

<論 文>

터빈축차내에 내재된 타원균열의 응력세기계수 결정

이강용* · 김종성* · 하정수**

(1994년 8월 30일 접수)

Determination of Stress Intensity Factors for Embedded Elliptical Crack in Turbine Rotor

Kang-Yong Lee, Jong-Sung Kim and Jeong-Soo Ha

Key Words : Stress Intensity Factors(응력세기계수), Embedded Elliptical Crack(내재된 타원 균열), Semi-Elliptical Surface Crack(반타원표면균열), Turbine Rotor(터빈축차), Vainshtok Weight Function(Vainshtok 가중함수법)

Abstract

The thermal shock stress intensity factors of semi-elliptical surface crack in finite plate and the stress intensity factors of embedded elliptical crack in turbine rotor is determined by means of Vainshtok weight function method. In case of semi-elliptical surface crack, the solution is compared with previous solution. The stress intensity factor for embedded elliptical crack in turbine rotor loaded by centrifugal and thermal loading is also determined. In this case, the value of stress intensity factor is larger at crack contour near internal radius surface and is almost constant at the crack contour farther from internal radius surface.

1. 서 론

발전소 설비중 터빈축차내에는 균열이 관통균열(through crack)보다는 내재된 삼차원균열(three dimensional crack) 또는 표면균열(surface crack)의 형상이 일반적이다. 이러한 균열들은 타원균열(elliptical crack)로 가정되어진다. 유한체에 존재하는 타원균열에 대한 기존의 연구는 다음과 같다. Shah^(1,2) 등은 Segedin⁽³⁾의 포텐셜함수를 이용하여 임의의 기계적 하중하에 있는 두꺼운 판에 내재된 타원균열에 대한 응력세기계수(stress intensity factor)와 균일 인장하중시 반무한체 표면에 접근해 있는 내재된 타원균열의 응력세기계수를 구하였다. Isida 등⁽⁴⁾은 내재된 타원균열을 가진 판에 인

장하중을 작용시키는 경우에 대한 응력세기계수를 체적력방법(body force method)으로 구하였다. 또한 Fett 등⁽⁵⁾은 가중함수법(weight function method)에 이용하기 위해 Isida 등⁽⁴⁾의 판에 내재된 타원균열의 응력세기계수식을 수정하였다. McGowan 등,⁽⁶⁾ Heliot 등⁽⁷⁾은 원통실린더에 내재된 타원표면균열에 압력하중이 작용시의 응력세기계수를 유한요소법(finite element method)을 이용하여 구하였고, Newman^(8,9) 등은 기계하중이 작용하는 유한판에 존재하는 타원균열의 응력세기계수와 원통실린더에 압력 하중이 작용시 타원표면균열의 응력세기계수를 유한요소법으로 구하였다. Tan 등⁽¹⁰⁾은 두꺼운 원통실린더에 열하중과 잔류응력이 작용시 타원표면균열의 응력세기계수를 경계요소법(boundary element method)을 이용하여 구하였다.

그러나 이러한 수치해석 방법은 요소 분할(mesh generation)의 어려움과 계산시간의 비경제성에 문

*정회원, 연세대학교 기계공학과

**한국전력공사 기술연구원

제가 있으므로 가중함수법(weight function method)을 통한 응력세기계수의 평가가 자주 이용되어지고 있는데, 이러한 연구로는 Mattheck 등⁽¹¹⁾ Xu 등,⁽¹²⁾ Fatt,⁽¹³⁾ Nishioka 등,⁽¹⁴⁾ Vainshtok 등⁽¹⁵⁻¹⁷⁾의 연구가 있다.

그러나 수치해석 방법을 이용한 기존의 연구뿐만 아니라 이러한 가중함수법을 이용한 기존의 연구도 터빈축차내에 열하중과 원심력하중이 작용시 내재된 타원균열의 응력세기계수를 구하지 않았다. 본 연구에서는 해석의 용이함과 시간적 경제성때문에 Vainshtok⁽¹⁷⁾의 가중함수법을 이용하여 열충격(thermal shock)이 작용하는 유한판에 타원표면균열이 존재시의 열충격 응력세기계수를 구하여 기존의 해와 비교하여 Vainshtok⁽¹⁷⁾ 가중함수법의 타당성을 검증한 후 열하중과 원심력하중에 있는 터빈축차의 구멍부분에 내재된 타원균열의 응력세기계수를 구하고자 한다.

2. 이 론

2.1 열충격을 받는 유한판상의 반타원표면균열

2.1.1 균열면 변위 결정

Fig. 1에서 보는 바와 같은 반타원표면균열을 가진 유한판의 균열면에 수직으로 균일응력 σ_0 가 작용할때 응력세기계수 K_{I0} 는 다음과 같다.⁽⁸⁾

$$K_{I0} = \frac{\sigma_0 \sqrt{\pi a}}{E(k)} (\sin^2 \eta + \alpha^2 \cos^2 \eta)^{1/4} f\left(\alpha, \frac{a}{B}, \frac{b}{W}, \eta\right) \quad (1)$$

여기서,

$$f\left(\alpha, \frac{a}{B}, \frac{b}{W}, \eta\right) = \left[M_1 + M_2 \left(\frac{a}{B}\right)^2 + M_4 \left(\frac{a}{B}\right)^4 \right] g f_1$$

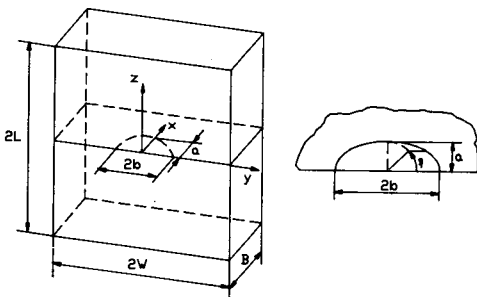


Fig. 1 Semi-elliptical surface crack in a plate

$$M_1 = 1.13 - 0.09\alpha$$

$$M_2 = -0.54 + \frac{0.89}{0.2 + \alpha}$$

$$M_4 = 0.5 - \frac{1}{0.65 + \alpha} + 14(1 - \alpha)^{24}$$

$$g = 1 + \left[0.1 + 0.35 \left(\frac{a}{B}\right)^2 \right] (1 - \sin \eta)^2$$

$$f_1 = \left[\sec\left(\frac{b}{2W} \sqrt{\frac{a}{B}}\right) \right]^{1/2}$$

$$k \equiv 1 - \alpha^2$$

$$0 \leq \alpha \leq 1, \quad b/W < 0.5, \quad 0 \leq \eta \leq \pi, \quad \alpha = a/b \quad (2)$$

Vainshtok⁽¹⁷⁾은 유한체 모델의 균열면에 균일 응력 σ_0 가 균열면에 수직으로 작용할때 균열면에 수직인 변위 u_0 를 다음과 같이 제시하였다.

$$u_0(r, \eta, a, \alpha) = \frac{2\sigma_0 a}{E(k)H} \left[f(\eta, \alpha) \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^{1/2} + F(\eta, \alpha) \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^{3/2} \right] \quad (3)$$

여기서,

$$f(\eta, \alpha) \equiv \frac{K_{I0}}{K_{I\theta}} \quad (4)$$

$$F(\eta, \alpha) = \frac{5\pi}{2E(k)} \mathcal{J}^{-1} \int_0^{\eta} a^2 da \int_0^T f^2(\eta, \alpha) \sqrt{\sin^2 \eta} + \sqrt{\alpha^2 \cos^2 \eta} d\eta - \frac{2}{3} \mathcal{J}^{-1} \int_0^T f(\eta, \alpha) d\eta - f(\eta, \alpha) \quad (5)$$

$$R = a(\sin^2 \theta + \alpha^2 \cos^2 \theta)^{-1/2} \quad (6)$$

여기서, K_{I0} 는 유한체 모델의 균열면에 균일 응력 σ_0 가 작용할때 타원균열의 응력세기계수이며, $K_{I\theta}$ 는 무한체에 내재된 타원균열에 균일 응력 σ_0 가 작용할 때의 응력세기계수이다. r, θ 는 타원균열의 중심을 중심으로 하는 극좌표계(polar coordinate)의 좌표들이며, R 은 타원균열의 중심과 균열윤곽 사이의 거리이다. \mathcal{J} 는 균열부분의 변수각도(parametric angle of crack segment)이며, \mathcal{J} 값은 1/4 타원 모퉁이균열 경우 $\pi/2$, 반타원표면균열 경우 π , 내재된 타원균열 경우 2π 이다. $E(k)$ 는 제2종 완전 타원적분(complete elliptical integral of the 2nd kind)이며, H 는 일반화된 탄성계수(generalized young's modulus)이다.

식(3)에서 균열면 변위의 첫항 계수식 $f(\eta, \alpha)$ 는 식(2)의 $f(\alpha, a/B, b/W, \eta)$ 가 되므로 식(5)에 식(2)를 대입하면 $F(\eta, \alpha)$ 는 다음과 같이 구해진다.

$$F(\eta, \alpha) = \frac{5}{3E(k)} T_1 - \frac{4}{3\pi} T_2 - f(\eta, \alpha) \quad (7)$$

여기서,

$$\begin{aligned}
 T_1 &\equiv \alpha M^2 [q_1(1+f_2)^2 - 4q_2f_2(1+f_2) \\
 &\quad + 2q_3f_2(1+3f_2) - 4q_4f_2^2 + q_5f_2^2] \\
 T_2 &\equiv M[\pi/2 + (3\pi/4 - 2)f_2] \\
 M &\equiv [M_1 + M_2(a/B)^2 + M_4(a/B)^4]f_1 \\
 f_2 &\equiv 0.1 + 0.35(a/B)^2 \\
 q_i &\equiv \frac{1}{2}B_e\left(\frac{i}{2}, \frac{1}{2}\right) F_h\left(\frac{i}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{i+1}{2}, x\right) \\
 x &\equiv 1 - 1/\alpha^2 \quad (i=1, 2, 3, \dots) \quad (8)
 \end{aligned}$$

여기서, $B_e(i, j)$ 는 베타함수(beta function)이고 $F_h(i, j, l, m)$ 는 하이퍼지오메트릭 함수(hypergeometric function)이다.

