財務管理硏究 第十二卷 第二號(1995. 12), 143~162

확장된 평균-지니 기준의 헤지모형에 활용 가능성 평가

권 택 호* · 조 대 우**

<요 약>

평균-분산 기준보다 우수한 기준이라고 할 수 있는 평균-지니 기준은 위험회피 정도를 고려할 수 있는 확장된 평균-지니 기준으로 확장되면서 선물시장에서의 헤지모형에 도입되어 분포특성과는 무관하게 헤지비율의 특성을 분석할 수 있다는 측면에서 관심의 대상이 되었다. 그러나 확장된 평균-지니 기준을 실제로 적용하기 위해서는 확장된 지니평차를 계산가능한 형태로 변환해야 하는 문제와, 수익률의 누적확률 값을 추정해야 하는 문제점이 있다. 누적확률 값을 추정하는 방법으로 수익률의 분포함수와는 관계없이 순위에 의한 방법이 이용 되었다. 본 연구에서는 실제로 분포의 확률밀도함수를 이용해서 누적확률을 계산하는 경우와 순위를 이용해 추정하는 방법을 비교함으로써 순위방법의 정확성을 평가하고자 하였으며, 확장된 지니평차를 실제로 계산하는 데 있어서의 문제점도 검토하였다. 이러한 검토를 통해 확장된 평균-지니 기준을 헤지모형에 도입하여 활용하는 것의 현실적 유용성을 종합적으로 평가하고자 하였다. 분석결과 확장된 지니평차의 계산을 위해 변형한 식에 대한 정밀한 검토가 필요하다는 점과, 확장된 지니평차를 헤지모형에 적용하기 위해서는 누적확률을 정확하게 계산하는 문제의 해결이 선행되어야 한다는 점을 밝힐 수 있었다.

I. 서 론

분산을 위험의 척도로 사용하고 있는 평균-분산 기준은 수익률의 분포나 투자자의 효용함수에 대한 엄격한 가정 때문에 위험자산의 평가에 있어 유용성에 문제가 제기되어 왔다. 한편 경제학에서 한 사회의 소득불평등 정도를 측정하는 기준으로 제시되었던 지니평차 (Gini's mean difference)는 소득불평등 측정과 불확실성하의 의사결정의 관계가 밝혀지면

* 여수수산대학교 무역학과 전임강사
**충남대학교 무역학과 교수, (현) 미국 New York University 교환교수

서[1] 평균-분산 기준을 대신할 수 있다는 측면에서 재무관리 분야의 관심의 대상이 되기 시작하였다.

Yitzhaki(1982)는 평균과 지니평차를 이용해 구성한 평균-지니(mean-Gini) 기준은 평균-분산 기준과 같이 적용상의 편리함이 있으면서 확률적지배 기준과 같이 효용함수의 일반적 특성을 만족시켜 줄 수 있는 기준이라고 주장하고 수익률의 분포특성을 전제로 이들 사이의 관계를 규명하였다. 지니평차는 Yitzhaki(1983)에 의해서 위험의 회피정도를 반영할 수 있는 확장된 지니평차(extended Gini's mean difference)로 일반화되었다. Shalit와 Yitzhaki(1984)는 평균-지니 기준과, 확장된 지니평차를 이용한 확장된 평균-지니 기준을 적용하여 위험자산의 포트폴리오 선택과 가격결정문제를 분석하였으며, Jeon(1993)은 국제적 관점에서 위험자산의 가격결정문제를 확장하였다.

Bey와 Howe(1984)는 실증분석을 통하여 평균-지니 기준의 유용성을 입증하였다.

한편 Cheung, Kwan 그리고 Yip(1990) 등은 처음으로 지니평차를 헤지모형에 관한 연구에 도입하였다. 이들은 평균-지니 기준을 최소분산 기준에 의한 헤지와 평균-분산 기준에 의한 헤지의 유용성을 비교 평가하는 기준으로 사용하였다. 이 연구를 계기로 확장된 지니평차를 이용한 헤지에 관한 연구들이 발표되었다. Hodgson과 Okunev(1992), Lien과 Luo(1993) 등은 위험최소화헤지의 관점에서 그리고 Kolb와 Okunev(1993)는 기대효용극대화헤지의 관점에서 연구를 하였는데 이들의 연구는 최적헤지비율의 추정에 초점을 두었던 실증적 연구이었다.

그러나 실제로 확장된 지니평차를 의사결정 기준으로 활용할 수 있기 위해서는 수익률자료를 이용해서 각각의 위험회피 정도에 해당하는 지니평차를 계산해야 된다. 올바른 의사결정을 위해서는 무엇보다도 확장된 지니평차를 정확하게 계산할 수 있어야 한다. 본 연구는 시뮬레이션(simulation)을 이용하여 순위(rank)방법으로 계산한 확장된 지니평차의 특성을 살펴보고, 이를 기초로 확장된 평균-지니 기준을 헤지모형에 실제 적용할 수 있는 가능성을 검토하는데 그 목적이 있다. II장에서는 확장된 지니평차와 이를 이용한 확장된 평균-지니 기준에 관하여 간단히 살펴보고, III장에서는 시뮬레이션을 이용해 순위방법에 기초하여 계산한 확장된 지니평차와 확장된 평균-지니 기준의 특성을 분석한다. IV장에서는 연구의 결과를 정리한다.

1) Samuelson(1967)은 위험자산에 대한 투자결정과 벤자민 후생함수를 극대화하는 개인들 사이의 균등분배 문제는 동일하다는 것을 보인 바 있고, Atkinson(1970)은 확률적지배 모형에 따르는 의사결정 규칙은 그대로 소득 불평등도를 측정하는 로렌츠 곡선으로 적용할 수 있음을 증명하였다.

Ⅱ. 확장된 지니평차와 평균-지니 기준

수익률이 정규분포를 따르거나 투자자의 효용함수가 이차효용함수일 경우 평균-분산기준에 의한 투자결정은 평균을 기준으로한 투자결정과 일치한다. 그러나 투기적 시장(speculative markets)에서 하루동안과 같이 짧은 기간 동안에 형성된 수익률의 분포가 정규분포에 의해 잘 적합되지 않는다는 주장은[2] 오늘날 일반적인 사실로 받아들여지고 있다. 또한 투자자의 효용함수를 이차함수로 가정하는데 따르는 문제점에 대해서는 기존에 많은 논의가 있었다.[3] 이러한 제약이 없이 투자안을 평가할 수 있는 기준이 확률적지배 기준인데 이 기준은 실제 적용상의 어려움이 문제점으로 지적되어 왔다.

