

# 개념설계를 위한 토폴로지 최적화 기법

고 병 천

## Topology Optimization in the Process of Conceptual Design

Byeong-Cheon Koh



● 고병천 (자동차부품연구원)  
● 1953년생  
● 유한요소법과 응용역학을 전공하였으며, 고체역학, 전산역학, 기계설계 등에 관심을 가지고 있으며, 현재 차량항법 장치를 개발하고 있다.

### 1. 머리말

이제 '전산응용기술', 특히 '전산응용 설계 기술'은 공학설계자에게 매우 익숙한 단어가 되었으며, 그 수준도 과거의 도면 제작이나 관리 수준에서 벗어나 최종 제품의 조립, 기구 운동, 모의 해석 및 실험 등 진정한 의미의 설계 수준으로 높아졌다. 그것은 저렴하면서도 고속 연산이 가능하고 메모리의 용량이 크고 멀티 윈도우와 대화식 삼차원 화상의 처리 능력을 갖춘 전산기가 보편화되고 있으며, 또한 유한요소법, 유한차분법, 경계요소법, 이를 지원하는 자동 격자구성 알고리즘 등 전산 응용 설계에 필요한 여러가지 전산해석 기법을 활용하는 소프트웨어도 놀라운 발전을 거듭하여, 삼차원 모델링, 기구 해석, 조립도 해석, 모의 실험 해석, 내구도 해석 등 설계에 필요한 각 분야의 전문 소프트웨어를 쉽게 얻을 수 있게 되었기 때문이다.

과거의 전산설계는 구조의 형상에 대한 개념을 바탕으로 공학적 감각과 경험을 의지하

는 역 엔지니어링 기법이 대부분이었다. 그러나 지금은 최적화 설계를 위한 여러가지 수학적 기법과 민감도 해석과 같은 고도화된 최적화 기법이 개발되어 전산설계 소프트웨어가 실용화되었으며, 이러한 반복 설계에서 벗어나 구조물의 크기, 치수 그리고 형상 등에 대하여 초기부터 전산해석과 설계변수의 민감도해석을 통한 최적화 설계가 가능해졌다.

일반적으로 이러한 설계 방법들은 설계목표에 대한 설계변수의 민감도에 따라 점차적으로 개선하는 방식을 따르고 있다. 만약 구조물의 형상을 최적화하고자 한다면, 반복설계를 시도할 때마다 변화하는 형상을 그대로 정의하고 자동적으로 해석모델을 다시 구성할 수 있는 자동 격자 구성 소프트웨어가 반드시 필요하다. 어떠한 경우라도 상세 설계에 따른 최종 제품의 형상은 초기 개념설계의 형상을 크게 벗어나지 못한다.

초기형상에 대한 제한이 없거나 초소형 센서와 같이 미리 형상이 결정되지 않은 새로운 개념의 제품을 설계하고자 할 때는 비록 전산기를 활용한다 하더라도, 반복계산만으

로 설계 최적화를 실현하기는 어렵다. 그것은 초기 개념설계에서 보통 설계된 설계공간(영역)에 개념적인 형상(설계 레이아웃)을 결정해야 하기 때문이다. 설계의 결과에 따라 얻어지는 물체는 그 속이 꼭 찬 단일-연결체(singly connected body)일 수도 있고, 또는 그 속에 많은 빈 공간이 존재하는 여러-연결체(multiply-connected body)일 수도 있다. 일반 최적화기법은 단일-연결체로부터 시작한 설계는 여러-연결체의 결과를 이루어 내기 어렵다. 그것은 일반 최적화기법이 특별한 다른 수단을 동원하지 않는 한 시종 동일한 연결체만을 다룰 수 있기 때문이다. 그러나 실제로는 뼈와 같이 내부에 구멍을 둔 최적구조로서 경량화와 강도를 동시에 만족하는 경우가 흔히 있다. 이러한 여러-연결체의 최적구조를 찾아내기 위해서는 개념설계 초기부터 여러-연결체의 설계형상을 모델로 삼아야 하지만, 여러-연결체의 형상을 최초부터 가정한다는 것은 매우 어렵다. 다음 모델링 등을 고려할 때 최초 모델로서 단일-연결체 형상을 취하지 않을 수 없다.