2.1.2 온도분포 결정

Fig. 2와 같은 내부에 열생성 요소가 없고 두께가 B 인 탄성판을 균일 온도 T_o 로 일정하게 유지하고 $x=B$ 인 면을 단열상태로, $x=0$ 인 면의 온도를 T_o 에서 T_e 로 급속히 냉각하면 넓은 평판의 내부에서는 열의 흐름이 생긴다.

이와 같은 온도변화에 대한 열전도방정식, 경계 조건 및 초기조건은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \Theta(X, \tau)}{\partial X^2} &= \frac{\partial \Theta(X, \tau)}{\partial \tau} \\
 \Theta(0, \tau) &= 0 \quad (X=0) \\
 \frac{\partial \Theta(1, \tau)}{\partial X} &= 0 \quad (X=1) \\
 \Theta(X, 0) &= 1 \quad (0 \leq X \leq 1) \quad (9)
 \end{aligned}$$

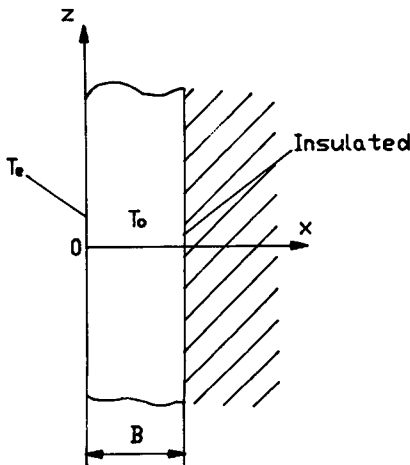


Fig. 2 Uncracked plate with insulated surface under thermal shock loading

여기서,

$$\begin{aligned}
 \Theta(X, \tau) &\equiv \frac{T(X, \tau) - T_e}{T_o - T_e} \\
 X &\equiv \frac{x}{B} \\
 \tau &\equiv \frac{\kappa t}{B^2} \quad (10)
 \end{aligned}$$

여기서, κ 는 열전도계수(heat conduction coefficient), t 는 경과시간이다. T_o 는 열충격 전에 탄성판이 유지한 균일 온도이고, T_e 는 열충격을 탄성판의 $x=0$ 인 면에 가했을 때의 온도이다.

식(9)의 열전도방정식을 변수분리법으로 풀면 다음과 같은 해를 얻는다.⁽¹⁸⁾

$$\Theta(X, \tau) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2(1 - \cos \lambda_m)}{(\lambda_m - \sin \lambda_m)} e^{-\lambda_m^2 \tau} \sin(\lambda_m X) \quad (11)$$

여기서,

$$\lambda_m \equiv \pi(m - 0.5) \quad (12)$$

2.1.3 열응력분포 결정

Fig. 2의 판에서 열응력분포 식은 다음과 같다.⁽¹⁹⁾

$$\begin{aligned}
 \sigma_n &= \frac{1}{(1-\nu)} [-\Theta + 2(2-3X) \int_0^1 \Theta dX \\
 &\quad + 6(2X-1) \int_0^1 \Theta X dX] \quad (13)
 \end{aligned}$$

여기서,

$$\sigma_n \equiv \frac{\sigma_z}{E\alpha_i(T_o - T_e)} \quad (14)$$

여기서, E 는 탄성계수(young's modulus), α_i 는 열팽창계수(thermal expansion coefficient), ν 는 푸아송비(poission ratio)이며, σ_z 는 z 방향의 열탄성 작용 응력이다.

식(11)을 식(13)에 대입하면 열충격하에서 응력분포식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 \sigma_n &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2(1 - \cos \lambda_m)}{(\lambda_m - \sin \lambda_m)} e^{-\lambda_m^2 \tau} \\
 &\quad \{-\sin(\lambda_m X) + C_1 + C_2 X\} \quad (15)
 \end{aligned}$$

여기서,

$$\begin{aligned}
 C_1 &\equiv -\frac{6\sin \lambda_m - 2\lambda_m \cos \lambda_m - 4\lambda_m}{\lambda_m^2} \\
 C_2 &\equiv \frac{12\sin \lambda_m - 6\lambda_m \cos \lambda_m - 6\lambda_m}{\lambda_m^2} \quad (16)
 \end{aligned}$$

열응력식 (15)를 최소자승법(least square method)을 통해 다음과 같은 다항식 형태로 나타낼 수 있다.

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{15} \alpha_i \left(\frac{a}{B}\right)^{i-1} \left(\frac{r}{R}\right)^{i-1} \sin^{i-1} \eta = \alpha_1 + \sum_{i=2}^{15} \sigma_i \quad (17)$$

여기서, α_i 는 최소자승법을 통해 구해진 열응력식의 i 번째 계수이다.

2.1.4 열충격 응력세기계수 결정

Vainshtok⁽¹⁷⁾은 변수 a, b 의 변화에 의해 균열윤곽 변화가 생길때, 유한체의 균열면에 응력 σ_i 가 작용할 때의 응력세기계수 K_{Ii} 와 K_{Io} 사이의 관계식을 다음과 같이 제시했다.

$$\int_r \frac{K_{Io}K_{Ii}}{H} \delta R \Big|_{sa} \cos \varphi d\Gamma = \int_s \sigma_i \delta u_o \Big|_{sa} dS \quad (18)$$

$$\int_r \frac{K_{Io}K_{Ii}}{H} \delta R \Big|_{sb} \cos \varphi d\Gamma = \int_s \sigma_i \delta u_o \Big|_{sb} dS \quad (19)$$

여기서,

$$K_{Ii} \equiv K_{Io} (A_1^{(i)} + A_2^{(i)} \sin^{i-1} \eta) \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \delta R \Big|_{sa} &= \frac{\partial R}{\partial a} \delta a \\ &= \sin^2 \theta (\sin^2 \theta + a^2 \cos^2 \theta)^{-3/2} \delta b \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \delta R \Big|_{sb} &= \frac{\partial R}{\partial b} \delta b \\ &= a^3 \cos^2 \theta (\sin^2 \theta + a^2 \cos^2 \theta)^{-3/2} \delta b \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \delta u_o \Big|_{sa} &= \frac{\partial u_o}{\partial a} \delta a \\ &= \frac{2\sigma_o}{E(k)H} \left[\left[(1-\gamma)f + a \frac{\partial f}{\partial a} \right] \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^{1/2} \right. \\ &\quad + f \frac{r^2}{R^2} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^{-1/2} \sin^2 \eta \\ &\quad + 3F \frac{r^2}{R^2} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^{1/2} \cdot \sin^2 \eta \\ &\quad \left. + \left[(1-\gamma)F + a \frac{\partial F}{\partial a} \right] \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^{3/2} \right] \delta a \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \delta u_o \Big|_{sb} &= \frac{\partial u_o}{\partial b} \delta b \\ &= \frac{2\sigma_o \alpha}{E(k)H} \left[\left(\gamma f + b \frac{\partial f}{\partial a} \right) \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^{1/2} \right. \\ &\quad + f \frac{r^2}{R^2} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^{-1/2} \cos^2 \eta \\ &\quad + 3F \frac{r^2}{R^2} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^{1/2} \cdot \cos^2 \eta \\ &\quad \left. + \left(\gamma F + b \frac{\partial F}{\partial b} \right) \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^{3/2} \right] \delta b \end{aligned} \quad (24)$$

$$\cos \varphi = (\sin^2 \theta + a^2 \cos^2 \theta) (\sin^2 \theta + a^4 \cos^2 \theta)^{-1/2} \quad (25)$$

$$d\Gamma = b \sqrt{\sin^2 \eta + a^2 \cos^2 \eta} d\eta \quad (26)$$

$$dS = \frac{abr}{R^2} dr d\eta \quad (27)$$

$$\gamma = \frac{a^2}{k^2} \left(\frac{K(k)}{E(k)} - 1 \right) \quad (28)$$

$$\sin^2 \eta + a^2 \cos^2 \eta = \frac{\sin^2 \theta + a^4 \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta + a^2 \cos^2 \theta} \quad (29)$$

여기서, ϕ 는 타원균열 윤곽에 수직인 성분과 R 사이의 각도이다. dS 는 균열면의 적분요소이며, $d\Gamma$ 는 균열윤곽의 적분요소이다. $K(k)$ 는 제1종 완전 타원적분(complete elliptical integral of the 1st kind)이다.

Fig. 1의 모델은 a, b 의 변화에 따른 균열윤곽의 변화를 고려한 2자유도 문제이므로 식(23), (24)에 식(2), (7), (28)을 대입하여 얻은 결과식과 식(1), (20), (21), (22), (25)~(27)과 식(17)의 σ_i 를 식(18), (19)에 대입하고 식(29)를 이용하여 정리하면 다음과 같은 연립방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} P_{11}^{(i)} A_1^{(i)} + P_{12}^{(i)} A_2^{(i)} &= V_1^{(i)} \\ P_{21}^{(i)} A_1^{(i)} + P_{22}^{(i)} A_2^{(i)} &= V_2^{(i)} \\ &(i=2, 3, 4, \dots, 15) \end{aligned} \quad (30)$$