효용함수의 일반적 특성을 만족시키면서 적용상의 편리함을 갖는 투자안의 평가기준으로 제시된 것이 평균-지니 기준이다. 평균-지니 기준은 위험의 척도로 지니평차(Gini's mean difference)를 사용한다. 지니평차는 가능한 모든 변량들을 둘씩 짝지운 후에 이들의 차이의 절대값을 평균한 값으로 정의한다. 지니평차는 위의 정의에 따라 연속확률변수, 이산확률변수 각각의 경우 식(1-1), (1-2)와 같이 나타낼 수 있다.

$$\Delta=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} | X-Y | f(x)f(y)dxdy \tag{1-1}$$

$$=\frac{1}{N(N-1)}\sum_{k=-\infty}^{\infty} | X_j-Y_k | , \ (j\neq k) \tag{1-2}$$

식에서 Δ는 지니평차, X, Y는 수익의 실현된 값 그리고 N은 관측치의 數이다. 식(1-2)는 반복의 경우 $\frac{1}{N^2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} | X_j-Y_k |$ 와 같이 되지만 N이 클 경우 중요한 차이는 없다.[4] 지니평차는 적용에 편리하도록 범위 [a, b]에 대해서 식(2)와 같은 형태로 변환되어 사용된다. Γ는 변환된 형태의 지니평차라고 할 수 있다.

---

2) Mandelbrot(1963), Fama(1963) 등이 처음으로 실증분석 결과에 근거하여 이 문제를 제기했으며 그후 증권시장, 외환시장, 선물시장 등을 대상으로 많은 연구들이 발표되었다. 권택호(1995)는 외환시장을 중심으로 기존의 분포특성에 관한 연구들을 정리한 바 있다.

3) 이차효용함수의 문제점과 관련해서 Pratt(1964)은 富의 수준이 증가함에 따라 절대위험회피 정도가 증가한다는 점을, Hanoch and Levy(1969) 등은 富가 일정수준 이상일 경우 부가 증가함에 따라 효용이 감소한다는 점을 지적하였다.

4) 경제학에서 소득불평등 정도를 측정하기 위해 사용하는 지니계수(G)는, $G=\Delta/2\mu$로 정의된다. 식(1)에서 소득이 완전히 평등하게 분배되어 있다면 $\Delta=0$이 되며, 소득이 완전히 불평등한 경우 즉 $X_1,\cdots,X_{n-1}=0$, $X_n=n\mu$일 경우는 $\Delta=2\mu$가 되어 지니계수는 $0\leq G\leq 1$의 값을 갖는다.

$$\Gamma=\frac{1}{2}\int_a^b\int_a^b \mid X-Y \mid f(x)f(y)dxdy \tag{2}$$

식(2)는 식(3), 식(4)와 같이 변환이 가능하다.[5]

$$\Gamma=\int_a^b\{1-F(R)\}dR-\int_a^b\{1-F(R)\}^2dR$$

$$=\mu-a-\int_a^b\{1-F(R)\}^2dR \tag{3}$$

$$\Gamma=2\int_a^b R\{F(R)-\frac{1}{2}\}f(R)dR \tag{4}$$

R은 수익률이며 $f(R)$, $F(R)$은 각각 수익률의 확률과 누적확률이다. 식(4)로부터 Gamma는 변수 R과 $F(R)$의 공분산을 2배한 것이라는 것을 알 수 있다. 실제로 Γ는 표준편차와 유사한 특성이 있는 것으로 알려져 있다.[6]

식(3)에 위험회피 정도를 고려할 수 있는 위험회피계수 ν를 도입하면 식(5)와 같은 확장된 지니평차(extended Gini's mean difference)를 얻을 수 있다[Yitzhaki(1983)].

$$\Gamma(\nu)=\int_a^b\{1-F(R)\}dR-\int_a^b\{1-F(R)\}^\nu dR$$

$$=\mu-a-\int_a^b\{1-F(R)\}^\nu dR \tag{5}$$

위험회피계수 $\nu(0\leq\nu\leq\infty)$는 위험회피 정도를 나타낼 수 있는 특성을 갖는 계수인데 일반적으로 관심의 대상이 되는 ν의 값은 위험회피자의 경우에 해당하는 $\nu\geq1$ 범위이다. 본 연구에서도 이 범위를 대상으로 분석을 수행한다. 식에서 $\nu=2$인 $\Gamma(2)$는 지니평차를 의미한다. 확장된 지니평차의 특성 중에서 위험의 척도라는 점과 관련하여 가장 중요한 특성은 계산된 확장된 지니평차의 값들이 ν에 대해 비감소하는 특성이다. 식(5)의 우측 적분항은 ν에 대해 비증가함수이며 따라서 $\Gamma(\nu)$는 ν에 대한 비감소함수가 되어 이 특성이 충족된다. 이것은 위험회피 정도가 큰 투자자일수록 동일한 투자안에 대해서 위험회피 정도가 낮은 투자자에 비해 위험을 크게 인식하게 된다는 것으로 직관적으로도 쉽게 이해할 수 있는 특

5) 식(3), (4)의 유도과정에 대해서는 각각 Dorfman(1972)와 Kendal and Stuart(1977)을 참고하기 바람.
6) 지니평차의 특성에 대해서는 Shalit and Yitzhaki(1984)를 참고하기 바람.

성이다.

수익률의 평균과 지니평차를 이용하면 이차확률적지배(second order stochastic dominance)의 필요조건을 충족시키면서 평균-분산 기준과 같이 적용하기에 편리한 평균-지니 기준을 도출할 수 있다. 평균-지니 기준은 평균과 지니평차를 이용해 투자안을 평가하는 기준으로 확률변수 F가 확률변수 G를 지배하기 위한 평균-지니 기준은 식(6)과 같다.[7)]

$$\mu_F \geq \mu_G \tag{6-1}$$

$$\mu_F - \Gamma_F \geq \mu_G - \Gamma_G \tag{6-2}$$

단, 적어도 한번은 강부등호 성립

식(6-2)에서 지니평차를 위험회피 정도를 반영할 수 있는 확장된 지니평차로 대체하면 식(7)과 같은 확장된 평균-지니 기준을 도출할 수 있다.