이러한 문제점을 해결하기 위해서는 최적화 과정에서 단일-연결체에서 여러-연결체로 혹은 여러-연결체에서 단일-연결체로 설계 형상의 토폴로지를 바꿀 수 있어야 한다. 이처럼 토폴로지를 미리 정할 수 없는 문제에서 최적화는 미소구조를 도입하여 최적화를 시도하면 가능하다. 즉, 처음부터 설계영역내에 무수히 많은 미소구조의 공간을 두어, 미소공간의 크기와 영역을 조절하여 구조물의 강도와 강성을 조절함으로써 해결할 수 있다. 개념단계의 최적화 문제를, "적절하게 선택된 영역에 수많은 작은 구멍"을 가정하고 작은 구멍의 크기와 영역을 조절하여 최적화된 복합재료의 물성을 찾아내는, 복합재료 구조물 최적화 문제로 바꾸는 것이다. 이러한 경우에 최적설계의 정식화는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

즉 복합재료의 단위셀을 구성하는 소재의 일부를 빈 공간(void)으로 선택하면, 평균화된 거시적인 기계적 강성은 줄어든 대신 재료는 가벼워진다. 빈 공간이 단위셀을 모두 채우게 되면, 거시적 구조에서도 재료는 없고 공간만이 존재하며, 거시적 강성도 영이 된다. 반대로, 빈 공간을 없애고, 단위셀의 모든 공간을 재료로 채우게 되면, 거시적 강성은 원 재료의 기계적 강성과 동일하게 된다. 균질화법을 이용한 최적설계는 이처럼 빈 공간이 있는 복합재료의 단위셀에 밀도 설계 또는 재료 채우기 문제로 바꾸어 토폴로지 최적화를 이루는 것이다.

$$\begin{aligned} & \text{Minimize Mean Compliance} && (1) \\ & \text{subject to Equilibrium Equations} \\ & \text{Void Volume} \\ & \text{Stress/Displacement Constraints} \end{aligned}$$

여기서는 균질화법의 요약을 기술하고, 이를 이용한 개념 설계를 위한 토폴로지 최적화 방법을 소개하고자 한다. 균질화법을 이용한 토폴로지 최적화 설계 방법은 여러 논문에서 제시되고 있으나, 복합재료의 물성을 조절하는 완화(relaxation)기법을 활용하는 점에서는 동일하다.

## 2. 균질화법

복합재료의 물성이 복합재료를 이루는 미소구조 재료의 구성에 좌우된다는 것은 당연한 일이다. 따라서 유한요소법과 같은 수치 해석 방법으로 복합재료 구조물의 거동을 해석할 때, 복합재료의 미시적 재료분포를 고려하여 거시적 거동을 예측한다는 것은 미시적인 재료 불연속성 때문에 매우 어려운 일이다. 균질화법(homogeneization method)은 미시구조의 특성으로부터 거시적으로 균질화된 복합재료의 물성을 해석하는 매우 유용한 수학적 기법이다.

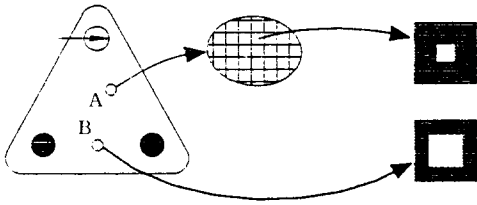


그림 1 다공질(perforated material) 구조물과 단위셀

그림 1과 같은 미시적으로 수많은 구멍이 뚫려 있는 재료(perforated material)를 생각해 보자. 이 때, 재료의 어느 점을 살펴보면, 미시적으로 사각형 구멍을 포함한 단위셀이 주기적으로 반복하여 수없이 분포한다고 생각한다. 이러한 재료로 된 구조물의 평형방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial}{\partial x_k} (E_{ijkl}^{\epsilon} \frac{\partial u_i^{\epsilon}}{\partial x_j}) = f_i^{\epsilon} \quad (2)$$

여기서,  $\epsilon$ 은 미시구조의 특성을 고려한 매개 변수로서, 거시적 좌표계  $x$ 와 미시적 좌표계  $y$ 의 관계를 나타낸다. 즉  $y = x/\epsilon$ 이 되고,  $y$ 는  $Y$ -주기적으로 반복되는 특성을 가진다.