여기서,

$$\begin{aligned} P_{11}^{(i)} &= \alpha M^2 [q_3(1+f_2)^2 - 4q_4 f_2(1+f_2) \\ &\quad + 2q_5 f_2(1+3f_2) - 4q_6 f_2^2 + q_7 f_2^2] \\ P_{21}^{(i)} &= T_1 - P_{11}^{(i)} \\ P_{12}^{(i)} &= \alpha M^2 [q_{i+2}(1+f_2)^2 - 4q_{i+3} f_2(1+f_2) \\ &\quad + 2q_{i+4} f_2(1+3f_2) - 4q_{i+5} f_2^2 + q_{i+6} f_2^2] \\ P_{22}^{(i)} &= \alpha M^2 [q_i(1+f_2)^2 - 4q_{i+1} f_2(1+f_2) \\ &\quad + 2q_{i+2} f_2(1+3f_2) - 4q_{i+3} f_2^2 + q_{i+4} f_2^2] - P_{12}^{(i)} \\ V_1^{(i)} &= \alpha_i \frac{2E(k)}{\pi \sigma_o} \left(\frac{a}{B}\right)^{i-1} [D_1^{(i)} [(1-\gamma) Q_1^{(i)} + Q_2^{(i)}] \\ &\quad + D_2^{(i)} Q_1^{(i+2)} + D_3^{(i)} Q_3^{(i+2)} \\ &\quad + D_4^{(i)} [(1-\gamma) Q_3^{(i)} + Q_4^{(i)}]] \\ V_2^{(i)} &= \alpha_i \frac{2E(k)}{\pi \sigma_o} \left(\frac{a}{B}\right)^{i-1} [D_1^{(i)} [\gamma Q_1^{(i)} + Q_5^{(i)}] \\ &\quad + D_2^{(i)} [Q_1^{(i)} - Q_1^{(i+2)}] + D_3^{(i)} [Q_3^{(i)} - Q_3^{(i+2)}] \\ &\quad + D_4^{(i)} [\gamma Q_3^{(i)} + Q_6^{(i)}]] \\ D_1^{(i)} &= \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(i/2 + 1/2)}{4\Gamma(i/2 + 2)} \\ D_2^{(i)} &= \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(i/2 + 3/2)}{2\Gamma(i/2 + 2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D_3^{(i)} &= \frac{3\sqrt{\pi}\Gamma(i/2+3/2)}{4\Gamma(i/2+3)} \\
 D_4^{(i)} &= \frac{3\sqrt{\pi}\Gamma(i/2+1/2)}{8\Gamma(i/2+3)} \\
 Q_1^{(i)} &= M \left[2^{i-2}(1+f_2) B_e\left(\frac{i}{2}, \frac{i}{2}\right) \right. \\
 &\quad - 2^i f_2 B_e\left(\frac{i+1}{2}, \frac{i+1}{2}\right) \\
 &\quad \left. + 2^i f_2 B_e\left(\frac{i+2}{2}, \frac{i+2}{2}\right) \right] \\
 Q_2^{(i)} &= M_a \left[2^{i-2}(1+f_2) B_e\left(\frac{i}{2}, \frac{i}{2}\right) \right. \\
 &\quad - 2^i f_2 B_e\left(\frac{i+1}{2}, \frac{i+1}{2}\right) \\
 &\quad \left. + 2^i f_2 B_e\left(\frac{i+1}{2}, \frac{i+1}{2}\right) \right] \\
 &\quad + M \left[2^{i-2}(1+f_2) B_e\left(\frac{i}{2}, \frac{i}{2}\right) \right. \\
 &\quad - 2^i f_2 B_e\left(\frac{i+1}{2}, \frac{i+1}{2}\right) \\
 &\quad \left. + 2^i f_2 B_e\left(\frac{i+2}{2}, \frac{i+2}{2}\right) \right] \\
 Q_3^{(i)} &= 2^{i-2} \left[\frac{5T_1}{3E(k)} - \frac{4T_2}{3\pi} \right] B_e\left(\frac{i}{2}, \frac{i}{2}\right) - Q_1^{(i)} \\
 Q_4^{(i)} &= 2^{i-2} a \left[\frac{5U_1}{3E^2(k)} - \frac{4U_2}{3\pi} \right] B_e\left(\frac{i}{2}, \frac{i}{2}\right) - Q_2^{(i)} \\
 Q_5^{(i)} &= M_b \left[2^{i-2}(1+f_2) B_e\left(\frac{i}{2}, \frac{i}{2}\right) \right. \\
 &\quad - 2^i f_2 B_e\left(\frac{i+1}{2}, \frac{i+1}{2}\right) \\
 &\quad \left. + 2^i f_2 B_e\left(\frac{i+2}{2}, \frac{i+2}{2}\right) \right] \\
 Q_6^{(i)} &= 2^{i-2} b \left[\frac{5W_1}{3E^2(k)} - \frac{4W_2}{3\pi} \right] B_e\left(\frac{i}{2}, \frac{i}{2}\right) - Q_3^{(i)} \\
 M_a &\equiv a \frac{\partial M}{\partial a} \\
 M_b &\equiv b \frac{\partial M}{\partial b} \\
 f_2 &\equiv a \frac{\partial f_2}{\partial a} \\
 U_1 &\equiv \frac{\partial T_1}{\partial a} E(k) - \frac{\partial E(k)}{\partial a} T_1 \\
 U_2 &\equiv \frac{\partial T_2}{\partial a} \\
 W_1 &\equiv \frac{\partial T_1}{\partial b} E(k) - \frac{\partial E(k)}{\partial b} T_1 \\
 W_2 &\equiv \frac{\partial T_2}{\partial b}
 \end{aligned} \tag{31}$$

여기서, $\Gamma(i, j)$ 는 감마함수(gamma function)을 나타낸다.

식(30)을 연립하면 각각의 i 에 대해 $A_1^{(i)}, A_2^{(i)}$ 를 구할 수 있다. 최종적으로 열충격 응력세기계수는 중첩원리로부터 각각의 i 에 대한 응력세기계수의 합으로 구해질 수 있다. 결과적인 열충격 응력세기계수 식 K_I 은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 K_I &= \sum_{i=1}^{15} K_{Ii} \\
 &\equiv K_{Io} \alpha_1 / \sigma_o + \sum_{i=2}^{15} K_{Io} (A_1^{(i)} + A_2^{(i)} \sin^{i-1} \eta) \tag{32}
 \end{aligned}$$

무차원 열충격 응력세기계수 K_{Im} 을 다음과 같이 정의한다.

$$K_{Im} \equiv \frac{K_I}{\sqrt{B}} \tag{33}$$

2.2 원심력과 열하중이 작용시 터빈축차내에 내재된 타원균열

2.2.1 균열면 변위 결정

터빈축차의 반경방향 두께와 내부 반경에 비하여 내부 표면에 인접하게 내재된 타원균열의 크기는 상대적으로 매우 작으므로 반무한체내에 내재된 타원균열의 경우로 가정한다. Fig. 3에서 보는 바와 같이 반무한체내에 표면과 수직으로 내재된 타원균열의 균열면에 일정 균일 응력 σ_o 가 작용할때 응력세기계수식 K_{Io} 는 다음과 같다.⁽⁶⁾

$$K_{Io} = \frac{\sigma_o \sqrt{\pi a}}{E(k)} (\sin^2 \eta + a^2 \cos^2 \eta)^{1/4} f(a, \lambda, \eta) \tag{34}$$

여기서,

$$f(a, \lambda, \eta) = \begin{cases} H_1 & 0 \leq \eta \leq \pi \\ H_1 + H_2 \sin^2 \eta & -\pi \leq \eta \leq 0 \end{cases}$$

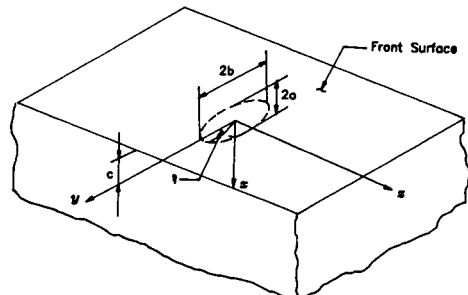


Fig. 3 An embedded elliptical crack geometry in a semi-infinite body

$$\begin{aligned}
 H_1 &\equiv M_1 \\
 H_2 &\equiv M_2 - M_1 \\
 M_1 &= e^{\zeta_1 \lambda^2 + \zeta_2 \lambda^3 + \zeta_3 \lambda^4} \\
 M_2 &= e^{\xi_1 \lambda^2 + \xi_2 \lambda^3 + \xi_3 \lambda^4} \\
 \zeta_1 &= 0.2597 - 1.251\alpha + 1.920\alpha^2 - 0.9348\alpha^3 \\
 \zeta_2 &= -0.1631 + 2.233\alpha - 4.270\alpha^2 + 2.277\alpha^3 \\
 \zeta_3 &= 0.1327 - 1.424\alpha + 2.681\alpha^2 - 1.428\alpha^3 \\
 \xi_1 &= 0.3826 - 1.399\alpha + 2.037\alpha^2 - 0.9213\alpha^3 \\
 \xi_2 &= -0.4698 + 2.446\alpha - 4.892\alpha^2 + 2.557\alpha^3 \\
 \xi_3 &= 0.7965 - 1.594\alpha + 2.931\alpha^2 + 1.565\alpha^3 \\
 0.3 &\leq \alpha \leq 1
 \end{aligned} \tag{35}$$

식(3)에서 균열면 변위의 첫항 계수식 $f(\eta, \alpha)$ 는 식(35)의 $f(\alpha, \lambda, \eta)$ 가 되므로 식(5)에 식(35)를 대입하면 $F(\eta, \alpha)$ 는 다음과 같이 구해진다.

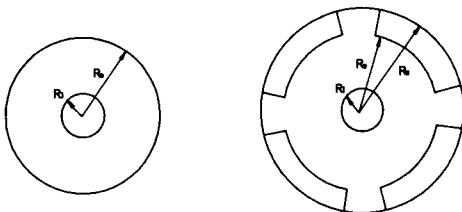
$$F(\eta, \alpha) = \frac{5}{6E(k)} T_1 - \frac{2}{3} T_2 - f(\eta, \alpha) \tag{36}$$

여기서,

$$\begin{aligned}
 T_1 &\equiv 2E(k)H_1^2 + 2q_3H_1H_2 + q_5H_2^2 \\
 T_2 &\equiv H_1 + \frac{H_2}{4} \\
 q_i &\equiv \frac{1}{2} Be\left(\frac{i}{2}, \frac{i}{2}\right) F_h\left(\frac{i}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{i+1}{2}, x\right) \\
 &\quad (i=1, 2, 3, \dots)
 \end{aligned} \tag{37}$$

2.2.2 온도분포 결정

터빈축차에 작용하는 응력을 엄밀해(closed-form solution)로 구하기 위해 터빈축차의 횡단면 형상을 Fig. 4에서와 같이 나타내고 있다.⁽²⁰⁾ 이 횡단면 형상중 온도분포를 엄밀해로 구할 수 있는 것은 저널의 횡단면 형상을 가진 것으로서 두께 방향으로 온도구배를 가지는 원판으로 가정할 수 있다.



