

〈論 文〉

쌍3차 스플라인곡면 식에 의한 이동곡면의 표현

전차수* · 조형래* · 박세형**

(1994년 9월 5일 접수)

Representation of Sweep Surface in Bicubic Spline Surface Form

Cha-Soo Jun, Hyung-Rae Cho and Sehyung Park

Key Words : Sweep Surface(이동곡면), Surface Modeling(곡면 모델링), Parametric Spline Surface(매개변수 스플라인곡면), CAD/CAM(컴퓨터를 이용한 설계 및 제조)

Abstract

This paper proposes a new approach for modeling sweep surfaces. The overall modeling procedure consists of following steps : (1)remeshing the section curves based on the curve lengths ; (2) remeshing the guide curve and the boundary curves based on a given sweeping rule ; (3)obtaining intermediate section curves at the remeshed points of the guide curve by blending the initial section curves ; (4)compensation of the intermediate section curves ; (5)interpolating the initial and intermediate curves using Hermite interpolant. The resulting sweep surface is expressed in a G^2 bicubic parametric spline surface.

1. 서 론

이동곡면(sweep surface)이란 2차원 단면곡선이 어떤 규칙을 갖고 안내곡선(또는 경계곡선)을 따라 이동할 때 생기는 궤적으로 정의된다. 이동곡면은 도면에 표기된 2차원 곡선 정보로부터 3차원 곡면 형상을 만드는데 널리 쓰이고 있다.

많은 상업용 CAD/CAM 시스템이 이동곡면을 지원하고 있으나 시스템 내부에서의 처리방법은 잘 공개하지 않고 있다.^(1~3) 이동곡면에 관한 연구는 Choi와 Lee^(4, 5)에 의해 연구된 바 있다. 이들의 연구는 도면에 나타난 곡면정보로부터 설계자의 의도를 충실히 반영할 수 있는 곡면을 형성할 수 있으나, 일반적인 CAD/CAM 시스템에서 많이 쓰는 매개변수 스플라인 곡면형태로 표현되지 않으므로 IGES 등을 통한 데이터 교환이 불가능하고, 복합 이동곡면의 경우는 접평면 연속을 만족시키지

못한다.

한편 곡선망으로부터 매개변수 다항식 곡면을 형성하는 방법으로는 Coons곡면, Gordon곡면, Gossling의 DUCT곡면, Hermite blended surface, Woodward의 Skinning곡면 등이 있으나 이들은 설계 의도의 반영에 한계를 갖고 있다.^(4,6)

본 연구에서는 곡물연속을 만족하는 쌍3차(bicubic)의 매개변수 스플라인곡면 형태로 이동곡면을 표현하는데 중점을 두고 있다. 여기서 말하는 매개변수 다항식 곡면(parametric polynomial surface)은 Coons, Bezier, Ferguson, B-spline 곡면들을 통칭하는 것으로 이들은 서로 쉽게 변환된다. 또한 본 연구에서는 기존의 이동곡면 형성 절차를 변경함으로써 보다 원활한 곡면을 형성할 수 있음을 보여주고 있다.

2. 이동곡면의 모델링 개념

Fig. 1은 형판(template 또는 sweep)의 이동(sweeping)에 의한 전통적인 곡면의 형성방법을

*정회원, 경상대학교 산업공학과 및 생산기술연구소

**정회원, 한국과학기술연구원 CAD/CAM 연구실

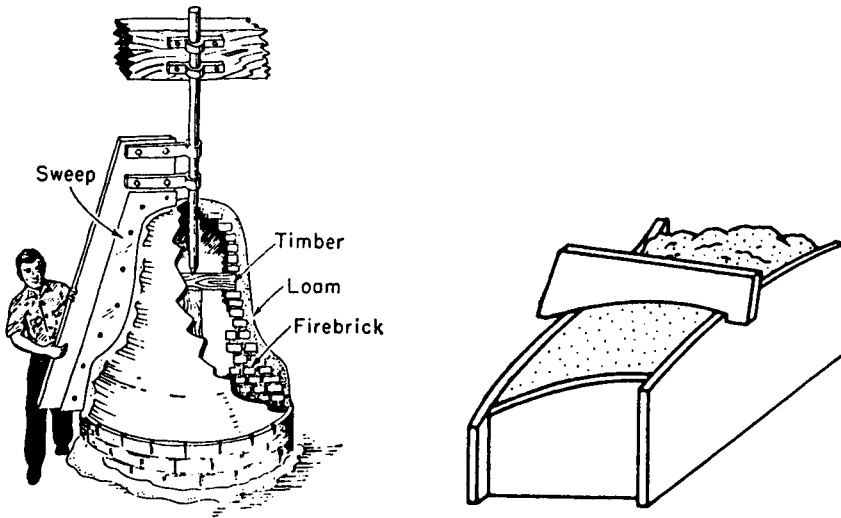


Fig. 1 Sweep surface examples (physical modelling)^(9,10)

