3)을 만족하면 (1)을 강성계(stiff system)라고 정의한다. 여기서, S 를 강성도율(stiffness ration)이라고 하고 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned} Re\lambda_t < 0, \quad t=1, 2, \dots, m \\ (\max_t |Re\lambda_t|) / (\min_t |Re\lambda_t|) = S \gg 1 \end{aligned} \quad (3)$$

즉, 미분방정식의 해들의 시간상수의 크기가 넓은 범위에 분포하여 시간에 대하여 빠르게 변하는 변수와 느리게 변하는 변수가 있는 계를 말하는 것이다. 비선형계 $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(x, \mathbf{y})$ 는 $\mathbf{f}(x, \mathbf{y})$ 의 자코비안 $\partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{y}$ 의 고유치를 이용한다. 예를들어 다음과 같은 미분방정식이 있다고 가정한다.

$$\dot{y}_1 = 998y_1 + 1998y_2$$

Table 1 The solutions by using the Euler method

Solution h	y1	y2
Exact	3.960063136062115	-1.979963468121192
h=0.01	30.959999330341820	-28.979999329894780
h=0.0001	3.960117671546983	-1.980018993663977
h=0.000001	3.960063795254293	-1.979964137606469

$$\dot{y}_2 = -999y_1 - 1999y_2 \quad (4)$$

이 계의 고유치는 -1 과 -1000 이다. 만일 초기치가 $y_1(0) = y_2(0) = 1$ 이라면 해는 식(5)와 같다.

$$\begin{aligned} y_1 &= 4e^{-t} - 3e^{-1000t} \\ y_2 &= -2e^{-t} + 3e^{-1000t} \end{aligned} \quad (5)$$

이 방정식에 가장 간단한 적분법인 Euler method를 적용하면 식(6)과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \dot{y}_{1(n+1)} &= y_{1(n)} + h(99y_{1(n)} + 1998y_{2(n)}) \\ \dot{y}_{2(n+1)} &= y_{2(n)} + h(-999y_{1(n)} - 1999y_{2(n)}) \end{aligned} \quad (6)$$

만일 초기치가 $y_1(0) = y_2(0) = 1$ 이고 $h=0.01$ 일 때의 정확한 해와 식(6)을 이용하여 적분하였을 때의 결과는 Table 1과 같다.

Table 1에서 볼 수 있듯이 $h=0.01$ 이면 해의 차이가 많이 나는 것을 볼 수 있으며 적분을 몇단계 수행하면 안정성을 보장할 수 없게 된다. 반면에 h 가 작을수록 정확한 해에 접근하는 것을 볼 수 있다. 그런데 식 (7)과 같은 미분방정식에서는 h 가 감소하여도 해에 수렴하지 않는 것을 볼 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= 998y_1 + 1000998y_2 \\ \dot{y}_2 &= -999y_1 - 1000999y_2 \end{aligned} \quad (7)$$

(7)식의 고유치는 -1 과 -1000000 이다. 식(7)에 식(6)과 같은 Euler method를 이용하여 적분했을 때의 결과가 Table 2에 나타나 있다. Table 2에서 볼 수 있듯이 h 가 감소하여도 정확한 해에 수렴하지 못하는 것을 볼 수 있다. 그러므로 강성계에 대하여는 강성계에 맞는 해법이 필요함을 알 수 있다. 일반적으로 h 를 감소시킬수록 정확한 해를 구할 수 있으나 h 가 감소함에 따라 계산 횟수가 많아지므로 끝처리한오차(round-off error), 중단오차(discretization error)가 증가하여 안정성(stability)을 보장하지 못하게 되는 것이다. 그러므로 식(4)와 같은 문제의 적분은 초기 과도응답상태에서는

Table 2 The solutions by using the Euler method

h \ Solution	y1	y2
Exact	3.960199335881846	-1.980099667940923
h=0.01	10020.959776036440000	-10018.97977603599
h=0.0001	-3.667627387418176E199	3.667627387418176E199
h=0.000001	1.982077791839361	-1.978121536111712E-3

h 를 감소시키고 안정상태에서는 h 를 증가시키는 것이다.