(a) Journal section (b) Field section 4 pole rotor
Fig. 4 Cross-section considered in closed-form solution

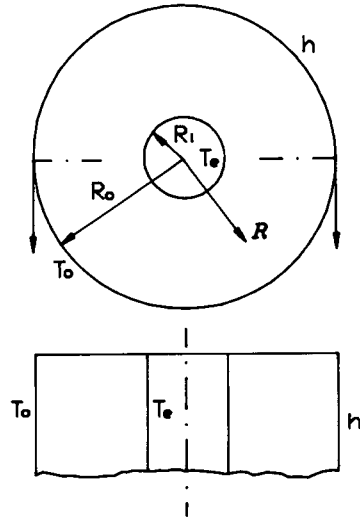


Fig. 5 Uncracked disc

Fig. 5와 같이 내부에 열생성 요소가 없고 내벽의 온도가 T_e 이고 원판의 외벽 주위가 T_o 일 때 열전달방정식, 경계조건은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 \Re_{R_o - R_i} \frac{\partial^2 \Theta(R)}{\partial R^2} + \frac{\partial \Theta(R)}{\partial R} &= 0 \\
 \Theta(0) &= 0 \quad (R=0) \\
 \frac{\partial \Theta(1)}{\partial R} + h[\Theta(1) - 1] &= 0 \quad (R=1)
 \end{aligned} \tag{38}$$

여기서,

$$\begin{aligned}
 \Theta(R) &\equiv \frac{T(R) - T_e}{T_o - T_e} \\
 R &\equiv \frac{\Re - R_i}{R_o - R_i}
 \end{aligned} \tag{39}$$

여기서, \Re 은 Fig. 5에서 보는 바와 같이 원판 축으로부터의 거리이다.

식(38)의 열전달방정식을 풀면 다음과 같은 해를 얻는다.⁽²¹⁾

$$\Theta(\Re) = 1 + \frac{hR_o \ln(\Re/R_o) - 1}{A_q} \tag{40}$$

여기서,

$$A_q \equiv 1 + hR_o \ln\left(\frac{R_o}{R_i}\right) \tag{41}$$

여기서, h 는 대류 열전달계수(convection heat transfer coefficient)이다. 대류 열전달계수는 터빈축차 주위의 유체의 양과 성질에 따라 다음식으로 표현된다.⁽²⁰⁾

$$h=0.98\left(\frac{\kappa}{2\Delta}\right)\left(\frac{M}{A}\frac{2\Delta}{\mu}\right)^{0.6}\left(\frac{r_d}{\Delta}\right)^{-0.56} \quad (Re \leq 6000)$$

$$h=0.41\left(\frac{\kappa}{2\Delta}\right)\left(\frac{M}{A}\frac{2\Delta}{\mu}\right)^{0.7}\left(\frac{r_d}{\Delta}\right)^{-0.56} \quad (Re > 6000)$$
(42)

여기서, M 은 증기의 질량유동, A 는 실(seal)의 횡단면적, r_d 는 실케이싱(seal casing)과 축차 표면 사이의 방사방향거리, Δ 는 실핀(seal fin)과 축차사이의 빈틈거리(clearance), κ 는 열전도도(thermal conductivity), μ 는 증기의 점도(viscosity), Re 는 레이놀즈수(Reynolds number)이다.

2.2.3 열응력분포 결정

열탄성학에서는 평면변형률 상태의 원판에 대한 무차원 열응력 σ_{n0} 는 다음 식으로 주어진다.⁽¹⁹⁾

$$\sigma_{n0} = \frac{1}{(1-\nu)\mathfrak{R}^2} \left[\frac{\mathfrak{R}^2 + R_i^2}{R_o^2 - R_i^2} \int_{R_i}^{R_i} \Theta \mathfrak{R} d\mathfrak{R} + \int_{R_i}^{\mathfrak{R}} \Theta \mathfrak{R} d\mathfrak{R} - \Theta \mathfrak{R}^2 \right] \quad (43)$$

여기서,

$$\sigma_{n0} \equiv \frac{\sigma_{\theta 0}}{E\alpha_t(T_o - T_e)} \quad (44)$$

여기서, $\sigma_{\theta 0}$ 는 원주방향 열탄성 작용응력이다.

식(40)을 식(43)에 대입 정리하면 다음과 같은 열응력식이 나온다.

$$\sigma_{n0} = \frac{1}{(1-\nu)A_0\mathfrak{R}^2} \left[-\frac{R_o h}{2} \mathfrak{R}^2 + \frac{R_o h}{2} \mathfrak{R}^2 \ln\left(\frac{R_o}{\mathfrak{R}}\right) + \frac{R_o h}{2} R_i^2 \ln\left(\frac{R_o}{R_i}\right) + \frac{R_o h}{2} \ln\left(\frac{R_o}{R_i}\right) R_i^2 \frac{\mathfrak{R}^2 + R_i^2}{R_o^2 - R_i^2} \right] \quad (45)$$

열응력식(45)를 최소자승법(least square method)을 통해 다음과 같은 다항식 형태로 나타낼 수 있다.

$$\sigma_{n0} = \alpha_1 \sum_{i=2}^{15} \alpha_i \left(\frac{a}{B}\right)^i \left(\frac{r}{R}\right)^i \sin^i \eta$$

$$= \alpha_1 + \sum_{i=2}^{15} \sigma_{0i} \quad (46)$$

여기서, α_i 는 최소자승법을 통해 구해진 열응력식의 i 번째 계수이다.

2.2.4 원심력에 의한 원주방향 응력 결정

터빈축차가 회전하여 원심력이 발생한다. 이 원

심력에 의한 원주방향 응력을 EPRI에서는 Fig. 4에서와 같은 저널의 횡단면 형상과 4폴 축차(4-pole rotor)의 횡단면 형상을 가진 각각의 터빈축차들에 대해 엄밀해로 다음과 같이 제시하고 있다.⁽²⁰⁾

$$\Sigma_{\theta 1} = \sigma_{\theta 1} \quad (\text{저널 횡단면 형상}) \quad (47)$$

$$\Sigma_{\theta 2} = \sigma_{\theta 1} + \sigma_{\theta 2} \quad (\text{4폴 축차 횡단면 형상}) \quad (48)$$

여기서,

$$\sigma_{\theta 1} = \frac{(3+\nu)\Psi\omega^2}{3091.2} \left[R_o^2 + R_i^2 + \frac{R_o^2 R_i^2}{\mathfrak{R}^2} - \frac{1+3\nu}{3+\nu} \mathfrak{R}^2 \right] \quad (49)$$

$$\sigma_{\theta 2} = \frac{\Psi\omega^2 R_o [R_o^2 - R_i^2]}{1159.2 [R_o^2 - R_i^2]} \frac{R_i^2 + R_o^2}{\mathfrak{R}^2} \quad (50)$$

여기서, R_i (inch)는 구멍의 반경(inside radius of bore), R_o (inch)는 축차 몸통단면의 바깥반경(outside radius of solid section of rotor), R_s (inch)는 전체 단면의 바깥반경(outside radius of field section), Ψ (lb/inch³)는 재료의 밀도, ω (rad/sec)는 회전 각속도이다.

식(47)와 식(48)을 다음과 같이 무차원화 시키자.

$$\sigma_{n1} \equiv \frac{\Sigma_{\theta 1}}{\sigma_m} \quad (51)$$

$$\sigma_{n2} \equiv \frac{\Sigma_{\theta 2}}{\sigma_m} \quad (52)$$

여기서,

$$\sigma_m \equiv \frac{3+\nu}{1545.6} \Psi\omega^2 \left(R_o^2 + \frac{1-\nu}{3-\nu} R_i^2 \right) \quad (53)$$

원심력에 의한 응력식(51), (52)를 최소자승법을 통해 다음과 같은 다항식 형태로 각각 나타낼 수 있다.

$$\sigma_{n1} = \beta_1 + \sum_{i=2}^{15} \beta_i \left(\frac{a}{B}\right)^i \left(\frac{r}{R}\right)^i \sin^i \eta$$

$$= \beta_1 + \sum_{i=2}^{15} \sigma_{1i} \quad (54)$$

$$\sigma_{n2} = \gamma_1 + \sum_{i=2}^{15} \gamma_i \left(\frac{a}{B}\right)^i \left(\frac{r}{R}\right)^i \sin^i \eta$$

$$= \gamma_1 + \sum_{i=2}^{15} \sigma_{2i} \quad (55)$$

여기서, β_i 는 최소자승법을 통해 구해진 응력식(54)의 i 번째 계수이며, γ_i 는 최소자승법을 통해 구해진 응력식(55)의 i 번째 계수이다.

2.2.5 응력세기계수 결정

Vainshtok⁽¹⁷⁾은 변수 a, b, c 의 변화에 대해 균열윤곽 변화가 생길때, 유한체의 균열면에 응력 σ_i 가 작용할 때의 응력세기계수 K_{Ii} 와 K_{I0} 사이의 관계식을 다음과 같이 제시하였다.

$$\int_r \frac{K_{I0}K_{Ii}}{H} \delta R |_{aa} \cos \varphi d\Gamma = \int_s \sigma_i \delta u_o |_{aa} dS \quad (56)$$

$$\int_r \frac{K_{I0}K_{Ii}}{H} \delta R |_{bb} \cos \varphi d\Gamma = \int_s \sigma_i \delta u_o |_{bb} dS \quad (57)$$

$$\int_r \frac{K_{I0}K_{Ii}}{H} \delta R |_{cc} \cos \varphi d\Gamma = \int_s \sigma_i \delta u_o |_{cc} dS \quad (58)$$

여기서,

$$\delta R |_{cc} = \left[\frac{\partial R}{\partial c} - \frac{\partial R}{\partial x} \right] \delta c \\ = \sin \eta (\sin^2 \theta + a^2 \cos^2 \theta)^{-1/2} \delta c \quad (59)$$

$$\delta u_o |_{cc} = \left[\frac{\partial u_o}{\partial c} - \frac{\partial u_o}{\partial x} \right] \delta c \\ = \frac{2\sigma_o a}{E(k)H} \left[\frac{\partial f}{\partial c} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right)^{1/2} \right. \\ \left. + f \frac{r^2}{R^2} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right)^{-1/2} \sin \eta \right. \\ \left. + af \frac{r}{R^3} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right)^{-1/2} \cdot \sin \eta \right. \\ \left. + 3F \frac{r^2}{R^2} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right)^{1/2} \sin \eta \right. \\ \left. + 3aF \frac{r}{R^3} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right)^{1/2} \sin \eta \right. \\ \left. + \frac{\partial F}{\partial c} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right)^{3/2} \right] \delta c \quad (60)$$