보여주고 있다. 이동곡면의 수학적 모델링에 관한 기존의 개념을 소개하면 다음과 같다.^(2,4,5)

Fig. 2에서 곡선 A와 B는 각각의 단면 상에 놓인 평면곡선이며, 곡선 C와 D는 3차원 공간곡선이다. 곡선 A와 B를 단면곡선(section curve), 곡선 C와 D를 경계곡선(boundary curve)이라 하자. 여기서는 단면곡선과 경계곡선이 각각 두개씩 주어졌으므로 Fig. 1의 예들보다는 일반적인 경우이다. 이제 주어진 곡선으로부터 곡면을 형성하기 위하여 경계곡선 C와 D를 고정된 철사줄이라 하고, 단면 AA를 경계곡선과 만나는 곳인 P_0 와 P_1 에 구멍이 뚫어져 있고 수축과 확대가 자유로운 고무평판이라고 생각하자. 단면 AA를 철사줄 C, D를 따라 임의의 위치로 이동시켜 놓으면 P_0 , P_1 의 위치 변화에 따라 단면 AA와 그 위의 곡선 A는 적당히 변

형될 것이다. 단면 BB의 이동과 변형도 또 다른 곡선을 형성하게 된다. 이 두개의 중간 이동 단면곡선을 적절히 혼합(blending)하면 경계곡선과 일치되는 곡면 상의 곡선이 얻어지며, 이를 모든 위치에 대해 행하면 곡면이 형성된다. 이러한 절차는 수학적으로 모델링할 수 있으며 다음의 3가지 단계로 요약된다.^(4,5)

- (1) 단면곡선의 이동
- (2) 경계곡선에 의한 중간 이동 단면곡선의 수정 (경계곡선이 2개 이상 주어질 경우)
- (3) 중간 이동 단면곡선의 혼합(단면곡선이 2개 이상 주어질 경우)

이러한 모델링 절차에서는 단면곡선이 3개 이상 주어질 경우에 곡면의 연속조건을 만족하도록 중간 이동 단면곡선을 적절히 혼합하기가 애매하다.

본 연구에서는 이동곡면의 형성요소와 규칙들을 자세히 살펴보고, 새로운 모델링 개념을 제안하고 있는데 가장 큰 차이점은 혼합을 수정보다 먼저 행하는 것이다. 이로써 곡물 연속조건을 만족하는 보다 원활한 곡면을 생성하고 있다.

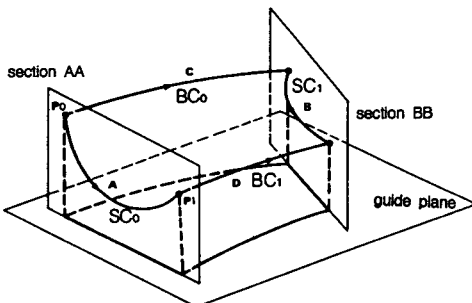


Fig. 2 A concept of sweep surface modelling (mathematical modeling)⁽²⁾

3. 이동곡면의 형성요소

이동곡면 형성에 필요한 요소로는 4가지 기하요소와 3가지 형성규칙이 있으며 이들은 사용자로부터 직접 입력받거나 경우에 따라서는 시스템 내부에서 결정할 수도 있다. 우선 기하 요소부터 살펴

보면 다음과 같다. (Fig. 2 참고)

(1) 단면곡선(section curve ; SC) : 단면(section plane)상에 놓인 평면곡선, 1개 이상 주어질 수 있다.

(2) 경계곡선(boundary curve ; BC) : 단면곡선을 제외한 곡면의 경계를 이루는 3차원 공간곡선, 주어지지 않을 수도 있으며 다수 개일 수도 있다.

(3) 안내곡선(guide curve ; GC) : 단면의 이동을 안내하는 곡선으로 이동규칙을 적용하는 기준이 되는 3차원 공간곡선이다. BC가 이를 겸할 수 있다. 이동규칙 중 대응이동인 경우는 2개, 나머지는 1개가 필요하다.