$$\mu_F \geq \mu_G \tag{7-1}$$

$$\mu_F - \Gamma_F(\nu) \geq \mu_G - \Gamma_G(\nu) \tag{7-2}$$

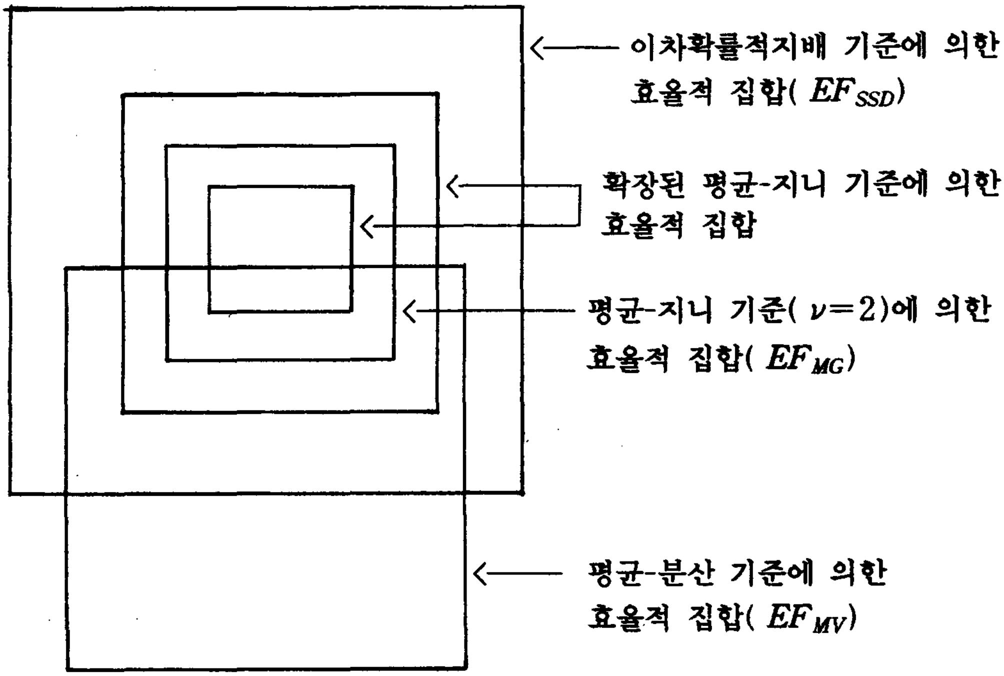
단, 적어도 한번은 강부등호 성립

$\Gamma_G(\nu)$는 식(5)와 같이 정의되는 것으로 식(7)의 의미는 특정한 위험회피 정도 하에서 확장된 평균-지니 기준에 의해 F가 G를 지배하기 위한 조건은 F의 평균수익이 G의 평균수익보다 크거나 같고, F의 평균수익에서 해당 위험회피 정도를 전제로 한 지니평차를 뺀 값이 G의 평균수익에서 해당 위험회피 정도를 전제로 한 지니평차를 뺀 값보다 크거나 같아야(적어도 한번은 크다는 조건이 충족되어야 함) 한다는 것이다. 여기에서 평균에서 지니평차를 뺀 값은 수익에서 해당 위험을 제외시킨 확실성등가(certainty equivalent)이며, 위험회피 계수 ν는 투자자의 특성을 나타내는 계수로 볼 수 있다.

확장된 평균-지니 기준과 다른 위험자산에 대한 평가기준 간에는 다음과 같은 관계가 있음이 밝혀져 있다[Yitzhaki(1982, 1983)]. 즉 이차확률적지배 기준에 의한 효율적 집합을 EF_{SSD}, 평균-지니 기준, 평균-분산 기준에 의한 효율적 집합을 각각 EF_{GM}, EF_{MV}라고 하면 수익률이 정규분포를 따를 때 이들 집합 간에는 $EF_{MV} = EF_{SSD} \supseteq EF_{GM}$의 관계가 성립한다. 또

7) 식(6)이 확률변수 F가 확률변수 G를 이차확률적으로 지배하기 위한 필요조건이 됨에 대한 증명은 부록에 수록하였다. 부록의 내용은 Yitzhaki(1982)의 내용을 정리한 것이다.

〈그림 1〉 평가 기준에 의한 효율적 집합간의 관계



한 수익률의 분포와 관계없이 일반적으로 $EF_{SSD} \supseteq EF_{MG}$의 관계가 보장된다. 그러나 수익률이 정규분포를 따르지 않는 경우에는 EF_{MV}와 다른 효율적 집합과의 관계가 성립하지 않는다. 또한 확장된 평균-지니 기준에 의한 효율적 집합의 경우 위험회피 계수 ν에 따라 서로 다른 효율적 집합이 구성되지만 이들 집합 역시 이차확률적지배 기준에 의해 구성된 효율적 집합의 부분집합이 된다. 즉 확장된 평균-지니 기준에 의해 구성된 효율적 집합을 EF_{EMG}라고 하면 $EF_{SSD} \supseteq EF_{EMG}$이다. 이들 기준에 의해 구성한 효율적 집합들의 일반적 관계는 <그림 1>과 같이 나타낼 수 있다.

Ⅲ. 확장된 지니평차의 계산과 평균-지니 기준의 유용성

1. 확장된 지니평차의 계산방법

확장된 평균-지니 기준을 실제 활용하기 위해서는 확장된 지니평차를 계산하여야 한다. 확장된 지니평차를 계산하기 위해서는 식(5)를 실제로 계산 가능한 형태로 변환시켜야 하며, 누적확률($F(R)$)을 알아야 하기 때문에 수익률분포의 확률밀도함수를 알아야 하는 어려움

이 있다. 누적확률의 문제를 해결하기 위해 Lerman과 Yitzhaki(1984)는 수익률의 순위를 이용해서 누적확률을 추정하는 방법의 사용을 제안하였다. 즉, 관측치를 올림차순으로 정리한 다음 처음부터 순위를 부여하고 이것을 관측치의 수로 나눈 값을 누적확률 대신 사용하는 것이다. 그들은 이 방법을 간편하고도 정확한 방법이라고 주장하였다. 그러나 그들이 제안한 방법의 정확성 여부는 실증적으로 검증된 바 없다. 후에 발표된 연구들은 순위방법을 이용해 확장된 지니평차를 추정하는 방법에 대한 검토없이 실증분석에서 확장된 지니평차의 계산에 이 방법을 이용하였다.[8] 그러나 식(5)를 계산 가능한 형태로 변환하고 누적확률값을 순위방법으로 추정하여 계산한 확장된 지니평차가 위험의 척도로서의 바람직한 특성을 갖고 있는가에 대한 검토와, 이것이 분석적 차원에서 사전적으로 도출된 특성을 만족시키고 있는가에 대한 검토는 반드시 필요하다고 할 수 있다.

2. 확장된 지니평차의 위험척도로서의 특성에 대한 검토

위험에 대한 척도로서의 확장된 지니평차의 특성을 검토하기 위해서 위험회피 계수(ν)와 확장된 지니평차와의 관계를 분석한다. II 장에서 언급된 바와 같이 확장된 지니평차는 위험회피 계수 ν의 비감소함수이어야 한다. 이것은 ν를 위험회피 정도를 나타내는 계수로 사용할 수 있는 근거가 되는 매우 중요한 특성이다. 만약 실제로 계산한 확장된 지니평차가 ν가 증가함에 따라 감소한다면, 위험회피 정도가 증가할수록 오히려 위험을 작게 인식하는 결과가 되어 ν를 위험회피 계수로 사용할 수 없을 것이다.