2.2 강성계의 판별

일반적인 초기치문제 (8)이 유일한 해를 가지려면 $f(x, y)$ 는 미분가능하고 Lipschitz 조건이라 불리는 식(9)을 만족해야 한다.

$$\dot{y} = f(x, y), \quad a \leq x \leq b$$

$$y(a) = A \quad (8)$$

$$\|f(x, u) - f(x, v)\| \leq L\|u - v\| \quad (9)$$

여기서, 상수 L 은 Lipschitz 상수라고 부른다. 일반적인 초기치 문제들은 L 이 크지 않은 영역에 속한다. 그런데 만일 L 이 크면 기존의 해법들은 해법에 이용된 공식의 구조상 안정성을 보장하기 위하여 적분간격 h 의 크기를 제한해야 한다. Lipschitz 상수 L 이 크다는 것은 식(8)의 해중에 상대적으로 빠르게 변하는 변수가 포함되어 있다는 의미이다. 기존의 ODE 해법들이 해에 수렴하려면 $hL < \tau$ 조건을 만족해야 한다. 여기서, τ 는 해법들에 따른 상수이다. Lipschitz 상수 $L = h\rho(f_y)$ 로 정의하며 $\rho(f_y)$ 는 행렬 f_y 의 스펙트럼반경(spectral radius)이다. 본 연구에서는 L 이 매우 큰 경우 즉 강성계에 대하여 고려하며 L 이 매우 커서 h 를 제약하는 것은 강성계의 복잡한 현상중에 하나이다. 강성계를 안정하게 적분하기 위하여 고안된 해법들은 BDF와 같은 음적공식(implicit function)을 반복법을 이용하여 해를 구함으로써 적분을 수행한다. 음적공식은 양적공식(explicit function)을 이용하는 해법에 비하여 안정성영역(stability region)이 넓다는 장점을 가지고 있다. 예를 들어 Explicit Runge-Kutta법은 한정된 안정성영역을 가지는 반면 6차 이내의 BDF는 비한정성영역(infinite absolute stability region)을 갖는 것으로 알려져 있다.

그러므로 강성도는 사용하는 해법에도 관계가 있다. 음적공식은 안정성영역이 넓은 반면에 반복법을 이용하기 때문에 $f(x, y)$ 에 대한 Jacobian을 매 단계에서 구하기 위하여 $f(x, y)$ 를 변수의 숫자만큼 계산해야 하는 단점이 있다. 그러므로 비강성계의 적분에 있어서는 양적공식이 음적공식보다 효율적이라 할 수 있다. Lipschitz의 값에 따라서 안정성과 정확성을 보장하기 위하여 h 의 크기를 제어해야 한다. 이를 통하여 강성도는 Lipschitz 상수 L 과 직접적인 관계가 있는 것을 알 수 있다. 강성도는 복합적인 현상이기 때문에 강성계를 판별한다는 것은 어려운 문제이며 더우기 강성계의 기준이 명확하지 않다는데 어려움이 있다. ODE에 대한 전통적인 강성계 판별법은 비강성계 해법인 PECE, Runge-Kutta와 강성계해법인 BDF를 동일한 문제에 적용한 후 효율을 비교하여 BDF가 효율적이면 강성계로 정의하는 방법이 널리 이용된다.⁽⁹⁾