(4) 안내평면(guide plane) : 단면의 이동을 안내하는 평면으로 항상 1개가 주어져야 한다. 이 평면과 단면의 교선은 단면을 지역좌표계로 나타내는 기준이 되며, 이동규칙 중 평행, 회전, 대응이동은 단면이 안내평면에 항상 수직을 유지하며 이동한다.

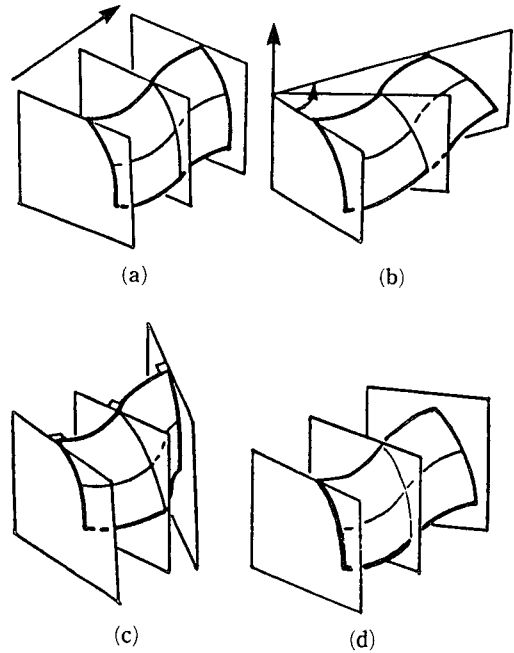


Fig. 3 Sweeping rules

4. 이동곡면의 형성규칙

이동곡면의 특징은 몇 가지 곡면 형성규칙을 선택함으로써 다양한 형상을 얻을 수 있다는데 있으며, 이들 규칙은 CAGD(computer-aided geometric design)이전의 전통적인 곡면 형성방법에 기초하고 있으므로 설계자가 그 형상을 쉽게 예측할 수 있다.

(1) 이동규칙(sweeping rule) : 단면이 안내곡선을 따라 이동하는 규칙이다. 이동규칙에는 다음의 네 가지 종류가 있다.^(1~5)(Fig. 3)

① 평행이동(parallel sweeping) : 단면이 평행 이동한다.

② 회전이동(rotational sweeping) : 단면이 안내평면에 수직인 회전축을 중심으로 회전이동 한다.

③ 법선이동(normal sweeping) : 단면이 안내곡선과 수직을 유지하며 이동한다.

④ 대응이동(synchronized sweeping) : 단면이 두 안내곡선의 곡선 길이비에 대응되도록 이동한다.

(2) 혼합규칙(blending rule) : 단면곡선이 2개 이상 주어질 경우 임의의 중간 단면에서는 각각의 단면곡선을 이동 거리에 따라 적절히 혼합하여야 한다. 두 개의 단면곡선을 $s_0(v)$, $s_1(v)$ 라 할 때 안내곡선을 따른 임의의 위치 u 에서 이 두 곡선을

혼합한 중간 단면곡선 $r(u, v)$ 는 다음과 같이 둘 수 있다.

$$r(u, v) = A_0(u)s_0(v) + A_1(u)s_1(v) + B_0(u)r_u(0, v) + B_1(u)r_u(1, v) \quad (1)$$

여기서, $r_u(0, v)$, $r_u(1, v)$ 는 $r(u, v)$ 의 u 방향 일차 미분 값이다. 또 $A_0(u)$, $A_1(u)$, $B_0(u)$, $B_1(u)$ 는 혼합함수(blending function)를 나타낸다.

첫째, 선형 혼합(linear blending) : 다음과 같은 선형 혼합함수

$$\begin{aligned} A_0(u) &= 1-u, A_1(u) = u \\ B_0(u) &= 0, B_1(u) = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

를 이용하여 주어진 두 단면곡선을 혼합하여 중간 단면곡선을 만든다. 단면곡선이 2개 주어질 경우에 이용될 수 있다.