또한 이 구조물의 거동  $u^{\epsilon}$ 은 미시-거시 좌표계로부터 식 (3)과 같이 표시되며,  $\epsilon$ 에 대응하여 전개하면, 식 (4)로 나타낼 수 있다.

$$u^{\epsilon} = u^{\epsilon}(x, y) \quad (3)$$

$$u^{\epsilon} = u^0(x, y) + \epsilon u^1(x, y) + \epsilon^2 u^2(x, y) + \dots \quad (4)$$

이와 같은 미시-거시 좌표계에 좌우되는 어떤 물리량  $\phi(x, y)$ 의 미분값은 식 (5)로 표현된다.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x_i} \phi(x, y = \frac{x}{\epsilon}) \\ &= (\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial}{\partial y_i}) \phi(x, y) |_{y=x/\epsilon} \end{aligned} \quad (5)$$

이러한 구조에서 복합재료의 균질화된 물성  $E_{ijkl}^H(x)$ 을 다음과 같이 얻을 수 있다.

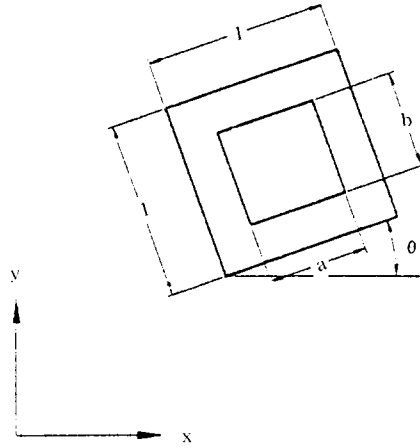


그림 2 구멍 단위셀의 치수

$$E_{ijkl}^H = \frac{|Y|}{1} \int_Y (E_{ijkl} - E_{ijmn} \frac{\partial x_m^{kl}}{\partial y_n}) dY \quad (6)$$

여기서,  $x^{kl}$ 은 다음의 평형관계식으로부터 얻는다.

$$\frac{\partial}{\partial y_i} E_{ijmn} \frac{\partial x_m^{kl}}{\partial y_n} = E_{ijkl}, y \in (0, 1) \quad (7)$$

그림 2와 같은 구멍 단위셀의 물성  $E_{ijkl}^H(x)$ 은 구멍의 사각형 변수  $0 \leq a, b \leq 1 \in Y$ 에 좌우된다. 만일  $a=b=0$ 이면 어떤 단위셀은 구멍이 없는 딱 찬 구조이며,  $a=b=1$ 이면 셀은 구멍으로 이루어져 재료가 없는 구조가 된다. 만약  $a, b$ 의 크기가 서로 다르면, 재료의 물성은 이방성의 특성을 갖게 된다. 주어진 외부조건에 따라 구멍의 크기를 조절하여 구조물의 물성과 재료의 무게를 최적화할 수 있다. 만약 복합재료의 물성 이방성이 되면, 미시구조 좌표계가 거시구조 좌표계에 기울어진 경우에는 좌표계의 상대적 기울기  $\theta$ 에 따라 거시적인 물성이 달라진다. 즉, 거시 탄성계수  $E_{ijkl}^G(x)$ 는 식 (8)로 표시할 수 있다.

$$\begin{aligned} E^G(x) &= R(\theta)^T R(\theta) E^H(x) R(\theta) \\ &R(\theta) \end{aligned} \quad (8)$$

여기서,  $R(\theta)$ 는 좌표계의 회전행렬로서, 2

차원인 경우에는 식 (9)와 같다.

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (9)$$

균질화된 단위셀의 물성  $E_{ijkl}^c(x)$ 은 모든 점에서 정의되는 값이지만, 이를 수치해석을 통하여 모든 점에서 구하는 것은 사실 불가능하다. 따라서 미리 몇 개의 점을 정의하여 정의된 점에서 재료의 물성값을 구한 후, 이를 보간하여 각 점의 값을 예측하는 것이 보다 현실적이다.