구속기계계에 있어서는 ODE보다 더욱 복잡하고 어렵다. 구속기계계의 방정식은 비선형이고 제어시스템이 첨가되면 시간에 따라 시스템의 상태가 변하고 또한 GCP 해법에 있어서 독립변수도 상황에 따라 변하기 때문에 복잡하고 어렵다. 본 연구에서는 구속기계계에서 강성구속기계계를 판별하는 기준을 정립하기 위하여 Lipschitz 상수 L 과 강성계, 비강성계 해법들의 효율과의 관계를 구하고자 한다. 이를 수행하기 위하여 일정한 간격으로 GCP에서 구한 독립변수들만에 대한 선형화를 실시한다. 구속기계계에 대한 선형화는 Taylor 확장공식을 이용한다.⁽¹¹⁾ 선형화가 되면 선형계수에 대한 고유치(eigenvalues)들을 구하고 고유치들 중 최대치를 L 로 정한다. 동시에 매구간마다 PECE와 BDF의 계산시간 결과를 확인한다. 그리하여 L 의 값에 따라서 PECE와 BDF의 계산시간 결과와의

관계성을 구한다. 만일 L 이 매우 큰 어느 시점에서 PECE가 BDF보다 느리게 되면 그 때를 시스템이 강성계가 되었다고 하고자 한다. 실험적으로 구속기계계에 있어서 강성구속기계계에 대한 L 의 값을 설정하고자 한다. 만일 L 이 선정되면 구속기계계의 해석시 구간마다 L 을 확인하여 L 이 강성계로 설정된 L 보다 작으면 PECE로 해석하고 만일 L 이 강성계로 설정된 L 보다 크면 BDF로 변환함으로써 전구간에 있어서 안정성을 보장하며 계산시간도 감소시킬 수 있을 것으로 기대된다.

3. 구속기계계의 해법

nb 개의 강체와 n 개의 일반좌표 q 를 갖는 구속기계계에 대한 운동방정식을 유도하기 위하여 m 개의 구속방정식을 식(10)과 같이 정의한다.

$$\Phi(q, t) = 0 \quad (10)$$

이 구속식은 일반좌표의 속도와 가속도 조건도 만족시켜야 함으로 다음 식(11), (12)도 만족해야 한다.

$$\dot{\Phi}(q, t) = \Phi_q \dot{q} + \Phi_t = 0 \quad (11)$$

$$\ddot{\Phi}(q, t) = \Phi_q \ddot{q} + (\Phi_{qq})_q \dot{q} \dot{q} + 2\Phi_{qt} \dot{q} + \Phi_{tt} = 0 \quad (12)$$

윗식을 사용하기 편리하게 정리하여 쓰면 식(13), (14)과 같다.

$$\Phi_q \dot{q} = -\Phi_t = v$$

$$\Phi_q \ddot{q} = -(\Phi_{qq})_q \dot{q} \dot{q} - 2\Phi_{qt} \dot{q} - \Phi_{tt} = \gamma \quad (13)$$

Lagrange 승수(multiplier) 이론을 이용하여 구속기계계의 운동방정식을 식(15)와 같이 유도할 수 있다.⁽¹¹⁾

$$M\ddot{q} + \Phi_q^T \lambda = Q \quad (15)$$

여기서, M 은 계의 질량행렬이고 Φ_q 는 구속조건에 대한 편미분항인 자코비안행렬이고 λ 는 Lagrange 승수, 그리고 Q 는 외력이다. 식(15)의 일반좌표는 구속조건을 만족해야 하기 때문에 식(10), (11)들을 동시에 풀어주어야 하며 행렬식으로 식(16)와 같이 표시할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} M_q & \Phi_q^T \\ \Phi_q & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q \\ \gamma \end{bmatrix} \quad (16)$$

구속기계계를 해석하기 위한 식(16)에는 미분변수 \ddot{q} 와 대수방정식에 의해 구해지는 변수 λ 가 복합되

어 있으므로 이 방정식을 DAE 방정식이라 한다. DAE는 미분방정식과 대수방정식을 만족해야 하는 어려움이 있기 때문에 DAE의 해법은 일반 미분방정식의 해법과는 다르다. 구속기계계를 해석하려면 최종적으로 이 DAE를 풀어야 하며 DAE를 효과적으로 풀어야 구속기계계에 대한 정확한 해석을 할 수 있다. 현재 제안되어 있는 DAE 해법들은 참고 문헌 (2), (3), (4), (5)와 같다. 본 연구에서는 오차 제어의 장점을 가지는 GCP를 이용한다.