둘째, 3차 혼합(cubic blending) : 단면곡선이 3개 이상 주어지는 경우 전체적인 단면곡선의 형상 변화를 고려하여 중간 단면곡선을 생성한다.

$$\begin{aligned} A_0(u) &= 1-3u^2+2u^3, A_1(u) = 3u^2-2u^3 \\ B_0(u) &= u-2u^2+u^3, B_1(u) = -u^2+u^3 \end{aligned} \quad (3)$$

3차 혼합에서는 식(1)의 $r_u(0, v)$, $r_u(1, v)$ 를 결정하는 여러가지 방법이 있을 수 있는데 Ferguson

fitting이나 Chord-length spline fitting⁽⁶⁾이 이용된다.

(3) 수정규칙(compensation rule) : 경계곡선이 두개 이상 주어진 경우 안내곡선 상의 임의의 위치로 이동되고 혼합된 중간 단면곡선의 그물점(node point : 곡선 망의 교점)은 경계곡선과 만나지 않는다. 이를 일치시키기 위한 중간 단면곡선의 수정방법은 다음과 같은 것이 있다.

첫째, Affine 변환을 이용한 수정 : 먼저 중간 단면곡선의 시작점 p_0 를 경계곡선 상의 점 b_0 와 일치하도록 평행이동 변환을 한다. (Fig. 4) 그리고 두 점의 거리가 같아지도록 b_0 를 중심으로 축척변환한 후, 두 점이 일치하도록 회전변환을 행한다. 이는 단면의 모양을 쉽게 예측할 수 있는 방법이나, 경계곡선이 다수 개인 경우 점평면 연속을 만족시키기 어렵다.

둘째, 차이의 보간에 의한 수정 : 경계곡선과 중간 단면의 교점을 $b_0, b_1, b_2, \dots, b_m$ 이라 하고(Fig. 5), 이동된 단면곡선을 $p(v)$, 그의 그물점을 $p_0, p_1, p_2, \dots, p_m$ 이라 할 때 각 점에서의 차이 벡터를

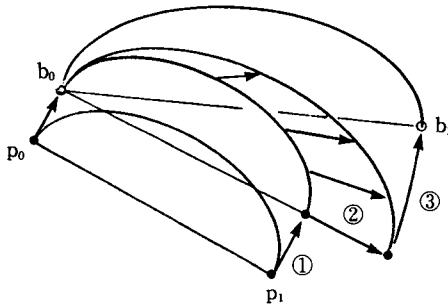


Fig. 4 Compensation using affine transformation

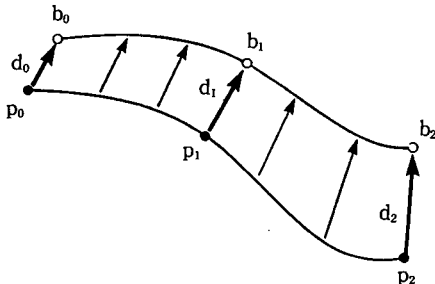


Fig. 5 Compensation by interpolation of deviation vectors

$$d_i = b_i - p_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (4)$$

로 정의된다. $d_0, d_1, d_2, \dots, d_m$ 을 보간한 곡선을 $d(v)$ 라 하면 수정된 단면곡선 $b(v)$ 는 다음과 같다.

$$b(v) = p(v) + d(v) \quad (5)$$

$d(v)$ 의 보간시 $m=2$ 이면 선형 보간을 행하고, $m \geq 3$ 이면 cubic spline 보간을 이용한다. 경계곡선이 3개 이상인 경우 G^2 연속조건을 만족시킬 수 있다.

5. 단면곡선의 이동변환

Fig. 6과 같이 세계좌표계(world coordinate)를 X, Y, Z라 하고 안내곡선 상의 임의의 한점 $g(u_0)$ 에 설정된 중간 단면의 지역좌표계(local coordinate)를 x_s, y_s, z_s 라 하자. 지역좌표계 x_s, y_s, z_s 의 축방향을 나타내는 단위 벡터를 n, o, a 라 하고 원점을 p 라 하면 이를 정의하는 방법은 이동규칙에 따라 달라진다.