### 3. 토폴로지 최적화

균질화법을 이용한 토폴로지 최적화의 목표는 식 (1)에서 나타낸 것처럼 어떤 하중조건에서 구조물의 가장 가볍고 강한 토폴로지를 구하는 것이다. 이러한 방법은 응력집중과 같은 구조물의 국부적인 취약성을 고려할 수 없지만, 이러한 국부적인 변형은 내부균열과 같은 결함이나 집중하중 등에 좌우되기 때문에 초기 개념설계에서는 일반적으로 고려되지 않는다. 오히려 개념설계는 우선 전체적으로 가장 강한 구조물의 토폴로지를 갖도록 이루어지는 것이 보통이다. 이러한 목표를 갖는 토폴로지는 주어진 하중조건에 대하여 그 변형이 최소가 되거나 혹은 콤플라이언스가 최소가 되는 구조물이다. 즉, 주어진 하중조건에 대하여 구조물의 콤플라이언스 식 (10)을 최소화한다.

$$\sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \rho f_i u_i d\Omega + \sum_{i=1}^N \int_{\Gamma_f} t_i u_i d\Gamma \quad (10)$$

또한 식 (10)은 구조물의 평형방정식을 만족하여야 하며, 이 때 사용된 재료의 총량은 식 (11)로 제한된다.

$$\int_{\Omega} (1-ab) d\Omega \leq \Omega_s \quad (11)$$

여기서,  $\Omega_a$ 와  $\Omega_s$ 는 각각 앞에서 정의된 구멍이 뚫린 재료로 이루어진 구조물의 설계영

역과 총 체적이고,  $a, b$ 는 단위셀 안에 사각형 구멍의 크기이다.

식 (11)의 조건을 고려한 식 (10)에 대한 최적화 목표함수  $L$ 은 식 (12)와 같다.

$$\begin{aligned} L(a, b, \theta, u) = & \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \rho f_i u_i d\Omega \\ & + \sum_{i=1}^N \int_{\Gamma_f} t_i u_i d\Gamma \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} E_{ijkl}^c(a, b, \theta) \\ & \cdot \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_l}{\partial x_j} d\Omega \\ & - \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} f_i u_i d\Omega \\ & - \sum_{i=1}^N \int_{\Gamma_f} t_i u_i d\Gamma \\ & + \lambda_V \left( \int_{\Omega_a} (1-ab) d\Omega - \Omega_s \right) \end{aligned} \quad (12)$$

여기서,  $u, \lambda_V$ 는 각각 평형방정식의 상태변수와 체적조건에 대한 라그랑지 승수이며,  $\lambda$ 은 변위구속조건에 대한 페널티 변수이다. 재료의 탄성계수는 단위셀 안에 있는 구멍의 크기( $a, b$ )와 방향( $\theta$ )에 따라 좌우되므로 구조물의 강성을 결정하는 설계변수는  $a, b, \theta$ 이다. 따라서 식 (12)에 대한 최적화 조건식은 식 (13)과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial a_i} \delta a_i = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial b_i} \delta b_i = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \theta_i} \delta \theta_i = 0, \\ 0 \leq a, b \leq 1 \end{aligned} \quad (13)$$

그리고 식 (15)가 된다.

$$\frac{\partial L}{\partial u} \delta u = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \nu} \delta \nu = 0 \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \lambda_V \left( \int_{\Omega_a} (1-ab) d\Omega - \Omega_s \right) = 0, \\ \lambda_V \geq 0, \quad \int_{\Omega_a} (1-ab) d\Omega - \Omega_s \leq 0 \end{aligned} \quad (15)$$

식(15)는 소위 Kuhn-Tucker 조건식을 나타낸다.

토폴로지를 최적화하기 위한 설계변수  $a, b, \theta$ 의 최적화는 식 (13)으로부터 구한다.  $y$

$\leq y \leq \bar{y}$ 의 모든  $y$ 에 대하여  $x \leq x \leq \bar{x} : (x - g)(y - x) \leq 0$ 을 만족하는  $x$ 는  $x = \text{Min}\{\text{Max}(x, g), \bar{x}\}$ 라는 사실로부터, 식 (13)의 결과는 식 (16)이 된다.

$$a = \text{Min}\{\text{Max}\{0, a - \rho_a (\sum \frac{1}{2} \frac{\partial E_{ijk}^c}{\partial a} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \Lambda b)\}, 1\}$$

$$b = \text{Min}\{\text{Max}\{0, b - \rho_b (\sum \frac{1}{2} \frac{\partial E_{ijk}^c}{\partial a} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \Lambda a)\}, 1\} \quad (16)$$

또한 채적조건에 대한 라그랑지 승수  $\Lambda_v$ 는 식 (17)과 같다.

$$\Lambda_v = \text{Min}\{0, \Lambda_v - \Lambda_a (\int_{\Omega_a} (1 - ab) d\Omega - \Omega_s)\} \quad (17)$$

이러한 결과로부터 토폴로지의 최적화 과정은 다음과 같다.