확장된 지니평차(이하 $\Gamma(\nu)$)가 ν의 비감소함수인가를 검토하기 위해서 ν를 증가하면서 계산된 $\Gamma(\nu)$가 감소하는 경우를 추출하는 작업을 5,000번 수행하고 그 비율을 <표 1>에 수록한다. <표 1.a>는 표준정규분포로부터 무작위 변수를 발생시켜[9] 각 관측치(N)와 위험회피 계수(ν) 별로 $\Gamma(\nu)$를 계산하고 ν가 증가함에 따라 $\Gamma(\nu)$가 감소하는 경우의 비율을 계산한 것이다. 정규확률밀도함수를 이용해 실제 누적확률 값을 계산해 $\Gamma(\nu)$를 계산한 결과를 편의상 '방법1' 표기하고, 순위를 이용해 누적확률을 추정하고 $\Gamma(\nu)$를 계산한 결과를 '방법2'로 표기한다. 또한 실제 투기적 시장에서 수익률의 분포가 정규분포보다 꼬리가 두터운 특성을 갖는다는 연구결과를 고려하여 스튜던트-t분포를 이용하여 정규분포에서와 같은 방법으로 시뮬레이션을 수행하고 결과를 <표 1.b>에 정리한다. 해당 관측치에서 첫 번째 줄은 방법1에 의한 결과이고 두 번째 줄은 방법2에 의한 결과이다. 스튜던트-t분포는 2

8) Hodgson and Okunev(1992), Lien and Luo(1993), Kolb and Okunev(1992, 1993) 등의 실증분석 참고.
9) 표준정규분포를 따르는 확률변수는 Kinderman and Ramage(1976)의 알고리즘을 이용하여 생성하였다.

≤자유도≤10범위에서 분석을 수행하였으나 결과가 자유도에 민감하게 반응하지 않아 자유도가 4인[10] 경우의 결과만을 수록한다. 이 경우에 방법1에 의한 누적확률 값은 자유도 4인 스튜던트-t분포의 확률밀도함수로부터 계산한다. 방법1에서의 누적확률 값은 소수 8자리까지 계산하여 사용하며 N과 ν는 계산상의 문제로 $N \leq 5,000$, $\nu \leq 40$[11] 범위로 한정한다. 실제 분석에서는 $N=50$에서 부터 첫번째는 50, 다음 부터는 100씩 증가시키면서 $N=5,000$이 될 때까지 시뮬레이션을 한다. ν는 1에서 출발하여 첫번째는 0.5, 다음 부터는 1씩 증가시키면서 $\nu=40$이 될 때까지 분석을 한다. <표 1>에는 결과의 일부만을 수록하였다. $\Gamma(\nu)$를 실제로 계산하기 위해서는 기존의 실증연구에서 사용하였던 식(5)를 변형한 식(8)을 이용한다.[12]

$$\Gamma(\nu) = -\nu \cdot Cov(R, (1-F(R))^{\nu-1}) \tag{8}$$

<표 1>에서 ν와 $\Gamma(\nu)$의 관계는 ν의 크기와 N의 크기에 의해 결정되고 있다. 즉 N이 작을수록 ν의 값이 클수록 ν와 $\Gamma(\nu)$는 반대방향으로 움직이는 경향이 있으며 이러한 경향은 일관성을 갖고 있다. 예를 들어 정규분포에서 방법1의 경우 관측치 100개를 이용해 분석을 할 경우 $\nu=40$에서는 ν가 증가함에 따라 $\Gamma(\nu)$가 감소하는 비율이 34.9%이다. 그러나 동일한 상황 하에서 표본의 수를 200으로 증가시키면 이 비율은 23.9%로 감소하며, 표본의 수를 100으로 유지하며 ν의 크기를 30으로 줄이면 이 비율은 27.5%가 된다. 스튜던트-t 분포의 경우도 유사한 특성을 보여주고 있다. 이것은 ν와 $\Gamma(\nu)$가 비감소함수의 관계를 갖기 위해서는 충분한 관측치가 필요하며 필요한 관측치의 크기는 ν의 크기에 따라 달라진다는 것으로 해석할 수 있다. 이러한 결과의 원인은 $\Gamma(\nu)$를 실제로 계산하기 위해서 식(5) 대신에 식(8)을 사용한 점에 있는 것으로 판단된다. 즉 큰 값의 ν를 위험회피 계수로 사용하기 위해서는 충분한 크기의 N이 필요하다. 따라서 상대적으로 적은 관측치를 대상으로 했던 과거의 실증분석들은 결과를 해석하는 데 주의가 필요하다. 그러나 현실적으로 헤지모형에 확장된 지니평차를 적용하기 위해 필요한 관측치를 확보한다는 것은 매우 어려운 일이라고 할 수 있다. 자료를 확보하기 위해서 장기간의 시계열자료를 이용할 경우 장기간 동안 헤지비율이 변하지 않는다고 가정하는 결과가 되는데, 선물과 현물의 관계를 이용하는

10) 투기적 시장의 하나인 외환시장을 대상으로 한 분포특성에 관한 연구에서 Rogalski and Vinso(1978) 등은 환율변화는 자유도가 3~4인 스튜던트-t분포에 의해서 잘 근사될 수 있다는 실증분석 결과를 제시한 바 있다.

11) $N > 5{,}000$, $\nu > 40$의 범위에서는 under flow의 문제가 발생하는 경우가 있어 편의상 이 범위는 분석대상에서 제외한다. 그러나 이러한 제한이 연구결과를 일반화하는 데 제약이 되지는 않는다고 판단된다.

12) 식(8)의 유도과정에 관해서는 Shalit and Yitzhaki(1984)를 참고하기 바람.