응력들 $\sigma_{n0}, \sigma_{n1}, \sigma_{n2}$ 가 균열면에 각각 작용할때 각각의 응력에 대한 응력세기계수 $K_{I0i}, K_{I1i}, K_{I2i}$ 를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$K_{I0i} \equiv K_{I0} (A_{0i}^{(i)} + A_{02}^{(i)} \sin^i \eta + A_{03}^{(i)} \sin \eta) \\ (i=1, 2, 3, \dots, 15) \quad (61)$$

$$K_{I1i} \equiv K_{I0} (A_{1i}^{(i)} + A_{12}^{(i)} \sin^i \eta + A_{13}^{(i)} \sin \eta) \\ (i=1, 2, 3, \dots, 15) \quad (62)$$

$$K_{I2i} \equiv K_{I0} (A_{2i}^{(i)} + A_{22}^{(i)} \sin^i \eta + A_{23}^{(i)} \sin \eta) \\ (i=1, 2, 3, \dots, 15) \quad (63)$$

Fig. 3의 모델은 a, b, c 의 변화에 따른 균열윤곽의 변화를 고려한 3자유도 문제이므로 식(23), (24), (60)에 식(35), (36), (28)을 대입하여 얻은 결과식과 식(34), (21), (22), (59), (25)~(27)과 식(46), (54), (55)의 $\sigma_{0i}, \sigma_{1i}, \sigma_{2i}$ 와 식(61), (62), (63)을 식(56), (57), (58)에 대입하고 식(29)를 이용하여 정리하면 다음과 같은 연립방정식을 얻을

수 있다.

$$P_{11}^{(i)} A_{01}^{(i)} + P_{12}^{(i)} A_{02}^{(i)} + P_{13}^{(i)} A_{03}^{(i)} = V_{01}^{(i)} \\ P_{21}^{(i)} A_{01}^{(i)} + P_{22}^{(i)} A_{02}^{(i)} + P_{23}^{(i)} A_{03}^{(i)} = V_{02}^{(i)} \\ P_{31}^{(i)} A_{01}^{(i)} + P_{32}^{(i)} A_{02}^{(i)} + P_{33}^{(i)} A_{03}^{(i)} = V_{03}^{(i)} \\ (i=2, 3, 4, \dots, 15) \quad (64)$$

$$P_{11}^{(i)} A_{11}^{(i)} + P_{12}^{(i)} A_{12}^{(i)} + P_{13}^{(i)} A_{13}^{(i)} = V_{11}^{(i)} \\ P_{21}^{(i)} A_{11}^{(i)} + P_{22}^{(i)} A_{12}^{(i)} + P_{23}^{(i)} A_{13}^{(i)} = V_{12}^{(i)} \\ P_{31}^{(i)} A_{11}^{(i)} + P_{32}^{(i)} A_{12}^{(i)} + P_{33}^{(i)} A_{13}^{(i)} = V_{13}^{(i)} \\ (i=2, 3, 4, \dots, 15) \quad (65)$$

$$P_{11}^{(i)} A_{21}^{(i)} + P_{12}^{(i)} A_{22}^{(i)} + P_{13}^{(i)} A_{23}^{(i)} = V_{21}^{(i)} \\ P_{21}^{(i)} A_{21}^{(i)} + P_{22}^{(i)} A_{22}^{(i)} + P_{23}^{(i)} A_{23}^{(i)} = V_{22}^{(i)} \\ P_{31}^{(i)} A_{21}^{(i)} + P_{32}^{(i)} A_{22}^{(i)} + P_{33}^{(i)} A_{23}^{(i)} = V_{23}^{(i)} \\ (i=2, 3, 4, \dots, 15) \quad (66)$$

여기서,

$$P_{11}^{(i)} = 4q_3 H_1^2 + 4q_5 H_1 H_2 + 2q_7 H_2^2 \\ P_{12}^{(i)} = \begin{cases} 4q_{i+3} H_1^2 + 4q_{i+5} H_1 H_2 + 2q_{i+7} H_2^2 \\ (i=2, 4, 6, \dots, 14) \\ -4q_{i+5} H_1 H_2 - 2q_{i+7} H_2^2 \\ (i=3, 5, 7, \dots, 15) \end{cases}$$

$$P_{13}^{(i)} = -4q_6 H_1 H_2 - 2q_8 H_2^2 \\ P_{21}^{(i)} = 4E(k) H_1^2 + 4q_3 H_1 H_2 + 2q_5 H_2^2 \\ P_{22}^{(i)} = \begin{cases} 4q_{i+1} H_1^2 + 4q_{i+3} H_1 H_2 + 2q_{i+5} H_2^2 \\ (i=2, 4, 6, \dots, 14) \\ -4q_{i+3} H_1 H_2 - 2q_{i+5} H_2^2 \\ (i=3, 5, 7, \dots, 15) \end{cases}$$

$$P_{23}^{(i)} = -4q_4 H_1 H_2 - 2q_6 H_2^2 \\ P_{31}^{(i)} = -4q_4 H_1 H_2 - 2q_6 H_2^2 \\ P_{32}^{(i)} = \begin{cases} -4q_{i+4} H_1 H_2 - 2q_{i+6} H_2^2 \\ (i=2, 4, 6, \dots, 14) \\ 4q_{i+2} H_1^2 + 4q_{i+4} H_1 H_2 + 2q_{i+6} H_2^2 \\ (i=3, 5, 7, \dots, 15) \end{cases}$$

$$P_{33}^{(i)} = 4q_3 H_1^2 + 4q_5 H_1 H_2 + 2q_7 H_2^2 \\ V_{01}^{(i)} = \alpha \frac{2E(k)}{\pi \sigma_o} \left(\frac{a}{B} \right)^i [E^{(i)}[(1-\gamma) Q_1^{(i)} + Q_2^{(i)}] \\ + E_2^{(i)} Q_1^{(i+2)} + E_3^{(i)} Q_3^{(i+2)} \\ + E_4^{(i)} [(1-\gamma) Q_3^{(i)} + Q_4^{(i)}]]$$

$$V_{02}^{(i)} = \alpha \frac{2E(k)}{\pi \sigma_o} \left(\frac{a}{B} \right)^i [E^{(i)}[\gamma Q_1^{(i)} + Q_5^{(i)}] \\ + E_2^{(i)} [Q_1^{(i)} - Q_1^{(i+2)}] + E_3^{(i)} [Q_3^{(i)} - Q_3^{(i+2)}] \\ + E_4^{(i)} [\gamma Q_3^{(i)} + Q_8^{(i)}]]$$

$$V_{03}^{(i)} = \alpha \frac{2E(k)}{\pi \sigma_o} \left(\frac{a}{B} \right)^i [aE^{(i)} Q_1^{(i)} + E_2^{(i)} Q_8^{(i)} \\ + a^2 E_2^{(i-1)} Q_1^{(i)} + E_3^{(i)} Q_8^{(i)}]$$