3.1 GCP

GCP(generalized coordinate partitioning)는 적분단계마다 구속방정식, 속도방정식에 대한 오차를 제어하는 장점을 가지고 있다. 이 해법은 일반좌표 q 가 독립이 아니라는 특성을 이용한다. 일반좌표 q 가 n 개의 변수를 갖고 m 개의 구속식을 갖는다면 q 는 $n-m$ 개의 독립변수 v 와 종속변수 u 로 나눌 수 있다. 즉 일반좌표 $q = [u, v]^T$ 이고 속도좌표 $\dot{q} = [\dot{u}, \dot{v}]^T$ 로 쓸 수 있다. m 개의 구속식이 독립이라고 하면 $\Phi(q, t) = 0$ 의 자코비안 $\Phi_q = \partial\Phi/\partial q$ 는 full row rank를 가진다. 음함수이론(implicit function theorem)에 의하여 $\Phi(u, v, t) = 0$ 를 만족하는 점 부근에서 $|\Phi_{u_i}| = |\partial\Phi/\partial u_i| \neq 0$ 이면 $u = h(v)$ 로 표시할 수 있는 함수 h 가 존재한다. 따라서 $\Phi(u, v, t) = \Phi(h(v), v, t) = 0$ 로 표시할 수 있고 $h(v)$ 는 v 에 대하여 미분가능하다. 식(11)은 다음 식(17)과 같이 바꿀 수 있다.

$$\Phi_u \dot{u} + \Phi_v \dot{v} = v \quad (17)$$

식(17)을 이용하여 $\dot{u} = \Phi_u^{-1}(v - \Phi_v \dot{v})$ 을 구할 수 있다. 그러므로 \dot{v} 를 알면 \dot{u} 를 구할 수 있게 된다. 가속도벡터는 $\ddot{q} = [\ddot{u}^T, \ddot{v}^T]^T$ 로 분리되며 식(16)을 이용하여 \ddot{q}, λ 를 구할 수 있다. 다음으로 \dot{v} 를 적분하여 v 를 구하고 \dot{v} 를 적분하여 v 를 구한다. \dot{v} 가 결정되면 $\Phi_u \dot{u} + \Phi_v \dot{v} = v$ 를 이용하여 \dot{u} 를 구하고 u 는 v 를 $\Phi(u, v, t) = 0$ 에 대입하여 구하게 된다. 여기서의 적분은 이미 알려진 ODE 해법들을 이용할 수 있고 \dot{u}, u 는 구속방정식을 이용하여 구한다. 그런데 일반좌표를 독립좌표와 종속좌표를 나누는 것은 국소 매개변수화(local parametrization)이기 때문에 조건에 따라서 일반좌표의 분리를 다시 실시하는데 일반적으로 비선형방정식의 반복횟수에 따라서 일반좌표분리를 실시한다. 일반좌표분리는 LU분리법(decomposition)이나 QR분리법을 이용한다. GCP는 오차제어의 장점을 가지기

때문에 구속기계의 DAE해법에 많이 이용된다. 그러나 국소적으로 구한 ODE가 강성계의 성질을 가지면 2장에서 서술한 것과 같은 어려움을 갖는 단점이 있다. PECE는 양적해법이고 가변적분간격, 가변차수이다. BDF는 음적공식으로 강성계에 적합한 해법이며 본 연구에 이용된 BDF는 가변적분간격이다.