- (1) 단위셀에 존재하는 구멍에 대한 초기 조건  $a, b, \theta$ 와 채적조건  $\Lambda$ 를 설정한다.
- (2) 이러한 조건으로부터 식 (8)에 따라 균질화된 탄성계수  $E_{ijk}^c$ 를 계산한다.
- (3) 균질화된 탄성계수와 평형방정식으로부터 구조물의 변위벡터를 구한다.
- (4) 계산된 변위벡터와 최적화 조건식 (13), (14), (15)로부터 단위셀의 물성을 계산하기 위한 설계변수  $a, b, \theta$ 와 채적조건  $\Lambda$ 를 구한다.
- (5) 설계변수의 결과가 수렴할 때까지 (1)부터 (4)를 반복한다.

#### 4. 예제

균질화법을 이용한 토폴로지 설계방법은 각 유한요소내에 존재하는 단위셀의 빈공간의 크기를 조절하여 각 유한요소의 질량(밀도)분포를 구하고 이로부터 구조물의 토폴로지를 결정한다. 각 유한요소의 설계질량과 구조물 원소재의 질량의 비를 설계질량비라

고 하면, 만약 토폴로지 설계 후, 어느 유한 요소에 존재하는 그림 2와 같은 단위셀에서 빈 공간의 크기가 0이면 이 유한요소의 설계 질량비는 1이 되고, 빈 공간이 단위셀을 모두 차지하게 되며, 설계질량비가 높은 유한 요소를 모으면 구조물의 토폴로지가 어떻게 형성되어야 하는지를 알아낼 수 있다.

이 방법은 구조물 설계에 필요한 하중조건과 구속조건, 설계의 목적상 반드시 필요한 공간(예; 볼트를 고정하기 위한 공간 등)만을 고려할 뿐, 설계를 위한 구조물의 형상(즉, 초기 설계 영역)에 대하여 아무런 제한 조건을 두지 않는다. 따라서 최초 구조물에 대한 유한요소 모델링을 매우 단순화할 수 있으며 형상 설계를 위한 축차 계산중에도 모델링을 재구성할 필요가 없다. 여기서는 균질화법을 이용한 구조물의 개념설계의 예를 제시하고자 한다.

우선 균질화법을 이용한 구조물의 개념설계의 효율성을 설명하기 위하여 그림 3과 같이 두 개의 고정볼트 구멍과 하나의 축구멍이 있는 삼각형 브래킷 구조물을 선택하였다. 여기서는 브래킷구조물의 목표 질량을