평행, 회전, 대응이동에서는 단면이 안내평면에 항상 수직하므로 다음의 절차로 n, o, a, p 를 구한다. (Fig. 6)

- (1) $p := g(u_0)$
- (2) $o := n_{GP}$, 여기서 n_{GP} 는 안내평면의 법선 벡터이다
- (3) 이동규칙에 따라 단면과 안내평면과의 교선 벡터 e 를 계산한다.

case(이동규칙) of
 '평행이동' : $e :=$ (평행이동 방향)

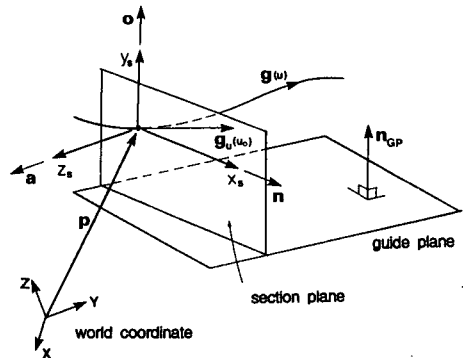


Fig. 6 Local coordinate frame of a section plane

‘회전이동’: $e := (p$ 에서 회전축에 내린 수선의 단위벡터)

‘대응이동’: $e := ($ 대응되는 두 안내곡선 상의 두점을 잇는 직선을 안내평면에 투영하여 얻은 단위벡터)

(4) $a := e \times o$

(5) if $(g_u(u_0) \cdot a > 0)$ then $a := -a$

(6) $n := o \times a$

법선이동에서는 단면이 안내곡선과 수직이 되고, x_s 축이 안내평면과 평행하도록 n, o, a, p 결정한다. 여기서 자세한 절차는 생략한다.

지역좌표계를 등차 변환행렬로 나타내면 다음과 같다.

$$T = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

또한 T 의 역행렬 T^{-1} 은 다음과 같다.⁽⁹⁾

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z & -p \cdot n \\ o_x & o_y & o_z & -p \cdot o \\ a_x & a_y & a_z & -p \cdot a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

초기 단면의 지역좌표계를 T_0 , 이 단면상에 놓인 한 점의 세계좌표를 (x_0, y_0, z_0) 라 하고, 중간단면의 지역좌표계를 T 라 하면 중간단면으로 이동된 점의 세계좌표 (x, y, z) 는 다음과 같다.

$$[x \ y \ z \ 1]^T = T \ T_0^{-1} [x_0 \ y_0 \ z_0 \ 1]^T \quad (8)$$

6. 매개변수 스플라인곡면 식에 의한 이동곡면의 모델링 절차

본 연구에서 입력받는 곡선은 곡면의 표현 형식(함수의 종류)이나 차수(degree)에 제한이 없으며 여러 개의 segment로 이루어진 복합곡선(composite curve)이다. 이러한 단면곡선, 경계곡선 등의 기하요소와 형성규칙으로부터 이동곡면을 표현하고자 한다. 일반적인 CAD/CAM 시스템의 표준적 곡면 표현형식인 매개변수 스플라인곡면 식에 의한 이동곡면의 모델링 절차는 다음과 같다.

(1) 단면곡선 remeshing : 모든 단면곡선들이 같은 개수의 마디점(mesh points)를 갖도록 곡선 길이를 기준으로 remeshing 한다.^(7,8) Remeshing된

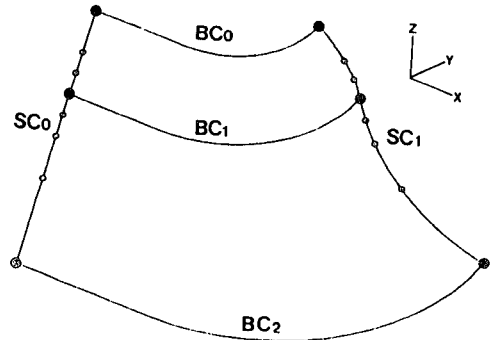


Fig. 7 Remeshing of the section curves

곡선은 주어진 곡선과 근사 공차를 만족하는 3차 현길이 spline⁽⁶⁾이 된다. (Fig.7) 본 과정에 대한 절차는 다음과 같다.

1단계 : 단면곡선에 대해 곡선의 끝점과 경계곡선과의 교점들을 초기의 마디점으로 한다.

2단계 : 모든 단면곡선에 대해 같은 번호를 갖는 segment는 같은 weighting factor를 갖도록 마디점간의 거리의 평균값으로부터 곡선의 weighting factor를 구한다.⁽⁶⁾

3단계 : 각 단면곡선의 마디점으로부터 현길이 스플라인으로 보간하여 근사곡선을 만든다. 이때 end-condition은 원래의 곡선으로부터 구한다.

4단계 : 각 근사곡선의 모든 segment에 대하여 원래의 곡선과 최대 오차를 계산한다.

5단계 : 오차가 주어진 공차보다 큰 segment에 대해서는 모든 근사곡선의 해당 segment에 중간점(곡선길이 기준)을 마디점으로 삽입한다.