4. 강성계의 해석

Fig. 1은 중장비중의 굴삭기모델을 보여주고 있다. 이와 같은 중장비에는 유압계와 제어계를 포함하여 해석해야할 때가 많다. 유압계는 큰 힘을 얻기 위하여 자주 이용되는데 때때로 강성계의 특성을 나타내게 된다. Fig. 2는 유압 액추에이터(actuator)를 보여주고 있다. Fig. 2에서 보는 바와 같이 액추에이터의 P_1 과 P_2 에 대한 미분방정식은 식(18)과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{P}_1 &= \frac{\beta}{V_1} (CX_1\sqrt{|P_s - P_1|} \operatorname{sgn}(P_s - P_1) \\ &\quad - CX_2\sqrt{|P_1 - P_0|} \operatorname{sgn}(P_1 - P_0) - A_1\dot{X}) \\ \dot{P}_2 &= \frac{\beta}{V_2} (CX_3\sqrt{|P_s - P_2|} \operatorname{sgn}(P_s - P_2) \\ &\quad - CX_4\sqrt{|P_2 - P_0|} \operatorname{sgn}(P_2 - P_0) - A_2\dot{X}) \end{aligned} \quad (18)$$

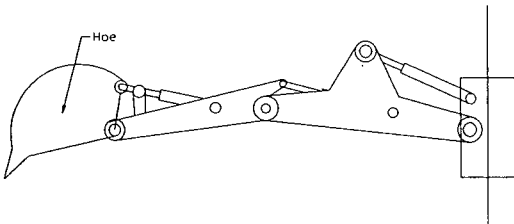


Fig. 1 An excavator model

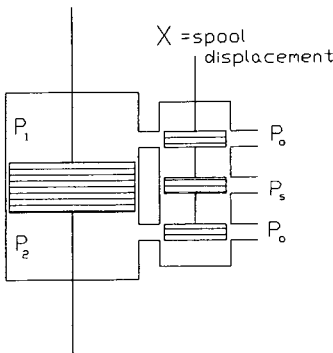


Fig. 2 Hydraulic actuator

여기서,

- β : 탄성계수
- C : 유량계수
- A_1, A_2 : 피스톤면적
- V_1, V_2 : 액추에이터 체적
- X_1, X_2, X_3, X_4 : 스톱밸브열림

유압 액추에이터를 포함한 기계계의 해석을 위하여 식(18)은 기계계에 포함되어 DAE해법을 해석해야 한다. 이러한 유압계는 큰 탄성계수와 작은 V_1, V_2 가 강성계의 특성을 나타낸다.

Fig. 1과 같은 모델에 이용되는 일반적인 유체의 탄성계수 β 는 약 1400000000 N/m^2 이다. 이 모델에 PECE와 BDF를 적용하였다. 출력간격은 0.05초이며 적분간격 h 는 가변이고 오차한계는 $10E-6$ 로 하였다. Fig. 3는 이 모델의 Lipschitz 상수이다. Fig. 4는 각 구간에서 PECE와 BDF의 계산시간 결과이다. Fig. 4에서 보면 적분 시작구간에서는 BDF가 계산시간을 많이 소비하는 것을 볼 수 있