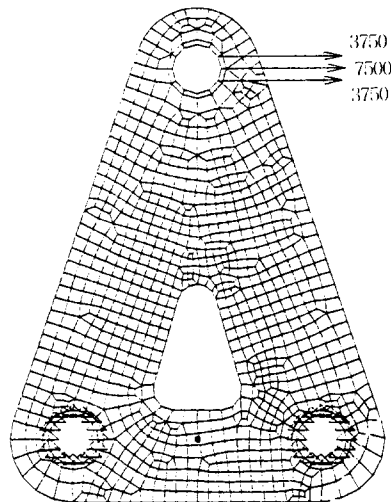


그림 3 설계영역 내부에 공간이 존재하는 브래킷 모델

먼저 선택하고, 이 때의 가장 높은 강성을 갖는 브래킷 개념형상을 구하고자 한다. 그림 3에서의 설계대상의 브래킷 구조물을 처음부터 설계영역의 중심부에 구멍이 존재하는 토폴로지 가정하였다. 브래킷의 최종형상이 갖는 목표질량을 최초(그림 3)의 40%가 되도록 결정하였으며, 그림 4는 그 결과이며 총 최적화 과정에서 모두 20회 반복 계산을 수행하였다. 그림 4의 결과를 보면, 고정볼트 구멍과 축 구멍의 주위에서 접촉면을 제외하고는 설계질량비의 분포가 거의 0이다. 이로부터 구한 최적화된 브래킷의 구조는 그림 5에 나타나고 있듯이, 두 개의 기울어진 막대와 두 막대를 연결하는 보다 약한 막대로 이루어진 트러스 구조이다. 그림 6은 브래킷의 등가응력 분포로서, 설계결과와 구조물이 거의 동일한 응력(fully-stressed)분포를 갖는 최적화된 브래킷 구조임을 미리 예상하지 않더라도 브래킷을 구성할 트러스의 두께, 그리고 연결점의 위치 등을 한꺼번에 제시하고 있다.

토폴로지 설계의 유연성을 보여주기 위하여 설계영역 내에 아무런 공간이 없는 단순

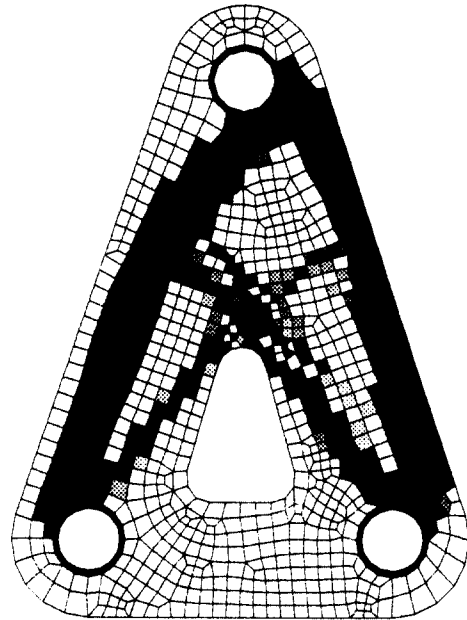


그림 4 40% 한계 질량을 갖는 브래킷 설계질량비 분포

화된 토폴로지를 고려해 볼 수 있다. 이 경우 결과는 그림 7에서 보여주고 있는데 그림 4와 동일한 결과를 보여주고 있다. 이것은

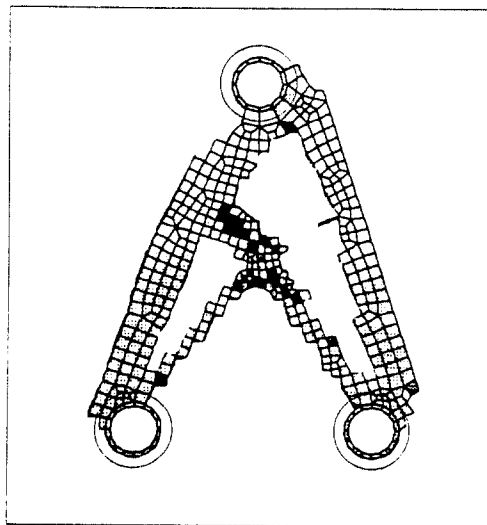
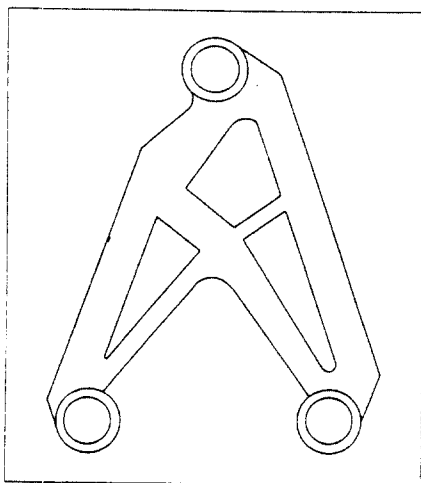


그림 5 40% 한계 질량을 갖는 브래킷 토폴로지 구조

토폴로지 최적화의 결과가 구조물의 최초 토폴로지 형태에 좌우되지 않음을 설명해 준다. 즉 이것은 초기 설계의 모델을 가장 단

순하게 구성하여도 된다는 뜻이기 때문에 초기 모델링에 소요되는 많은 노력을 줄일 수 있다.