6단계 : 모든 근사곡선의 모든 segment가 공차를 만족할 때까지 단계 2~5단계의 과정을 반복한다.

(2) 경계곡선과 안내곡선의 remeshing : 모든 경

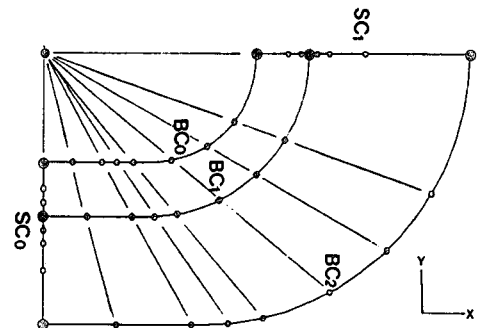


Fig. 8 Remeshing of the guide and boundary curves

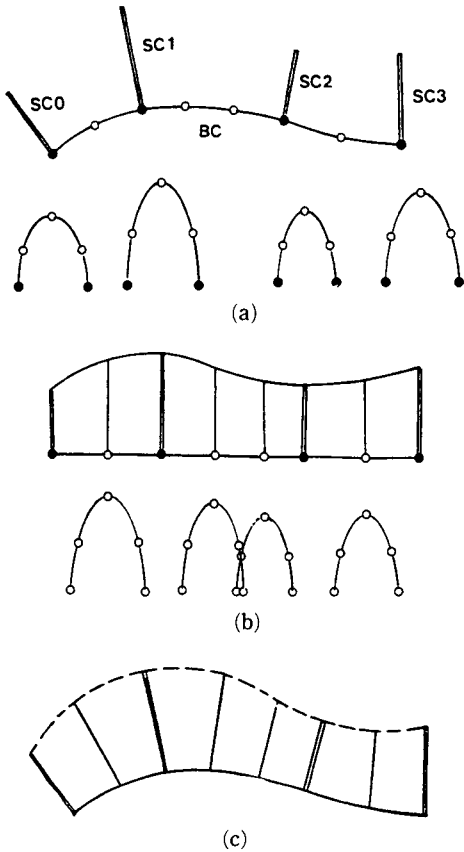


Fig. 9 Blending of the section curves

계곡선과 안내곡선이 같은 개수의 마디점을 갖도록 경계곡선과 안내곡선에 새로운 점을 삽입한다. 이 과정은 단면곡선의 경우와 비슷하나, 삽입되는 점의 위치를 결정할 때 이동규칙을 적용하는 것에만 차이가 있다. Fig. 8은 회전 이동규칙을 적용한 경

우의 경계곡선 remeshing 결과를 보여주고 있다.

(3) 단면곡선의 혼합 : 초기 단면곡선을 혼합 (blending) 하여 (2)의 과정에서 얻어진 안내곡선의 마디점에서 중간 단면곡선을 얻는다. Fig. 9(b)와 같이 초기 단면을 경계곡선의 평균 길이만큼 띄워 평행하게 나열하고 초기 단면곡선들을 혼합 규칙에 따라 보간하여 곡면을 생성한다. 이 곡면과 중간 단면의 교선이 중간 단면곡선이 된다.

(4) 중간 단면곡선의 수정 : 중간 단면곡선의 그물점이 경계곡선과 일치하도록 수정규칙에 따라 중간 단면곡선을 수정한다.

(5) 단면곡선의 이동 : 이동규칙에 따라 단면곡선들을 경계곡선 상의 위치로 이동 변환한다. (Fig. 9 (c))

(6) 곡면 보간 : 이상과 같은 과정을 거치면 초기 단면과 중간 단면에 놓인 곡선들은 3차원 공간상에서 사각 배열의 마디점을 갖게 된다. 이 곡선 데이터를 Hermite 보간을 이용한 곡률 연속의 현길이 곡면⁶⁾으로 보간하여 곡면의 식을 얻는다.

7. 이동곡면의 모델링 예

Fig. 10(a), (b)는 Fig. 7에 표시된 곡선으로부터 형성된 회전과 법선 이동곡면을 보여주고 있다. 각 그림은 곡면의 패치를 3등분하여 등매개곡선을 그린 것인데 등매개곡선들이 이동규칙을 정확히 따르고 있음을 보여준다.