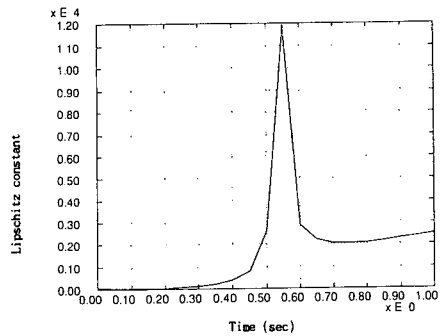


Fig. 3 Lipschitz constant of the excavator during simulation

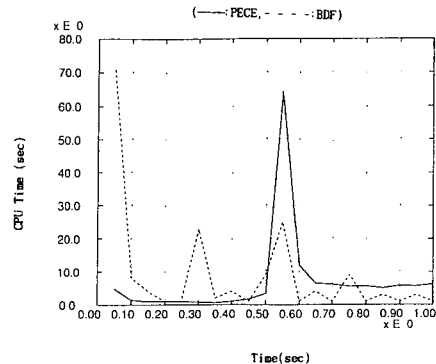


Fig. 4 CPU time of both PECE and BDF

다. L 이 클수록 PECE는 계산시간을 많이 소모하는 것을 볼 수 있다. 반면에 BDF는 변화가 적은 것을 볼 수 있다. 여기서, 강성계를 판단하는 기준을 세우기 위하여 계산시간이 역전되는 시점의 L 를 보면 즉 0.45초에서의 L 를 보면 약 1500이 되는 것을 볼 수 있다. 본 연구에서는 이 값을 강성계와 비강성계의 기준으로 제시한다. Fig. 4를 보면 L 이 1500이 되기 전까지는 PECE가 유리하며 반면에 L 이 1500 이상이면 BDF가 유리한 것을 볼 수 있다. 그러므로 전구간에 대해서 효율적으로 적분하기 위하여 초기에는 PECE로 적분을 수행하다가 L 이 1500 이상이면 BDF로 적분을 바꾼다면 계산시간에 있어 유리하다고 예측된다. 또한 전구간에 대하여 안정성(stability)을 보장할 수 있다고 할 수 있다. 그런데 여기서 선형화와 고유치 계산에 소비되는 계산시간의 고려가 필요하다. 실험적으로 평균 1.5초가 필요하였다. 이 값을 볼 때 본 예제에 대해서는 매구간마다 L 를 이용하여 강성계를 판별하는 데는 큰 값이 된다. 이 L 를 구하는 간격에 대하여는 자유도와 문제특성, 선형화기법, 고유치를 구하는 기법들에 따라서 다르리라고 생각되므로 이에 대하여 차후 연구가 필요하다고 생각된다. 본 예제에 대하여는 이를 기초로 하여 적분법을 바꾸면서 해석을 수행하였다. 이하에서 SM(switching method)이라 명한다. SM은 PECE와 BDF를 강성계 조건에 따라서 변환하면서 적분을 수행하게 된다. Table 3은 전 구간에 대한 계산시간을 보여주고 있다.

Table 3에서 보는 바와 같이 본 예제에 대하여

Table 3 CPU time(sec)

Solution method	CPU time(sec)
PECE	138.53
BDF	190.18
SM	124.21

Table 4 CPU time(sec)

Solution method	CPU time(sec)
PECE	38.25
BDF	6.89
SM	15.46

는 SM이 가장 빨리 적분을 수행하는 것을 볼 수 있다. Fig. 5는 세 해법의 각 구간에 다른 계산시간을 보여주고 있다. Fig. 5에서 C선이 SM으로써 0.5초까지는 PECE와 같으나 0.5초 이후에는 BDF 특성을 보인다. Fig. 6은 Fig. 1에서의 Hoe의 가속도 특성인데 세 해법의 결과의 차이는 무시할만하다. 본 연구에서는 주로 계산시간 측면에서 고려하였다.

다음 예제는 1/4차량모델이다. Fig. 7에서 감쇠(damping)특성을 상수로 하지 않고 $C1=1000 \times 10$ tN s/m의 함수로 하였다. 이는 실제 설계에서는 발생하기 어려우나 때때로 과도 감쇠특성이 강성계를 나타낼 수 있기 때문에 임의의 함수로 하였다. 구속기계계에서 감쇠특성은 직접적으로 선형계수행렬의 고유치의 실수부에 영향을 주기 때문이다. Fig. 8은 Fig. 7 모델의 L 특성이다. 즉 약 1.7초에서 L 1500 이상을 초과하게 된다. Fig. 9는 세 해법의 계산시간 특성이다. 초기에는 PECE가 유리하나 과도감쇠에서는 BDF가 유리한 것을 볼 수