〈표 1〉 ν가 증가하면서 확장된 지니평차가 감소하는 비율

a. 수익률이 정규분포를 따를 경우 (단위 %)

관측치	방법	$\nu=1$	$\nu=1.5$	$\nu=2$	$\nu=10$	$\nu=20$	$\nu=30$	$\nu=40$
50	방법1	0	0	0	0.28	24.60	38.50	46.30
	방법2	0	0	0	0	2.02	92.92	99.98
100	방법1	0	0	0	0	13.12	27.50	34.90
	방법2	0	0	0	0	0	3.60	64.78
200	방법1	0	0	0	0	4.42	15.74	23.90
	방법2	0	0	0	0	0	0	0
300	방법1	0	0	0	0	1.70	9.44	17.06
	방법2	0	0	0	0	0	0	0
400	방법1	0	0	0	0	0.56	6.64	13.00
	방법2	0	0	0	0	0	0	0
500	방법1	0	0	0	0	0.26	5.18	10.88
	방법2	0	0	0	0	0	0	0
600	방법1	0	0	0	0	0.08	2.70	8.22
	방법2	0	0	0	0	0	0	0
700	방법1	0	0	0	0	0.02	2.16	7.08
	방법2	0	0	0	0	0	0	0
800	방법1	0	0	0	0	0	1.50	5.18
	방법2	0	0	0	0	0	0	0
900	방법1	0	0	0	0	0	1.04	4.54
	방법2	0	0	0	0	0	0	0
1,000	방법1	0	0	0	0	0	0.86	3.90
	방법2	0	0	0	0	0	0	0
2,000	방법1	0	0	0	0	0	0.04	0.34
	방법2	0	0	0	0	0	0	0
3,000	방법1	0	0	0	0	0	0	0.04
	방법2	0	0	0	0	0	0	0
4,000	방법1	0	0	0	0	0	0	0
	방법2	0	0	0	0	0	0	0
5,000	방법1	0	0	0	0	0	0	0
	방법2	0	0	0	0	0	0	0

(주) 방법1은 정규확률밀도함수로부터 누적확률 값을 계산하여 확장된 지니평차를 계산하는 방법이고, 방법2는 순위를 이용해 누적확률 값을 추정하여 확장된 지니평차를 계산하는 방법임.

b. 수익률이 스튜던트-t분포(자유도=4)를 따를 경우 (단위 %)

관측치	방법	$\nu=1$	$\nu=1.5$	$\nu=2$	$\nu=10$	$\nu=20$	$\nu=30$	$\nu=40$
50	방법1	0	0	0	0	21.38	35.06	44.42
	방법2	0	0	0	0	0.44	61.74	95.54
100	방방법1	0	0	0	0	9.28	20.36	28.70
	방법2	0	0	0	0	0	0.54	19.10
200	방법1	0	0	0	0	2.00	9.76	16.38
	방법2	0	0	0	0	0	0	0
300	방법1	0	0	0	0	0.74	4.70	10.18
	방법2	0	0	0	0	0	0	0
400	방법1	0	0	0	0	0.12	2.66	6.34
	방법2	0	0	0	0	0	0	0
500	방법1	0	0	0	0	0.04	1.22	3.62
	방법2	0	0	0	0	0	0	0
600	방법1	0	0	0	0	0.04	0.58	2.28
	방법2	0	0	0	0	0	0	0
700	방법1	0	0	0	0	0	0.40	1.92
	방법2	0	0	0	0	0	0	0
800	방법1	0	0	0	0	0	0.10	0.96
	방법2	0	0	0	0	0	0	0
900	방법1	0	0	0	0	0	0.12	0.94
	방법2	0	0	0	0	0	0	0
1,000	방법1	0	0	0	0	0	0.04	0.32
	방법2	0	0	0	0	0	0	0
2,000	방법1	0	0	0	0	0	0	0
	방법2	0	0	0	0	0	0	0
3,000	방법1	0	0	0	0	0	0	0
	방법2	0	0	0	0	0	0	0
4,000	방법1	0	0	0	0	0	0	0
	방법2	0	0	0	0	0	0	0
5,000	방법1	0	0	0	0	0	0	0
	방법2	0	0	0	0	0	0	0

(주) 방법1은 자유도 4인 스튜던트-t분포의 확률밀도함수로부터 누적확률 값을 계산하여 확장된 지니평차를 계산하는 방법이고, 방법2는 순위를 이용해 누적확률 값을 추정하여 확장된 지니평차를 계산하는 방법임.

헤지비율이 장기간 변하지 않는다는 가정은 현실적으로 성립하기 어려울 것이기 때문이다. 이러한 관점에서 볼 때 헤지모형에 확장된 지니평차를 활용하는 것은 제한된 범위에서

만 가능하다고 할 수 있다. 그러나 지니평차($\nu=2$)의 경우는 ν와 $\Gamma(\nu)$의 관계가 N의 크기에 관계없이 항상 성립하고 있다. <표 1>에서 방법2에서는 비교적 작은 N에서도 ν와 $\Gamma(\nu)$의 정상적 관계가 성립하고 있으나 이것을 순위방법(방법2)의 정확성을 입증하는 근거라고 볼 수는 없다. 순위방법의 정확성에 대해서는 다음 절에서 검토한다. 향후의 비교분석은 결과의 신뢰성을 확보하기 위해서 ν와 $\Gamma(\nu)$가 정상적인 관계를 유지하고 있는 N과 ν의 범위만을 대상으로 한다.

3. 순위방법의 타당성 검토

본 절에서는 순위를 이용해 계산된 확장된 지니평차에 의해 도출된 결과가 진실된 누적확률 값을 이용해 계산된 확장된 지니평차에 의해 도출된 결과와 일치하는가를 살펴봄으로써 순위방법의 정확성을 검토하고자 한다. 이를 위해서 확률밀도함수를 알고 있는 특정의 분포함수로부터 $N\times1$크기의 무작위변수를 발생시키고 그것을 특정 자산의 N개의 수익률 자료로 간주한다. 따라서 이 경우에 자산의 수익률은 특정의 분포를 따르는 것으로 볼 수 있다. 해당 확률밀도함수를 이용하여 각 관측치에 해당하는 누적확률 $F(R)$을 계산한 다음 각 ν에 해당하는 확장된 지니평차를 계산한다(방법1).

그리고 순위방법을 이용하여 확장된 지니평차를 계산한다(방법2). 다음으로 각각의 방법에 의해 계산된 확장된 지니평차에 기초한 의사결정 결과를 비교한다. 이들 두 결과가 일치하면 순위를 이용하는 방법의 정확성을 긍정적으로 평가할 수 있지만 결과가 상이하다면 순위방법은 정확한 방법이라고 할 수 없을 것이다.

(1) 위험최소화 자산의 일치성

방법1과 방법2에 의한 위험최소화 자산이 동일한가의 여부를 검토한다. 이를 위해서 표준정규분포로부터 $N\times100$크기의 무작위수를 발생시키고 그것을 N개의 수익률 관측치를 갖는 100개의 자산으로 간주한다.[13] 100개의 자산 중에서 확장된 지니평차를 최소화하는 자산을 선택하는 시뮬레이션을 1,000번 수행한 후에 방법1과 방법2의 결과가 일치하지 않은 경우의 비율을 <표 2.a>에 정리한다. 즉, N개의 관측치를 갖는 수익률 변수 100개를 생성하여 확장된 지니평차를 최소화하는 변수를 선택한 후에 그 수익률 변수가 방법1과 방법2에서 일치하는가를 분석한다. N과 ν의 값은 2절에서 설명한 바와 같이 적용하였고, 결과의

13) 표준정규분포를 따르는 확률변수를 발생시킬 경우 실제 발생된 확률변수의 평균과 표준편차는 이론적인 표준정규분포와는 약간 다른 값을 갖는다는 점을 이용하였다.