$$\begin{aligned}
 & +3a^2 E_1^{(i+1)} Q_{12}^{(i)} + a E_4^{(i)} Q_{10}^{(i)} \\
 V_{11}^{(i)} = & \beta_i \frac{2E(k)}{\pi\sigma_0} \left(\frac{a}{B}\right)^i [E_1^{(i)}[(1-\gamma)Q_1^{(i)} + Q_2^{(i)}] \\
 & + E_2^{(i)} Q_1^{(i+2)} \\
 & + E_3^{(i)} Q_3^{(i+2)} + E_4^{(i)}[(1-\gamma)Q_3^{(i)} + Q_4^{(i)}] \\
 V_{12}^{(i)} = & \beta_i \frac{2E(k)}{\pi\sigma_0} \left(\frac{a}{B}\right)^i [E_1^{(i)}[\gamma Q_1^{(i)} + Q_5^{(i)}] \\
 & + E_2^{(i)}[Q_1^{(i)} - Q_1^{(i+2)}] + E_3^{(i)}[Q_3^{(i)} - Q_3^{(i+2)}] \\
 & + E_4^{(i)}[\gamma Q_3^{(i)} + Q_6^{(i)}] \\
 V_{13}^{(i)} = & \beta_i \frac{2E(k)}{\pi\sigma_0} \left(\frac{a}{B}\right)^i [a E_1^{(i)} Q_7^{(i)} + E_2^{(i)} Q_8^{(i)} \\
 & + a^2 E_2^{(i-1)} Q_{11}^{(i)} + E_3^{(i)} Q_3^{(i+2)} \\
 & + 3a^2 E_1^{(i+1)} Q_{12}^{(i)} + a E_4^{(i)} Q_{10}^{(i)}] \\
 V_{21}^{(i)} = & \gamma_i \frac{2E(k)}{\pi\sigma_0} \left(\frac{a}{B}\right)^i [E_1^{(i)}[(1-\gamma)Q_1^{(i)} + Q_2^{(i)}] \\
 & + E_2^{(i)} Q_1^{(i+2)} + E_3^{(i)} Q_3^{(i+2)} \\
 & + E_4^{(i)}[(1-\gamma)Q_3^{(i)} + Q_4^{(i)}] \\
 V_{22}^{(i)} = & \gamma_i \frac{2E(k)}{\pi\sigma_0} \left(\frac{a}{B}\right)^i [E_1^{(i)}[\gamma Q_1^{(i)} + Q_5^{(i)}] \\
 & + E_3^{(i)}[Q_1^{(i)} - Q_1^{(i+2)}] + E_3^{(i)}[Q_3^{(i)} - Q_3^{(i+2)}] \\
 & + E_4^{(i)}[\gamma Q_3^{(i)} + Q_6^{(i)}] \\
 V_{23}^{(i)} = & \gamma_i \frac{2E(k)}{\pi\sigma_0} \left(\frac{a}{B}\right)^i [a E_1^{(i)} Q_7^{(i)} + E_2^{(i)} Q_8^{(i)} \\
 & + a^2 E_2^{(i-1)} Q_{11}^{(i)} + E_3^{(i)} Q_3^{(i)} \\
 & + 3a^2 E_1^{(i+1)} Q_{12}^{(i)} + a E_4^{(i)} Q_{10}^{(i)}] \\
 E_1^{(i)} = & \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(i/2+1)}{4\Gamma(i/2+5/2)} \\
 E_2^{(i)} = & \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(i/2+2)}{2\Gamma(i/2+5/2)} \\
 E_3^{(i)} = & \frac{3\sqrt{\pi}\Gamma(i/2+2)}{4\Gamma(i/2+7/2)} \\
 E_4^{(i)} = & \frac{3\sqrt{\pi}\Gamma(i/2+1)}{8\Gamma(i/2+7/2)} \\
 Q_1^{(i)} = & \begin{cases} 2^{i+1} H_1 B_e \left(\frac{i+1}{2}, \frac{i+1}{2}\right) + 2^{i+2} H_2 B_e \left(\frac{i+3}{2}, \frac{i+3}{2}\right) & (i=2, 4, 6, \dots, 14) \\ -2^{i+2} H_2 B_e \left(\frac{i+3}{2}, \frac{i+3}{2}\right) & (i=3, 5, 7, \dots, 15) \end{cases} \\
 Q_2^{(i)} = & \begin{cases} 2^{i+1} a A_1 B_e \left(\frac{i+1}{2}, \frac{i+1}{2}\right) + 2^{i+2} a A_2 B_e \left(\frac{i+3}{2}, \frac{i+3}{2}\right), & (i=2, 4, 6, \dots, 14) \\ \frac{i+3}{2} & (i=3, 5, 7, \dots, 15) \\ -2^{i+2} a A_2 B_e \left(\frac{i+3}{2}, \frac{i+3}{2}\right) & (i=3, 5, 7, \dots, 15) \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Q_3^{(i)} = & \begin{cases} 2^{i+1} \left[\frac{5}{6E(k)} T_1 - \frac{2}{3} T_2 \right] B_e \left(\frac{i+1}{2}, \frac{i+1}{2}\right) - Q_1^{(i)} & (i=2, 4, 6, \dots, 14) \\ -Q_1^{(i)} & (i=3, 5, 7, \dots, 15) \end{cases} \\
 Q_4^{(i)} = & \begin{cases} 2^{i+1} \left[\frac{5}{6E^2(k)} J_1 - \frac{2}{3} H_a \right] B_e \left(\frac{i+1}{2}, \frac{i+1}{2}\right) - Q_2^{(i)} & (i=2, 4, 6, \dots, 14) \\ -Q_2^{(i)} & (i=3, 5, 7, \dots, 15) \end{cases} \\
 Q_5^{(i)} = & \begin{cases} 2^{i+1} b B_1 B_e \left(\frac{i+1}{2}, \frac{i+1}{2}\right) + 2^{i+2} b B_2 B_e \left(\frac{i+3}{2}, \frac{i+3}{2}\right) & (i=2, 4, 6, \dots, 14) \\ \frac{i+3}{2} & (i=3, 5, 7, \dots, 15) \\ -2^{i+2} b B_2 B_e \left(\frac{i+3}{2}, \frac{i+3}{2}\right) & (i=3, 5, 7, \dots, 15) \end{cases} \\
 Q_6^{(i)} = & \begin{cases} 2^{i+1} b \left[\frac{5}{6E^2(k)} J_2 - \frac{2}{3} H_b \right] B_e \left(\frac{i+1}{2}, \frac{i+1}{2}\right) - Q_5^{(i)} & (i=2, 4, 6, \dots, 14) \\ -Q_5^{(i)} & (i=3, 5, 7, \dots, 15) \end{cases} \\
 Q_7^{(i)} = & \begin{cases} H_1 2^{i+1} B_e \left(\frac{i+1}{2}, \frac{i+1}{2}\right) + 2^{i+2} H_2 B_e \left(\frac{i+3}{2}, \frac{i+3}{2}\right) & (i=2, 4, 6, \dots, 14) \\ -2^{i+2} H_2 B_e \left(\frac{i+3}{2}, \frac{i+3}{2}\right) & (i=3, 5, 7, \dots, 15) \end{cases} \\
 Q_8^{(i)} = & \begin{cases} -2^{i+3} H_2 B_e \left(\frac{i+4}{2}, \frac{i+4}{2}\right) & (i=2, 4, 6, \dots, 14) \\ H_1 2^{i+2} B_e \left(\frac{i+2}{2}, \frac{i+2}{2}\right) + 2^{i+3} H_2 B_e \left(\frac{i+4}{2}, \frac{i+4}{2}\right) & (i=3, 5, 7, \dots, 15) \end{cases} \\
 Q_9^{(i)} = & \begin{cases} -Q_8^{(i)} & (i=2, 4, 6, \dots, 14) \\ 2^{i+2} \left[\frac{5}{6E(k)} T_1 - \frac{2}{3} T_2 \right] B_e \left(\frac{i+2}{2}, \frac{i+2}{2}\right) - Q_8^{(i)} & (i=3, 5, 7, \dots, 15) \end{cases} \\
 Q_{10}^{(i)} = & \begin{cases} 2^{i+1} \left[\frac{5}{6E(k)} T_c - \frac{2}{3} H_c \right] B_e \left(\frac{i+1}{2}, \frac{i+1}{2}\right) - Q_1^{(i)} & (i=2, 4, 6, \dots, 14) \\ -Q_1^{(i)} & (i=3, 5, 7, \dots, 15) \end{cases} \\
 Q_{11}^{(i)} = & \begin{cases} -2\delta_{i+3} H_2 & (i=2, 4, 6, \dots, 14) \\ 4\delta_{i+1} H_1 + 2\delta_{i+3} H_2 & (i=3, 5, 7, \dots, 15) \end{cases} \\
 Q_{12}^{(i)} = & \begin{cases} -Q_{11}^{(i)} & (i=2, 4, 6, \dots, 14) \\ 4\delta_{i+1} \left[\frac{5}{6E(k)} T_1 - \frac{2}{3} T_2 \right] - Q_{11}^{(i)} & (i=3, 5, 7, \dots, 15) \end{cases} \\
 J_1 = & \frac{\partial T_1}{\partial a} E(k) - \frac{\partial E(k)}{\partial a} T_1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 J_2 &\equiv \frac{\partial T_1}{\partial b} E(k) - \frac{\partial E(k)}{\partial b} T_1 \\
 T_c &\equiv \frac{\partial T_1}{\partial c} \\
 H_a &\equiv A_1 + \frac{A_2}{4} \\
 H_b &\equiv B_1 + \frac{B_2}{4} \\
 H_c &\equiv C_1 + \frac{C_2}{4} \\
 A_i &\equiv \frac{\partial H_i}{\partial a} \quad (i=1, 2) \\
 B_i &\equiv \frac{\partial H_i}{\partial b} \quad (i=1, 2) \\
 C_i &\equiv \frac{\partial H_i}{\partial c} \quad (i=1, 2) \\
 \rho_i &\equiv \frac{1}{2b^2} B_e \left(\frac{i+1}{2}, \frac{1}{2} \right) F_k \left(\frac{i+1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{i+2}{2}, k \right) \quad (67)
 \end{aligned}$$

식 (64) ~ (66)을 연립하면 각각의 i 에 대해 $A_i^{(j)}$, $A_{i2}^{(j)}$, $A_{i3}^{(j)}$, $A_1^{(j)}$, $A_2^{(j)}$, $A_3^{(j)}$, $A_{12}^{(j)}$, $A_{13}^{(j)}$ 를 구할 수 있다. 최종적으로 응력세기계수는 중첩원리로부터 각각의 i 에 대한 응력세기계수의 합으로 구해질 수 있다. 결과적인 응력세기계수 식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 K_{I0} &= \sum_{i=1}^{15} K_{I0i} \\
 &\equiv K_{I0} \frac{\alpha}{\sigma_0} + \sum_{i=2}^{15} K_{I0} (A_{i1}^{(j)} + A_{i2}^{(j)} \sin^i \eta + A_{i3}^{(j)} \sin \eta) \quad (68)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K_{I1} &= \sum_{i=1}^{15} K_{I1i} \\
 &\equiv K_{I0} \frac{\beta_1}{\sigma_0} + \sum_{i=2}^{15} K_{I0} (A_{i1}^{(j)} + A_{i2}^{(j)} \sin^i \eta + A_{i3}^{(j)} \sin \eta) \quad (69)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K_{I2} &= \sum_{i=1}^{15} K_{I2i} \\
 &\equiv K_{I0} \frac{\gamma_1}{\sigma_0} + \sum_{i=2}^{15} K_{I0} (A_{i1}^{(j)} + A_{i2}^{(j)} \sin^i \eta + A_{i3}^{(j)} \sin \eta) \quad (70)
 \end{aligned}$$

무차원 응력세기계수 K_{I0} , K_{I1} , K_{I2} 를 다음과 같이 정의한다.

$$K_{I00} \equiv \frac{K_{I0}}{\sqrt{\pi a}} \quad (71)$$

$$K_{I01} \equiv \frac{K_{I1}}{\sqrt{\pi a}} \quad (72)$$

$$K_{I02} \equiv \frac{K_{I2}}{\sqrt{\pi a}} \quad (73)$$

3. 결과 및 고찰

3.1 열충격을 받는 유한판상의 반타원표면균열

Fig. 6에서 Vainshtok 방법론의 타당성을 검토하

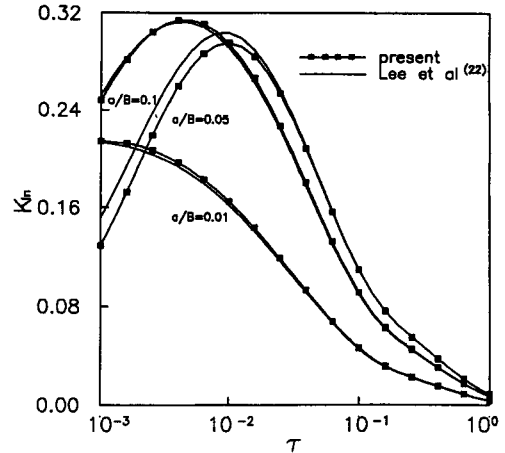


Fig. 6 Transient nondimensional thermal stress intensity factor K_{I0} vs. nondimensional time τ for various nondimensional crack depths (a/B)

기 위해, $\nu=0.3$, $\alpha=0.001$, $b/W=0.49$, $B=10$ 인 경우에 균열윤곽중 가장 깊은 점에서의 거동을 가장자리 균열(edge crack)에 대한 Lee 등의 열충격 응력세기계수 결과⁽²²⁾와 비교하고 있다. Fig. 6으로부터 균열 깊이비 a/B 가 커질수록 Lee 등⁽²²⁾의 결과와 차이를 보인다. 타원균열의 가장 깊은 점에서 거동이 가장자리 균열과 같게 하도록 타원균열의 장축 b 를 단축 a 에 비해 매우 크게 설정하였을 때 기존 논문⁽²²⁾과 잘 일치함을 알 수 있다.