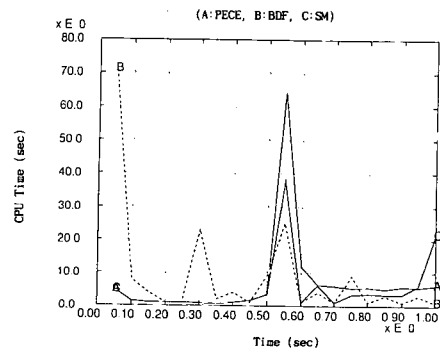


Fig. 5 CPU time of three methods

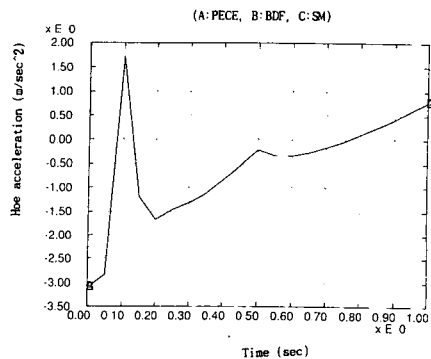


Fig. 6 Acceleration of Hoe

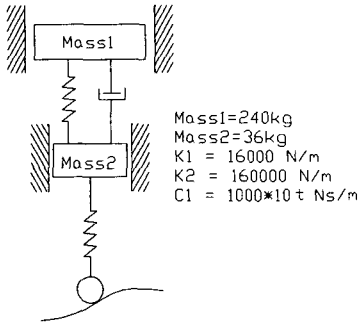


Fig. 7 A 1/4 car model

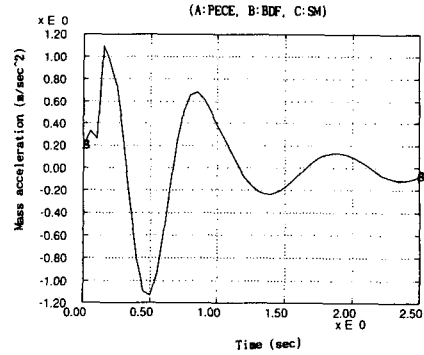


Fig. 10 Acceleration of mass

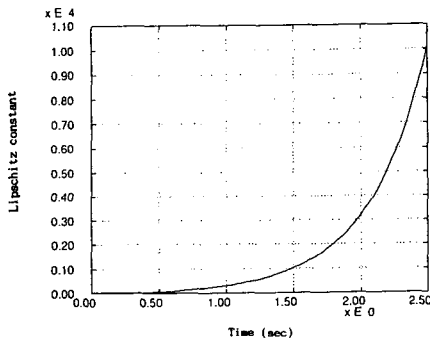


Fig. 8 Lipschitz constant of the car model

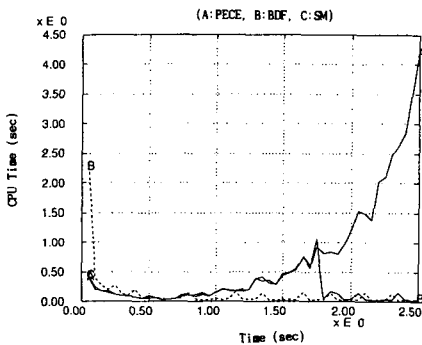


Fig. 9 CPU time of three integration methods

있다. SM은 1.7초 부근에서 해법의 변환이 이루어진다. Table 4는 전구간의 계산시간을 보여주고 있다.

이 예제에 있어서 BDF가 가장 빠른 것을 알 수 있는데 SM이 해법을 변환하였지만 L 를 구하는 시간이 추가 되었기 때문이다. 이 예제와 같은 과도감쇠에서는 BDF가 유리한 것을 알 수 있다. 비록 본 예제에 있어서는 SM의 계산시간이 BDF보

다는 크지만 일반적인 구속기계계의 해석시 자동적으로 강성계를 판별하고 해법을 변환함으로써 비강성구속기계계와 강성구속기계계를 안정성을 가지고 해석할 수 있다고 할 수 있다. Fig. 10은 mass의 수직가속도인데 세 해법의 차이가 극히 적은 것을 알 수 있다.