〈표 2〉 방법 1과 방법2의 위험최소화 자산이 일치하지 않는 비율

a. 수익률이 정규분포인 경우

관측치(N)	ν=2	ν=10	ν=20	ν=30	ν=40
100	0.106	0.614	·	·	·
1,000	0.132	0.624	0.580	·	·
3,000	0.134	0.604	0.596	0.552	0.540
5,000	0.130	0.608	0.588	0.548	0.568

b. 수익률이 스튜던트-t분포(자유도=4)인 경우

관측치(N)	ν=2	ν=10	ν=20	ν=30	ν=40
100	0.132	0.510	·	·	·
1,000	0.186	0.462	0.376	·	·
3,000	0.140	0.418	0.412	0.414	0.392
5,000	0.176	0.462	0.426	0.444	0.438

일부만을 수록하였다. 앞에서와 같이 스튜던트-t분포(자유도=4)에 대해서도 동일한 분석을 수행하고 결과를 <표 2.b>에 수록한다. 자산의 수익률이 정규분포를 따르는 경우인 <표 2.a>를 보면 $N=100$, $\nu=10$에서 방법1에 의한 위험최소화 자산과 방법2에 의한 위험최소화 자산은 평균적으로 61.4% 정도가 다른 것로 나타나고 있다. 즉 1,000번의 시뮬레이션에서 평균적으로 614번은 방법1에서의 위험최소화 수익률 자산과 방법2에서의 위험최소화 수익률 자산이 일치하지 않는다.

$\nu=2$에서 일치되지 않는 비율이 가장 낮으며 $\nu \geq 10$에서는 ν가 증가할수록 두 방법의 결과가 일치되지 않는 비율이 감소하는 경향이 있다. 그러나 전체적으로 볼 때 두 방법의 결과는 큰 차이가 있다. 결국 순위방법에 의거해 위험최소화 자산을 선택할 경우 $\nu=2$를 제외하면 잘못된 의사결정을 내릴 수 있는 가능성이 매우 높다. 즉 순위방법에 의해 계산한 $\Gamma(\nu)$를 기준으로 위험최소화 헤지비율을 계산하는 것은 신뢰할 수 있는 방법이 될 수 없다는 것이다. 따라서 순위방법을 이용해서 $\Gamma(\nu)$를 계산하고 이를 이용해서 위험최소화 헤지비율을 추정하여 그 특성을 분석한 기존의 연구결과는 해석에 주의가 필요하다.

(2) 효율적 포트폴리오 집합의 일치성

방법1과 방법2에 의해 구성된 효율적 포트폴리오 집합의 동일성 여부를 검토하기 위해 앞

〈표 3〉 방법 1과 방법2의 효율적 포트폴리오집합이 일치하지 않는 비율

a. 정규분포인 경우

관측치(N)	$\nu=2$	$\nu=10$	$\nu=20$	$\nu=30$	$\nu=40$
100	0.210	0.216	·	·	·
	{1.81}	{2.49}			
	(1.57)	(2.63)			
1,000	0.258	0.394	0.506	·	·
	{1.94}	{2.71}	{3.02}		
	(1.62)	(2.84)	(3.23)		
3,000	0.278	0.398	0.520	0.552	0.610
	{1.99}	{2.66}	{2.97}	{3.23}	{3.39}
	(1.64)	(2.83)	(3.26)	(3.50)	(3.65)
5,000	0.246	0.428	0.562	0.596	0.668
	{1.93}	{2.62}	{3.11}	{3.32}	{3.47}
	(1.62)	(2.83)	(3.36)	(3.57)	(3.72)

주) { }의 숫자는 정규확률밀도함수를 이용해 확장된 지니평차를 계산해 이용한 경우의 효율적 포트폴리오의 구성자산 수의 평균이며, ( )의 숫자는 순위방법을 이용해 확장된 지니평차를 계산해 이용한 경우의 효율적 포트폴리오의 구성자산 수의 평균이다.

b. 수익률이 스튜던트-t분포(자유도=4)인 경우

관측치(N)	$\nu=2$	$\nu=10$	$\nu=20$	$\nu=30$	$\nu=40$
100	0.208	0.262	·	·	·
	{2.14}	{2.71}			
	(1.97)	(2.93)			
1,000	0.236	0.452	0.548	·	·
	{2.12}	{2.57}	{2.83}		
	(1.90)	(2.74)	(3.10)		
3,000	0.254	0.460	0.552	0.582	0.600
	{2.14}	{2.61}	{2.87}	{2.97}	{3.11}
	(1.88)	(2.82)	(3.10)	(3.29)	(3.42)
5,000	0.250	0.492	0.588	0.618	0.654
	{2.17}	{2.58}	{2.87}	{3.01}	{3.10}
	(1.89)	(2.87)	(3.13)	(3.32)	(3.47)

주) { }의 숫자는 자유도 4인 스튜던트-t분포의 확률밀도함수를 이용해서 확장된 지니평차를 계산해서 이용한 경우의 효율적 포트폴리오의 구성자산 수의 평균이며, ( )의 숫자는 순위방법을 이용해서 확장된 지니평차를 계산한 경우의 효율적 포트폴리오의 구성자산 수의 평균이다.