3.2 원심력과 열하중하에 있는 터빈축차내에 내재된 타원균열

Fig. 7은 저널 횡단면 형상의 터빈축차 경우, $\nu=0.3$, $Re=5000$, $M=1000$, $A=1000$, $r_a=301$, $\Delta=1$, $\kappa=1.4$, $\mu=0.2$, $T_o=100$, $T_e=0$, $\rho_1=4$, $a/c=0.7$, $R_i=100$, $b=5$ 이고 균열비 α 를 변화시킬 때 열응력세기계수를 균열윤곽에 대해 나타내고 있다. 내경 표면에 인접하는 쪽의 균열윤곽에서 응력세기계수 값이 크게 나왔으며, 반무한체에 내재된 타원균열의 경우와 같이 타원 변수각도가 양의 값인 곳에서는 일정한 경향을 보이고 있다. 또한, α 가 증가함에 따라 열응력세기계수는 균열윤곽 전체에 걸쳐 줄어들음을 알 수 있다.

Fig. 8은 저널 횡단면 형상의 터빈축차 경우 $\nu=0.3$, $Re=5000$, $M=1000$, $A=1000$, $r_a=301$, $\Delta=1$, $\kappa=1.4$, $\mu=0.2$, $T_o=100$, $T_e=0$, $\rho_1=4$, $\alpha=0.6$, $R_i=100$, $b=5$ 이고 내경 표면과 내재된 타

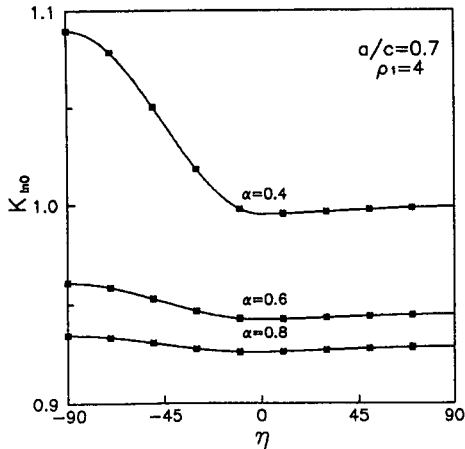


Fig. 7 Nondimensional thermal stress intensity factor K_{in0} vs. parametric angle of ellipse η for various crack ratio α (journal section rotor)

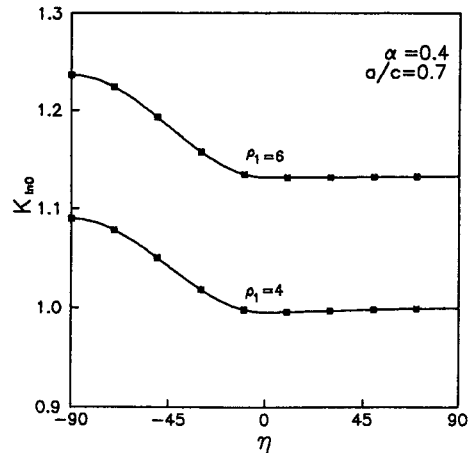


Fig. 9 Nondimensional thermal stress intensity factor K_{in0} vs. parametric angle of ellipse η for various radius ratio ρ_1 (journal section rotor)

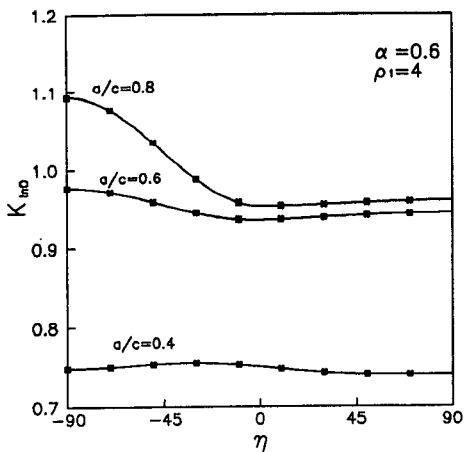


Fig. 8 Nondimensional thermal stress intensity factor K_{in0} vs. parametric angle of ellipse η for various a/c (journal section rotor)

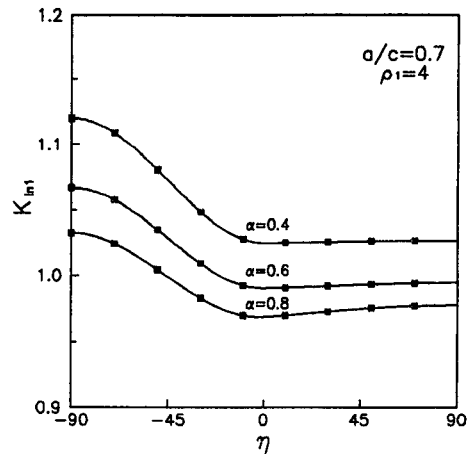


Fig. 10 Nondimensional stress intensity factor K_{in1} vs. parametric angle of ellipse η for various crack ratio α (journal section rotor)

원균열 중심사이의 거리를 변화시킬 때 열응력세기계수를 균열윤곽에 대해 나타내고 있다. 그 거리가 줄어들에 따라 열응력세기계수는 커지고 있다.

Fig. 9는 저널 횡단면 형상의 터빈축차 경우 $\nu=0.3$, $Re=5000$, $M=1000$, $A=1000$, $r_d=301$, $\Delta=1$, $\kappa=1.4$, $\mu=0.2$, $T_o=100$, $T_e=0$, $\alpha=0.4$, $a/c=0.7$, $R_i=100$, $b=5$ 이고, $\rho_1=4$, 6일 때 열응력세기계수를 균열윤곽에 대해 나타내고 있다. 반경비 ρ_1 이 6일 때가 ρ_1 이 4일 때보다 열응력세기계수가 커지고 있다.

Fig. 10은 저널 횡단면 형상의 터빈축차가 회전하는 경우 $\nu=0.3$, $\rho_1=4$, $a/c=0.7$, $R_i=100$, $b=5$ 이고 균열비 α 를 증가시킬 때 응력세기계수를 균열윤곽에 대해 나타내고 있다. 응력세기계수 변화 경향은 Fig. 7과 유사하다.

Fig. 11은 저널 횡단면 형상의 터빈축차가 회전하는 경우 $\nu=0.3$, $\alpha=0.6$, $\rho_1=4$, $R_i=100$, $b=5$ 이고 인접하는 내경표면과 내재된 타원균열 중심사이의 거리를 변화시킬 때 응력세기계수를 균열윤곽에 대해 나타내고 있다. 응력세기계수 변화 경향은

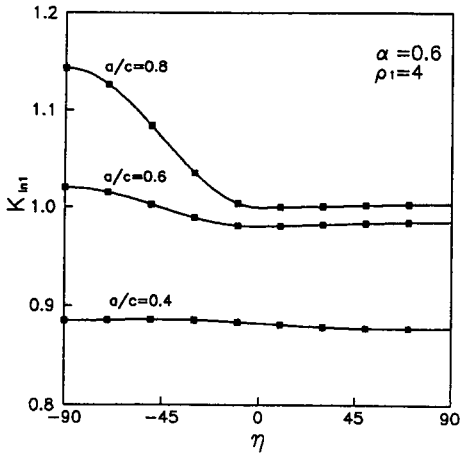


Fig. 11 Nondimensional stress intensity factor K_{In1} vs. parametric angle of ellipse η for various a/c (journal section rotor)

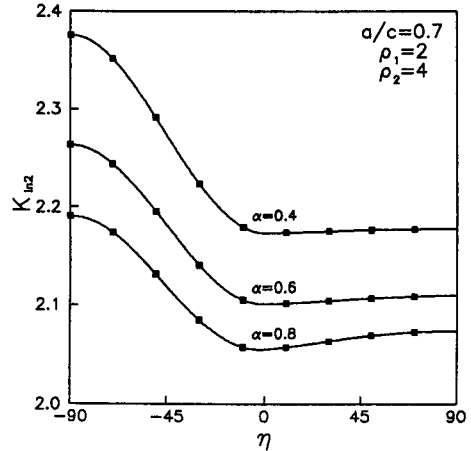


Fig. 13 Nondimensional stress intensity factor K_{In2} vs. parametric angle of ellipse η for various crack ratio α (4-pole generator rotor)

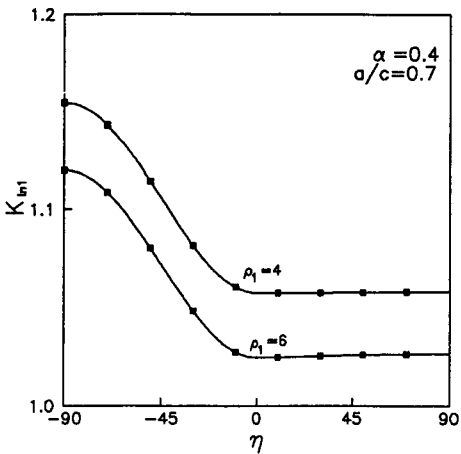


Fig. 12 Nondimensional stress intensity factor K_{In1} vs. parametric angle of ellipse η for various radius ratio ρ_1 (journal section rotor)

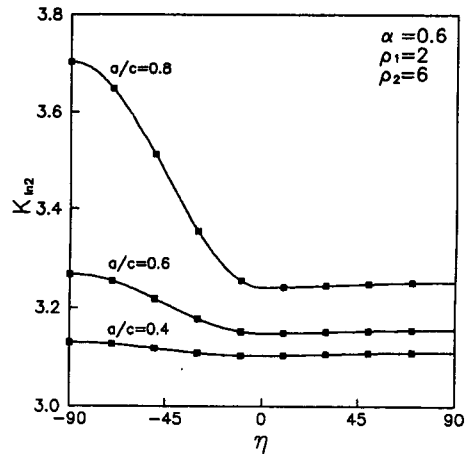


Fig. 14 Nondimensional stress intensity factor K_{In2} vs. parametric angle of ellipse η for various a/c (4-pole generator rotor)

Fig. 8과 유사하다.

Fig. 12는 저널 횡단면 형상의 터빈축차가 회전하는 경우 $\nu=0.3$, $\alpha=0.4$, $a/c=0.7$, $R_i=100$, $b=5$, $\rho_1=4$, 6일 때 응력세기계수를 균열윤곽에 대해 나타내고 있다. 반경비 ρ_1 이 4일 때가 6일 때 보다 열응력세기계수가 커지고 있다.