5. 결론

구속기계계 특히 강성 구속기계계를 효율적으로 해석하기 위한 해법에 대하여 연구하였다. 본 연구를 통하여 강성 구속기계계에 대한 판단기준을 Lipschitz 상수값으로 제시하였다. Lipschitz 상수를 구하기 위하여 일정한 간격으로 구속기계계의 독립좌표에 대한 선형화를 수행하고 선형화된 선형계수행렬에 대한 고유치의 최대값을 구하므로 Lipschitz 상수를 구하였다. 동시에 매 구간에서 PECE와 BDF의 계산시간을 구하였다. 두 결과를 통하여 계산시간이 역전되는 시점에서의 Lipschitz 상수 값을 강성구속기계계에 대한 판단기준값으로 제시하였다. 이 판단기준을 이용하여 구속기계계의 해석시 자동적으로 강성계를 판별하고 PECE와 BDF 해법을 변환함으로써 전구간에 대하여 안정성을 보장하며 해석시간을 단축시켰다. 실험을 통하여 구속기계계의 요소중 과도감쇠와 큰 체적탄성계수가 강성계의 특성을 보이는 것을 알 수 있었고 연구결과와 기술을 이용하여 전 구간을 보다 효율적으로 해석할 수 있음을 확인하였다. 본 연구의 결과는 일반강성 ODE(stiff ODE)에도 응용할 수 있으리라 기대된다. 차후 연구로서 수학적으로 강성계에 대한 Lipschitz 상수를 설정하고 일반화하는 것이 필요하다고 할 수 있다.

후 기

본 연구의 일부는 아주대학교 교내연구비로 수행되었기에 관계자 제위께 감사드립니다.

참고문헌

- (1) Edward, J. Haug,, 1989, *Computer-Aided Kinematics and Dynamics of Mechanical Systems*, Allyn and Bacon.
- (2) Brennam, B., Campell, S. and Petzold, L., 1989, *Numerical Solution of Initial-Value Problems in Differential-Algebraic Equations*, North-Holland, New York.
- (3) Wehage, R. A. and Haug, E. J., 1982, "Generalized Coordinate Partitioning for Dimension Reduction in Analysis of Constrained Dynamic Systems," *Trans. ASME, J. Mech. Design*, Vol. 104, pp. 247~255.
- (4) Baumgarte, J., 1972, "Stabilization of Constraints and Integrals of Motion," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 1, pp. 1~16.
- (5) Führer, C., Leimkuhler, B., 1989, "A New Class of Generalized Inverses for the Solution of Discretized Euler-Lagrange Equations," *NATO Advanced Research Workshop on Real-Time Integration Methods for Mechanical System Simulation*, Snowbird, Utah, USA.
- (6) Shampine, L. F. and Gear, C. W., 1978, "A User's View of Solving Stiff Ordinary Differential Equations," *SIAM*, Vol. 21. No. 1.
- (7) Shampine, L. F. and Gordon, M. K., 1975, *Computer Solution of ODEs ; The Initial Value Problem*, W. H. Freeman & Co.
- (8) Gear, C. W., 1971, *Numerical Initial Value Problems in Ordinary Differential Equations*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J.
- (9) Shampine, L. F., 1984, "Stiffness and the Automatic Selection of ODE Codes," *Journal of Computational Physics*, 54, pp. 74~86.
- (10) Woon-Sung Lee, Shih-Ping Soon and George, M., Lance, 1989, "Linearization of Controlled Multibody Mechanical Systems," *Technical Report R-49, Center for Simulation and Design Optimization of Mechanical Sysytems and Department of Mechanical Engineering*, The University of Iowa.
- (11) Greenwood, D. T., 1988, *Principle of Dynamics*, 2nd ed., Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J.