Fig. 10(c)는 3개의 단면곡선과 1개의 경계곡선 (직선)으로 형성한 평행 이동곡면이며, Fig. 10(d)는 (c)의 경계곡선을 직선에서 곡선으로 대체한 것이다. 두 그림 모두 패치의 경계선을 그린 것이다.

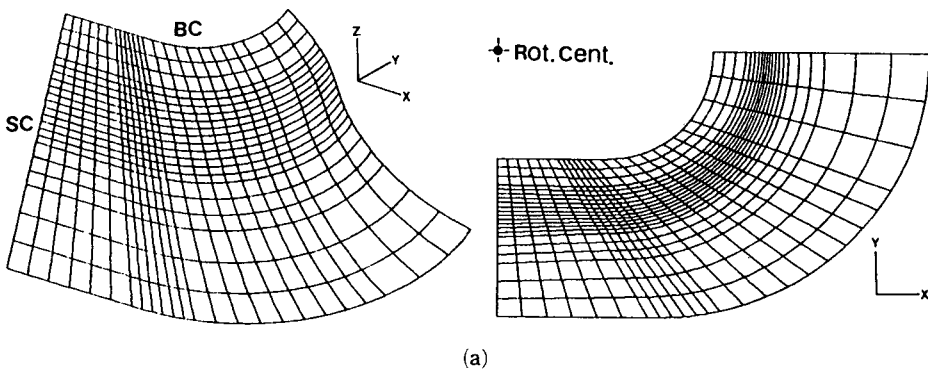


Fig. 10 Continued

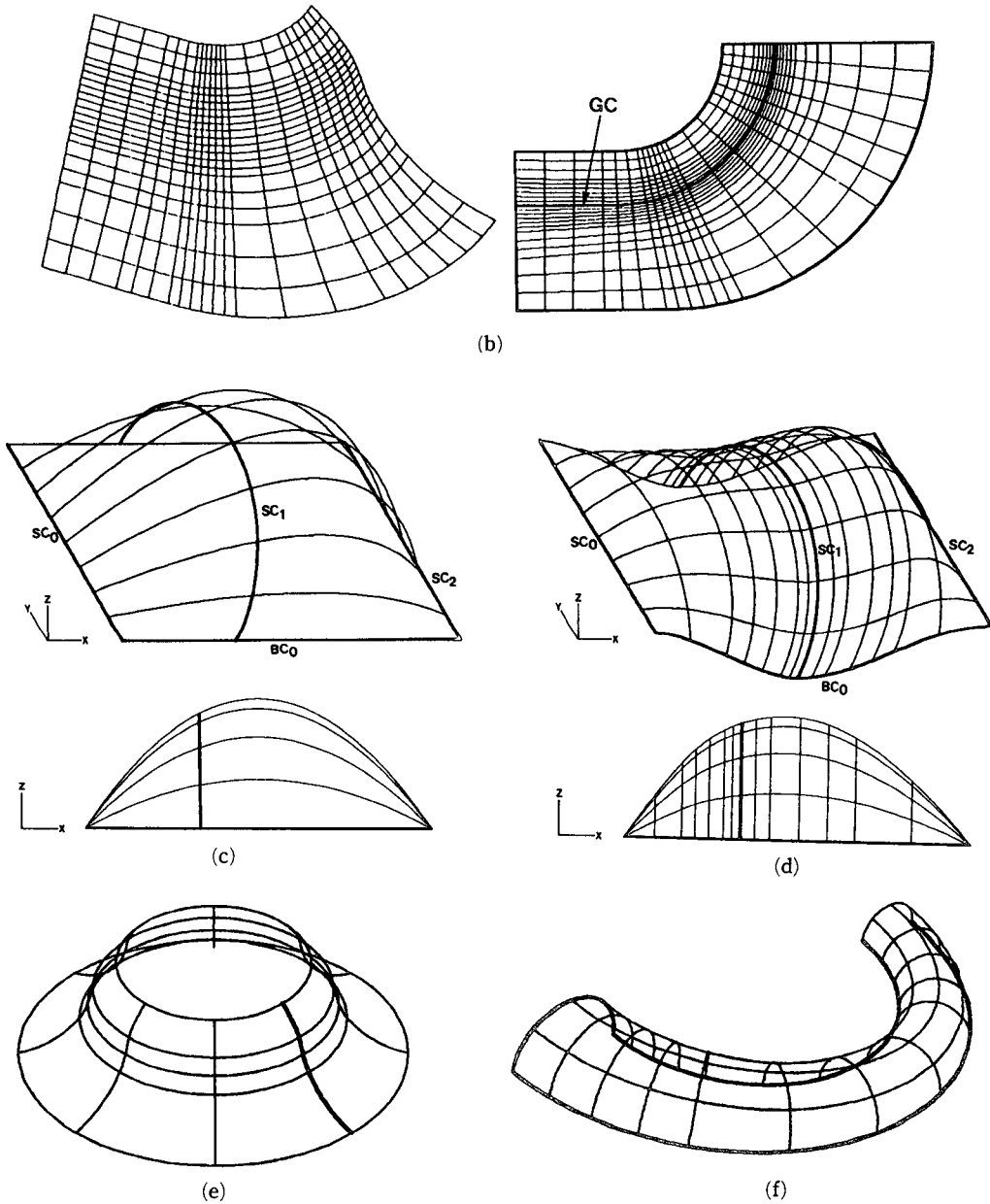


Fig. 10 Examples of sweep surfaces

(c)에서는 경계곡선을 remeshing하지 않고도 곡면을 보간할 수 있는 경우이며, (d)는 경계곡선이 remeshing 되었는데 중간 단면곡선이 매우 자연스럽게 형성되고 있음을 보여주고 있다.

Fig. 10(e)는 회전이동에 의해 얻어진 회전곡면 (surface of revolution)이며, Fig. 10(f)는 두개의 경계곡선과 한 개의 단면곡선이 주어진 경우의 대

응 이동곡면이다.

8. 결 론

본 연구에서는 이동곡면 (sweep surface)을 매개 변수 스플라인곡면으로 표현하는 방법을 제안하고 있으며 그 특징은 다음과 같다.

(1) Coons곡면 등 곡선 망으로부터 곡면을 얻는 다른 방법에 비교할 때 본 연구에서 제안하는 이동곡면은 이동규칙이나, 수정규칙을 따르고 있으므로 설계자가 곡면의 모양을 쉽게 예측할 수 있다.

(2) 이동곡면의 입력곡선들(단면, 경계, 안내곡선)은 선분, 원호, 스플라인 등으로 구성된 복합곡선이다. 이 곡선들을 remeshing하여 3차 spline으로 근사하였으며 이는 주어진 공차를 만족한다.

(3) 단면곡선의 혼합과정을 수정과정 이전에 수행함으로써 단면곡선이 3개 이상 주어지는 경우에도 원활한(smooth)곡면을 얻을 수 있다.

(4) 자유곡면에 대한 표준 표현식인 쌍3차 매개변수 스플라인곡면 식으로 이동곡면을 표현함으로써 기존의 CAD/CAM 시스템과 데이터 호환이 가능하다.