### 5. 맺음말

지금까지 개념설계를 위하여 토폴로지 설

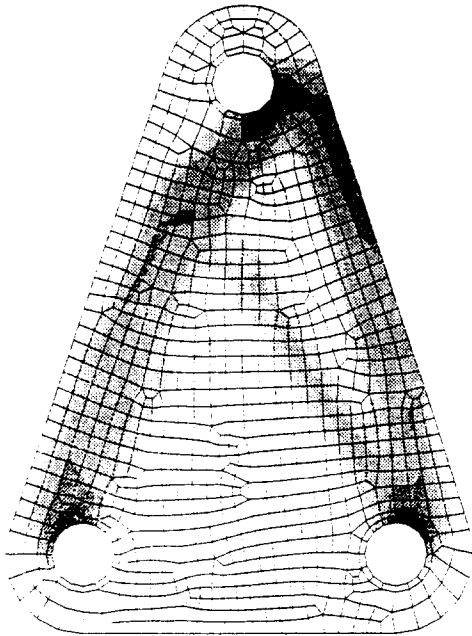


그림 6 최적 토폴로지를 갖는 브래킷 모델에 대한 등가응력 분포

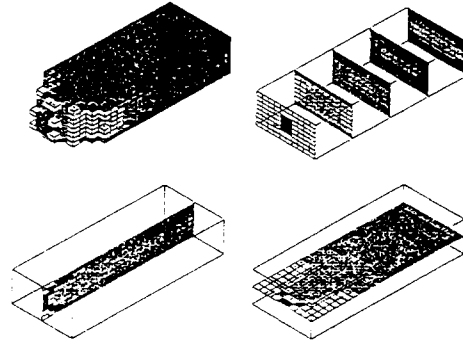


그림 8 진동과 강도를 동시에 고려한 최적화된 삼차원 보

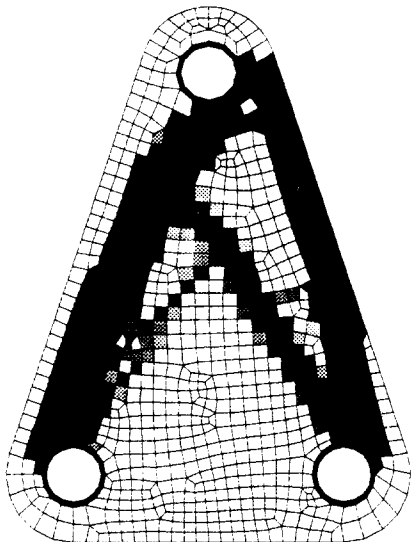


그림 7 최적 토폴로지 구조의 실제질량비 분포

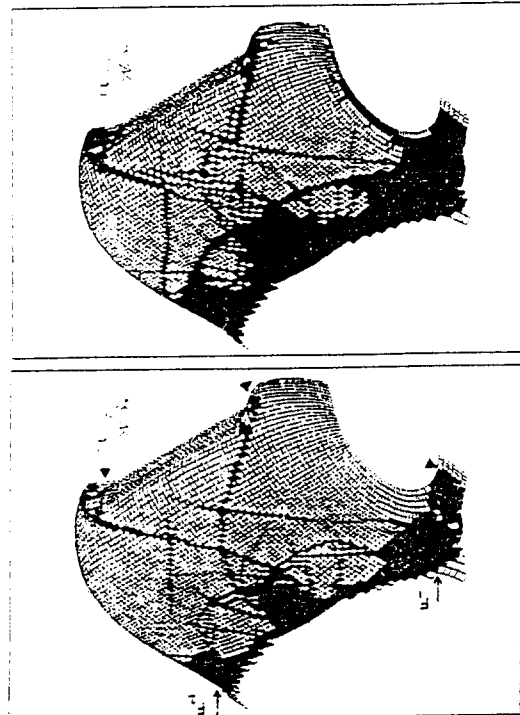


그림 9 자동차 후드의 보강재 최적 배치(토요타 자동차, 문헌미상)