에서와 같은 방법으로 100개의 자산에 대한 수익률을 생성하고, 방법1과 방법2에 의해 $\Gamma(\nu)$를 계산한 후에 이를 식(7)의 확장된 평균-지니 기준에 적용하여 100개의 자산들 중에서 효율적 자산들을 선택하여 효율적 집합을 구성하는 시뮬레이션을 1,000번 수행한다. 구체적으로 설명하면 N개의 관측치를 갖는 수익률 변수 100개를 생성하고, 확장된 평균-지니 기준으로 효율적인 수익률 변수들을 추출한 후에 이들 변수들의 구성(효율적 포트폴리오 집합)이 방법1과 방법2에서 동일하게 나타나는가의 분석을 1,000번 수행하는 것이다. N과 ν의 값은 2절에서 설명한 바와 같이 적용하였고 결과의 일부만을 수록하였다. 방법1과 방법2에 의해 구성된 효율적 포트폴리오집합의 구성이 동일하지 않은 경우를 추출하여 그 비율을 <표 3>에 정리한다. <표 3.a>는 수익률이 정규분포인 경우이고 <표 3.b>는 수익률이 스튜던트-t분포인 경우이다. 예를 들어 <표 3.a>를 보면 N=100, ν=10에서 두 방법에 의한 효율적 집합은 평균적으로 21.6% 정도가 상이하다. 동일한 상황에서 N이 증가하여 N=1,000인 경우는 이들 두 방법에 의해 구성된 효율적 집합이 상이한 비율은 39.4%로 증가한다. 또한 N=1,000에서 ν=20으로 증가하면 두 방법에 의한 효율적 집합이 상이한 비율은 50.6%로 증가한다. 상이한 비율이 가장 낮은 경우는 ν=2인 경우이다. 스튜던트-t분포의 경우도 유사한 특성을 보이고 있다. 효율적 집합에 포함된 자산들의 數를 보면 ν=2에서는 방법1의 경우가 약간 크게 나타나고 있으나 ν가 증가할수록 방법2에 의한 효율적 집합의 크기는 상대적으로 크게 증가하여 방법2의 효율적 포트폴리오에 대한 선별력이 떨어지고 있음을 볼 수 있다. 즉 효율적 집합의 구성 측면에서 볼 때, 순위방법으로 누적확률값을 추정하고 이를 이용해 효율적 집합을 구성하는 것은 ν>2의 범위에서는 잘못된 효율적 집합을 구성할 수 있는 가능성이 매우 높다고 할 수 있다. 따라서 순위를 이용해서 확장된 지니평차를 계산하고, 확장된 평균-지니 기준을 이용해 추정한 기대효용극대화 헤지비율의 특성을 분석한 결과는 신뢰성이 매우 낮다는 점을 인식해야 할 것이다.

Ⅳ. 결 론

평균-분산 기준보다 우수한 기준이라고 할 수 있는 평균-지니 기준은 위험회피 정도를 고려할 수 있는 확장된 평균-지니 기준으로 확장되면서 선물시장에서의 헤지모형에 도입되어 분포특성과는 무관하게 헤지비율의 특성을 분석할 수 있다는 측면에서 관심의 대상이 되었다. 그러나 확장된 평균-지니 기준을 실제로 적용하기 위해서는 확장된 지니평차를 계산해야 한다. 확장된 지니평차를 계산하기 위해서는 실제로 계산이 가능한 형태로 식을 변

환해야 하는 문제와 수익률의 누적확률 값을 추정해야 하는 문제점이 있다. 누적확률 값을 추정하는 방법으로 기존의 실증분석에서는 수익률의 분포함수와는 관계없이 순위에 의한 방법이 이용 되었다. 본 연구에서는 실제로 분포의 확률밀도함수를 이용해서 누적확률을 계산하는 경우와 순위를 이용해 추정하는 방법을 비교함으로써 순위방법의 정확성을 평가하고자 하였으며, 확장된 지니평차를 정확하게 계산하기 위한 조건도 검토하였다. 이러한 검토를 통해 확장된 평균-지니 기준을 헤지모형에 도입하여 활용하는 것의 현실적 유용성을 종합적으로 평가하고자 하였다.

확장된 지니평차가 믿을 만한 위험의 척도가 되기 위해서는 분석하고자 하는 위험회피 정도에 따라 충분한 관측치가 필요하다. 이러한 조건은 장기적으로 선물과 현물의 관계가 변할 수 있다는 관점에서 보면 확장된 지니평차를 헤지모형에 도입하는데 제약요인이 될 수 있다. 또한 순위에 기초하여 누적확률을 추정하고 확장된 지니평차를 계산할 경우 지니평차($\nu=2$)의 경우를 제외하면 위험최소화 포트폴리오나 효율적 포트폴리오의 선택에 잘못된 의사결정을 유도할 가능성이 매우 높으며, 특히 ν가 큰 값을 갖는 경우에는 이러한 가능성이 더욱 커진다. 즉 기존의 지니평차를 순위방법을 이용하여 계산할 수 있다고 하더라도 확장된 지니평차를 순위방법을 이용하여 계산할 수는 없다. 이러한 분석결과는 정규분포와 정규분포보다 꼬리가 두터운 스튜던트-t분포에서 동일하게 입증되었다. 따라서 확장된 지니평차를 헤지모형에 적용하기 위해서는 누적확률을 정확히 추정할 수 있는 방법에 대한 연구가 선행되어야 한다. 사전적으로 분포의 특성을 파악한 후에 해당 확률밀도함수를 이용해서 누적확률을 추정하고 이를 이용해 확장된 지니평차를 계산하는 것도 하나의 방법이 될 수 있다.

또한 식(8)을 이용해서 $\Gamma(\nu)$를 계산하는 것의 정당성을 규명하는 정밀한 분석이 있어야 할 것이다.

이러한 결과에 비추어 볼 때 확장된 평균-지니 기준을 헤지모형에 대한 연구에 실제로 적용하는 것은 현실적으로 볼 때 매우 어렵다고 할 수 있다. 평균-지니 기준의 경우에도 분포의 특성과 관계없이 순위를 이용해 누적확률을 추정하여 지니평차를 계산하는 것에 관해서는 추가적인 검토가 필요하다고 판단된다.

<부　록>

식(6)이 확률변수 F가 확률변수 G를 이차확률적으로 지배하기 위한 필요조건임에 대한 증명

확률분포 F가 확률분포 G를 일차확률적, 이차확률적으로 지배하기 위한 필요충분조건은 각각 식(A1), (A2)와 같다.

$$F_F(R) \le F_G(R), \qquad \text{for } all \text{ R} \tag{A1}$$

$$\int_{-\infty}^{R} F_F(t)dt \le \int_{-\infty}^{R} F_G(t)dt, \qquad \text{for } all \text{ R} \tag{A2}$$

단, 적어도 한번은 강부등호 성립

평균-지니 기준을 아래와 같이 정의하면 확률적 지배조건과 평균-지니 기준 사이에는 아래 명제와 같은 관계가 성립한다.

평균-지니 기준 : $\mu_F \ge \mu_G$이고 $\mu_F - \Gamma_F \ge \mu_G - \Gamma_G$
단, 적어도 한번은 강부등호 성립.

명제 : 평균-지니 기준은 이차확률적지배 기준에 의해 F가 G를 지배하기 위한 필요조건이다.

위의 명제를 증명하기 위해서 먼저 명제1을 증명한다.

명제1 : $\lambda \ge 0$은 일차 및 이차확률적지배의 필요조건이다.

$$\lambda_n = \int_a^b \{1-F(R)\}^n dR - \int_a^b \{1-G(R)\}^n dR, \quad n=1, 2, 3, \cdots \tag{A3}$$

명제1의 증명 : 정의에 의해 $\lambda \ge 0$은 모든 n에 있어 일차확률적지배와 $n=1$에 있어 이차확률적지배의 필요조건이 된다. 따라서 명제1의 증명을 위해서는 $n=2, 3, \cdots$의 경우에 대한 증명이 필요하며 이의 증명을 위해서는 다음의 공리에 대한 증명이 필요하다.