Fig. 13은 4폴 축차의 횡단면 형상의 터빈축차가 회전하는 경우 $\nu=0.3$, $\rho_1=2$, $\rho_2=4$, $a/c=0.7$, $R_i=100$, $b=5$ 이고 균열비 α 를 변화시킬 때 응력세기계수를 균열윤곽에 대해 나타내고 있다. 응력

세기계수 변화 경향은 Figs. 7, 10과 유사하다.

Fig. 14는 4폴 축차의 횡단면 형상의 터빈축차가 회전하는 경우 $\nu=0.3$, $\rho_1=2$, $\rho_2=6$, $\alpha=0.6$, $R_i=100$, $b=5$ 이고 인접하는 내경 표면과 내재된 타원균열 중심사이의 거리를 변화시킬 때 응력세기계수를 균열윤곽에 대해 나타내고 있다. 응력세기계수 변화 경향은 Figs. 8, 11과 유사하다.

Fig. 15는 4폴 축차의 횡단면 형상의 터빈 축차가 회전하는 경우 $\nu=0.3$, $\rho_1=2$, $\alpha=0.4$, $a/c=0.7$, $R_i=100$, $b=5$ 이고 반경비 ρ_2 를 증가시킬 때

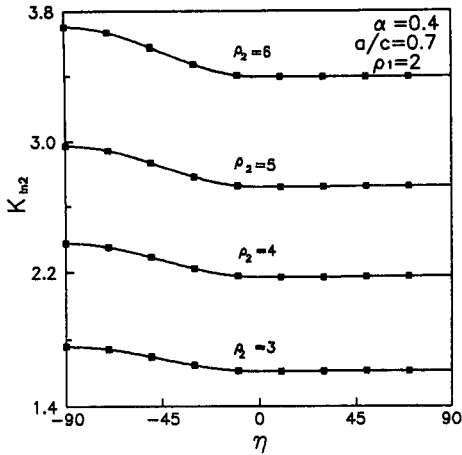


Fig. 15 Nondimensional stress intensity factor K_{Ia2} vs. parametric angle of ellipse η for various radius ratio ρ_2 (4-pole generator rotor)

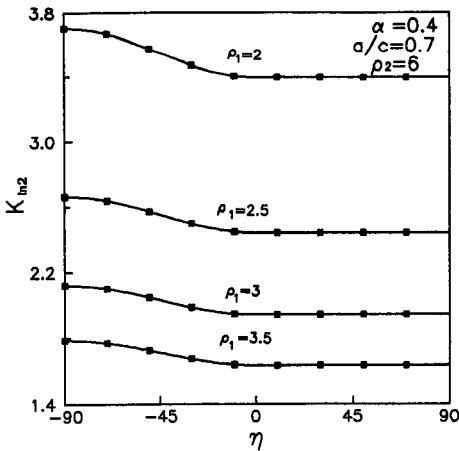


Fig. 16 Nondimensional stress intensity factor K_{Ia2} vs. parametric angle of ellipse η for various radius ratio ρ_1 (4-pole generator rotor)

응력세기계수를 균열윤곽에 대해 나타내고 있다. 응력세기계수 변화 경향은 Fig. 9와 유사하다.

Fig. 16은 4폴 축차의 횡단면 형상의 터빈축차가 회전하는 경우 $\nu=0.3$, $\rho_2=6$, $\alpha=0.4$, $a/c=0.7$, $R_t=100$, $b=5$ 이고 반경비 ρ_1 를 증가시킬 때 응력세기계수를 균열윤곽에 대해 나타내고 있다. 응력세기계수 변화 경향은 Fig. 12와 유사하다.

4. 결 론

유한판에 열충격이 가해질때 반타원 표면균열의

열충격 응력세기계수와 원심력과 열하중이 작용하는 터빈축차에 내재된 타원균열의 응력세기계수를 Vainshtok 가중함수법으로 구한 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) Vainshtok 가중함수법을 사용하여 유한판에 열충격이 가해질 때의 반타원 표면균열의 열충격 응력세기계수와 원심력과 열하중이 작용하는 터빈축차에 내재된 타원균열의 응력세기계수를 구하였다.

(2) 유한판에 열충격이 가해질 때의 반타원 표면균열의 열충격 응력세기계수를 기존의 결과와 비교시 잘 일치하였다.

(3) 열하중이나 원심력하중을 받는 저널 횡단면 형상의 터빈축차 경우 응력세기계수는 내경 표면에 인접하는 쪽의 균열윤곽에서 응력세기계수 값이 크게 나왔고, 타원변수각도가 양의 값인 곳에서는 일정한 값을 보였으며, 균열비가 증가함에 따라, 내경 표면과 타원균열 중심사이의 거리가 증가함에 따라 균열 윤곽 전체에 걸쳐 응력세기계수 값이 줄어들며, 열하중이 작용시는 반경비가 증가할수록 원심력하중이 작용시는 반경비가 감소할수록 균열 윤곽 전체에 걸쳐 응력세기계수 값이 증가한다.

(4) 원심력 하중을 받는 4폴 축차의 횡단면 형상의 터빈축차 경우 응력세기계수는 내경표면에 인접하는 쪽의 균열 윤곽에서 응력세기계수 값이 크게 나왔고, 타원 변수각도가 양의 값인 곳에서는 일정한 값을 보였으며, 균열비가 증가함에 따라, 내경 표면과 타원균열 중심 사이의 거리가 증가함에 따라, 반경비 ρ_1 이 증가함에 따라, 반경비 ρ_2 가 감소함에 따라 응력세기계수 값이 균열윤곽 전체에 걸쳐 감소한다.

참고문헌

- (1) Shah, R. C. and Kobayashi, A. S., 1971, "Stress Intensity Factor for Elliptical Crack under Arbitrary Normal Loading," *Eng. Frac. Mech.*, Vol. 3, pp. 71~96.
- (2) Shah, R. C. and Kobayashi, A. S., 1973, "Stress Intensity Factor for an Elliptical Crack Approaching the Surface of a Semi-Infinite Solid," *Int. J. of Frac.*, Vol. 9, pp. 133~145.
- (3) Segedin, C. M., 1967, "Some Three-Dimensional Mixed Boundary Value Problems

- in Elasticity," No. 67-3, Univ. of Wash.
- (4) Isida, M. and Noguchi, H., 1984, "Tension of a Plate Containing an Embedded Elliptical Crack," *Eng. Frac. Mech.*, Vol. 20, pp. 387~408.
 - (5) Fett, T. and Mattheck, C., 1989, "Stress Intensity Factors of Embedded Elliptical Cracks for Weight Function Applications," *Int. J. of Frac.*, Vol. 40, R13~R18.
 - (6) McGowan, J. J. and Raymund, M., 1979, "Stress Intensity Factor Solutions for Internal Longitudinal Semi-Elliptical Surface Flaws in a Cylinder under Arbitrary Loadings," *ASTM STP 677*, pp. 365~380.
 - (7) Heliot, J., Labbens, R. C. and Pellissier-Tanon, A., 1979, "Semi Elliptical Cracks in a Cylinder Subjected to Stress Gradients," *ASTM STP 677*, pp. 341~364.
 - (8) Newman, J. C. Jr. and Raju, I. S., 1981, "Stress Intensity Factor Equations for Cracks in Three-Dimensional Finite Bodies," *NASA Technical Memorandum 83200*, pp. 1~49.
 - (9) Newman, J. C. Jr. and Raju, I. S., 1980, "Stress-Intensity Factors for Internal Surface Cracks in Cylindrical Pressure Vessels," *J. of Pres. Ves. Tech.*, Vol. 102, pp. 342~346.
 - (10) Tan, C. L. and Shim, M. L., 1986, "Stress Intensity Factor Influence Coefficients for Internal Surface Cracks in Thick-Walled Cylinders," *Int. J. Pres. Ves. & Piping*, Vol. 24, pp. 49~72.
 - (11) Mattheck, C., Munz, D. and Stamm, H., 1983, "Stress Intensity Factor for Semielliptical Surface Cracks Loaded by Stress Gradients," *Eng. Frac. Mech.*, Vol. 18, pp. 633~641.
 - (12) Xu, R. X. and Wu, X. R., 1989, "A Weight Function Approach to Stress Intensity Factors for Half-Elliptical Surface Cracks in Cylindrical Pressure Vessels Subjected to Thermal Shock," *Int. J. Pres. Ves. & Piping*, Vol. 39, pp. 375~391.
 - (13) Fett, T., 1988, "The Crack Opening Displacement Field of Semi-Elliptical Surface Cracks in Tension for Weight Functions Applications," *Int. J. of Frac.*, Vol. 36, pp. 55~69.
 - (14) Nishioka, T. and Atluri, S. N., 1990, "The First-Order Variation of the Displacement Field due to Geometrical Changes in an Elliptical Crack," *J. of App. Mech.*, Vol. 57, pp. 639~645.
 - (15) Vainshtok, V. A. and Varfolomeyev, I. V., 1987, "Application of the Weight Function Method for Determining Stress Intensity Factors of Semi-Elliptical Cracks," *Int. J. of Frac.*, Vol. 35, pp. 175~186.
 - (16) Vainshtok, V. A. and Varfolomeyev, I. V., 1988, "A Complete System of Equations of the Weight Function Method for Three-Dimensional Crack Problems," *Int. J. of Frac.*, Vol. 38, pp. R71~R74.
 - (17) Vainshtok, V. A., 1991, "Application of the Weight Function Method to Solving Multiparametric Three-Dimensional Fracture Mechanics Problems," *Int. J. of Frac.*, Vol. 47, pp. 201~212.
 - (18) Otisik, M. N., 1960, *Heat Conduction*, John Wiley & Sons, Inc., New York.
 - (19) Boley, B. A. and Weiner, J. H., 1960, *Theory of Thermal Stresses*, John Wiley & Sons, Inc., New York.
 - (20) EPRI, 1988, *Life Assessment Methodology for Turbogenerator Rotors*, J. A. Jones Applied Research Company, Charlotte, North Carolina.
 - (21) Carslaw, H. S., 1959, *Conduction of Heat in Solids*, Oxford Press, London.
 - (22) Lee, K. Y. and Sim, K. B., 1990, "Thermal Shock Stress Intensity Factor by Bueckner's Weight Function Method," *Eng. Frac. Mech.*, Vol. 37, pp. 799~804.