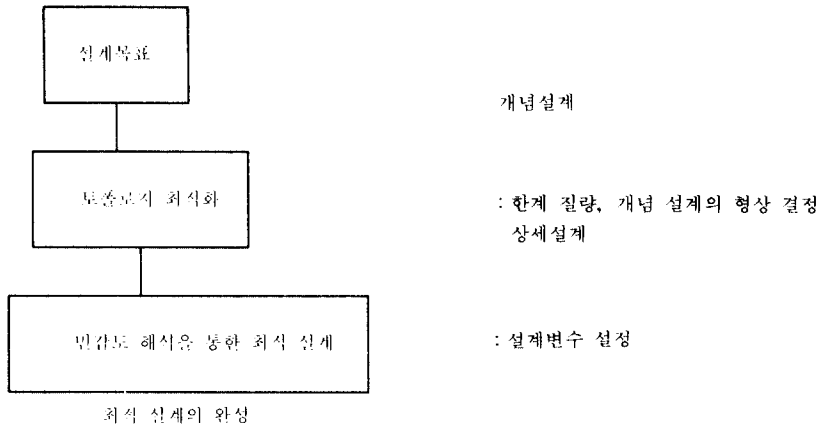


그림 10 최적화 설계 단계

계에 관한 정식화 방법과 그 예를 살펴 보았다. 이미 토폴로지 최적화 설계는 여러 기계 분야에서 실용화되어 있으며, 여기에서 미처 제시하지 못한 다목적함수 문제를 해결할 수도 있다. 그림 8은 진동과 강도를 동시에 고려한 삼차원 보의 최적화된 토폴로지이다. 최초 내부에 공간이 없이 가득찬 삼차원 보가 그 내부에 큰 공간과 일종의 칸막이가 존재한다. 그림 9는 자동차의 후드를 설계할 때, 보강재를 어떻게 설치할 것인가에 대한 토폴로지 설계의 결과이다. 이와 같이 최초에 설명하였듯이, 토폴로지 설계는 미리 형상이 결정되지 않은 새로운 개념의 제품을 설계하고자 할 때나 설계 경험이 풍부하지 못한 경우, 그 개념적 형상을 결정하는 데 매우 유용하다. 실제로 이러한 토폴로지 설계의 결과를 최근 급속 시제품 제작기(rapid prototyping machine)와 함께 사용하게 되면 처음 개념설계에서 최초시제품의 형상을 예측하고 제작하는 데 많은 시간을 절약할 것으로 판단된다.

그러나 식 (1)에서 보듯이 토폴로지 최적화에 따른 구조물은 구조물의 한계 질량내에서 평균 강성이 가장 큰 구조물일 뿐, 국부적인 응력한계에 대한 최적화는 아니다. 따라서 최종적인 최적화 형상을 얻기 위해서

는, 먼저 한계질량을 갖는 최적 토폴로지 구조물의 모델을 구하고, 이 모델에 대하여 설계변수에 따른 민감도 해석을 수행하여 최대 응력의 한계값을 갖는 구조를 구하면 된다. 그림 10은 이러한 토폴로지 최적화와 민감도 해석을 통한 최적화를 수행하는 복합 최적설계 과정에 흐름도이다. 설계민감도 해석은 본 연구의 범위에 포함되지 않아서 여기서는 제외하였지만, 이에 관한 일반 상업화된 소프트웨어들이 많이 나와 있으므로 이를 참조하면 된다.

### 후 기

여기서 사용한 일부 결과는 미국이 미시간 대학교 Kikuchi 교수와 민승재 씨의 도움을 받았으며, 일본의 QUINT사에서 개발한 OPTISHAPE을 사용하여 얻어졌다. 또한 일부 결과는 한국기계연구원의 최진민 박사와의 공동 연구를 밝혀둔다.

### 참고문헌

- (1) 최진민 외 5인, 신소재 경량차체 구조물의 최적설계 기술 개발(Ⅲ), 과학기술처.
- (2) Guedes, J. M. and Kikuchi, N., 1990,



- “Preprocessing and Postprocessing for Materials Based on Homogeneization Method with Adaptive Finite Element Method,” *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* Vol. 83, 143~198.
- (3) Suzuki, K. and Kikuchi, N., 1991, “A Homogeneization Method for Shape and topology Optimization,” *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* Vol. 93, 291~318.
- (4) Seungjae Min and Kikuchi, N., “Multi-criteria Shape and Topology Optimization Using a Homogeneization Method,” to be Appeared. 