(5) 단면곡선과 경계곡선이 3개 이상 주어진 복합 이동곡면의 경우도 곡률 연속을 만족한다.

후 기

본 연구결과는 KIST CAD/CAM 시스템에서 개발한 금형가공용 CAM 시스템인 CASSET의 한 모듈로 구현되었다.⁽⁸⁾

참고문헌

(1) Fanuc Ltd., 1982, *FAPT DIE- II for Die Sculp-*

tured Surface Modelling.

(2) 큐빅테크, 1992, SWEEP III 사용설명서, 큐빅테크.

(3) 큐빅테크, 1992, 오메가 시스템 사용법 설명서, 큐빅테크.

(4) Choi, B. K., 1991, *Surface Modelling for CAD/CAM*, Elsevier.

(5) Choi, B. K. and Lee, C. S., 1990, "Sweep Surface Modelling via Coordinate Transformation and Blending," *Computer-Aided Design*, 20(6), pp. 371~378.

(6) 전차수, 주상윤, 전명길, 1994, "히미트 보간을 이용한 곡률 연속 현길이 스플라인 곡면," 대한산업공학회지, 제20권, 제1호.

(7) 전차수, 1985, "3차원 측정 데이터로부터 자유곡면 NC 가공," 한국과학기술원, 석사학위논문.

(8) 한국과학기술연구원, 1992, "프레스 금형의 CAD/ CAE 시스템 개발," 연구보고서, 과학기술처.

(9) Paul, R. P., 1982, "Robot Manipulators-Mathematics," *Programming and Control*, the MIT press.

(10) Taylor, H. F., Flemings, M. C. and Wulff, J., 1959, *Foundary Engineering*, John Wiley & Sons, Inc..