공리 : $\alpha(R)$이 비음 및 비증가함수일 때 모든 R에 대하여 $\int_a^R \beta(z)dz \geq 0$이 성립하면 모든 R에 대하여 $\int_a^R \alpha(z)\beta(z)dz \geq 0$이 성립한다.

공리의 증명 : $\beta(R)$이 $a<R_1, R_2, \cdots, R_n<b$에서 n번 부호가 변한다고 하자(즉, $a<R<R_1$ 일 때 $\beta(\mathrm{R})>0$이고 $R_1<R<R_2$일 때 $\beta(R)<0, \cdots$) 그러면 $\int_a^{Ra}\alpha(z)\beta(z)dz \geq \alpha(R_1)\int_a^{Ra}\beta(z)dz \geq 0$이 성립하고, $a<R<R_1$인 모든 R에 대하여 $\int\alpha(z)\beta(z)dz \geq 0$이 된다. 위의 논의를 반복하면,

$$\int_a^{R_{2n}}\alpha(z)\beta(z)dz \geq \alpha(R_{2n-1})\int_a^{R_{2n}}\beta(z)dz \geq 0$$

임으로 모든 R에 대하여 $\int\alpha(z)\beta(z)dz \geq 0$이 성립한다.

공리 증명 끝

식(A3)은 식(A4)와 같이 정리된다.

$$\int_a^b \{G(R)-F(R)\}\sum_{h=0}^{n-1}\{1-F(R)\}^{n-h-1}\{1-G(R)\}^h \tag{A4}$$

식(A2.4)에서 $\alpha(R)=\Sigma\{1-F(R)\}^{n-h-1}\{1-G(R)\}^h$, $\beta(z)=G(R)-F(R)$이라고 하면,

$$\alpha(R) \geq 0,$$
$$\frac{d\alpha(R)}{dR} = -\sum_{h=0}^{n-1}\{1-F(R)\}^{n-h-2}\{1-G(R)\}^{h-1} \times(n-h-1)\{1-G(R)\}+h\{1-F(R)\}\} \leq 0$$

임으로 $\alpha(R)$은 비음, 비증가함수이다.

$\int_a^R \beta(z)dz=\int_a^R\{G(R)-F(R)\}dz \geq 0$은 F가 G를 지배하기 위한 필요충분조건이므로 공리 1로부터 $\lambda \geq 0$은 이차확률적지배의 필요조건이다.

명제1 증명 끝

명제에서 $n=1, 2$인 경우를 살펴보면,

$$\lambda_1 = \int\{1-F(R)\}dR - \int\{1-G(R)\}dR$$
$$= \mu_F - \mu_G \geq 0 \tag{A5}$$

$$\lambda_2 = \int\{1-F(R)\}^2 dR - \int\{1-G(R)\}^2 dR$$
$$= (\mu_F - \Gamma_F) - (\mu_G - \Gamma_G) \geq 0 \tag{A6}$$

따라서 식(A5), (A6)을 이용한 평균-지니 기준은 이차확률적지배의 필요조건이 된다.

명제 증명 끝.

참 고 문 헌

권택호, "最小分散헤지의 改善 方案과 有用性 評價 -通貨先物市場을 對象으로- "서울대학교 대학원 박사학위, 1995.2.

Atkinson, A. B., "On the Measurement of Inequality," *Journal of Economic Theory* 2 (1970), 244-263.

Bey, R. P. and K. M. Howe, "Gini' s Mean Difference and Portfolio Selection: An Empirical Evaluation", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 19, No.3 (September 1984), 329-338.

Cheung, C. S. and C. C. Y. Kwan, P. C. Y. Yip, "The Hedging Effectiveness of Options and Futures : A Mean-Gini Approach", *The Journal of Futures Markets*, Vol. 10, No. 1 (1990), 61-73.

Dorfman, R., "A Formula for the Gini Coefficient", *The Review of Economics and Statistics* (November 1978), 146-149.

Fama, E. F., "Mandelbrot and the Stable Paretian Hypothesis", *The Journal of Business* 36 (1963), 420-429.

Hanoch,G. and Levy, H., "The Efficiency Analysis of Choices Involving Risk", *Review of Economic Studies* 36 (september 1969), 335-346.

Hodgson, A. and J. Okunev, "An Alternative Approach for Determining Hedge Ratios for Futures Contracts," *Journal of Business Finance* (January 1992), 211-224.

Jeon, K. S., "Three Essays on International Finance, CH. IV the International Asset Pricing Model using the Mean-Gini Approach," Unpublished Ph.D. dissertation, University of Maryland, 1993.

Kendall, M. and Stuart, A., The Advanced Theory of Statistics, Vol. 1, 4th ed., London; Griffin, 1977.

Kinderman, A. J. and J. G. Ramage, "Computer Generation of Normal Random Numbers," *Journal of the American Statistical Association* Vol. 71, No. 356 (December 1976), 893-896.

Kolb, R. W. and J. Okunev, "An Empirical Evaluation of the Extended Gini Coefficient of Futures Contracts," *The Journal of Futures Markets* Vol. 12, No. 2 (1992), 177-186.

________, "Utility Maximizing Hedge Ratios in the Extended Mean Gini Framework," *The Journal of Futures Markets* Vol. 13, No. 6 (1993), 597-609.

Lerman, R. I. and S. Yitzhaki, "A Note on the Calculation and Interpretation of the Gini Index," *Economics Letters* 15 (1984), 363-368.

Lien, D. and X. Luo, "Estimating the Extended Mean-Gini Coefficient for Futures Hedging," *The Journal of Futures Markets* Vol. 13 No. 6 (1993), 665-676.

Mandelbrot, B. "The Variation of Certian Speculative Prices", *The Journal of Business* 36 (1963), 394-419.

Pratt, A., "Risk Aversion in the Small and the Large", *Econometrica* 32 (1964), 122-136.

Rogalski, R. J. and J. D. Vinso, "Empirical Properties of Foreign Exchange Rates," *Journal of International Business Studies* 9 (1978), 69-79.

Samuelson, "General Proof that Diversification Pays," *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 2 (March 1967), 1-13.

Shalit, H. and S. Yitzhaki, "Mean-Gini Portfoio Theory, and the Pricing of Risky Assets," *The Journal of Finance* Vol. XXXIX, No. 5 (December 1984), 1449-1468.

Yitzhaki, S., "On An Extension of the Gini Inequality Index," *International Economic review* Vol. 24, No. 3 (October 1983), 617-628.

________, "Stochastic Dominance, Mean Variance, and Gini' s Mean Difference," *The American Economic Review* Vol. 72, No. 1 (March 1982), 178-185.