財務管理研究 第十二卷 第二號(1995. 12), 73~93

한국증권시장에서의 증권가격의 불연속성과 매도매수가격의 차이로 인한 통계추정치의 편의에 관한 연구

최 종 연*

<요 약>

본 연구는 주식시장에서의 체결가격을 균형가격으로 가정하여 계산된 수익률에 관한 통계추정치의 편의에 관하여 분석하고 있다. 주식수익률의 통계적모멘트를 추정하는 것은 주식가격의 행태를 분석하는 연구 및 사건연구등에서 많은 학자들에 의하여 수행되어 왔다. 기존의 대부분의 연구들은 시장에서 체결된 가격이 그 시점의 진정한 균형가격이라는 가정하에 수익률을 계산하고 이 수익률 자료로부터 수익률의 평균, 표준편차, 외도(skewness), 첨도(kurtosis) 등의 통계적모멘트를 추정하였다. 그러나 체결가격은 시장의 규칙에 의해 일정한 호가단위로만 거래될 뿐 아니라 매도 또는 매수호가에 거래됨으로써 진정한 균형가격과의 괴리가 있을 수 있게 된다. 본 연구는 주식 호가단위의 불연속성 과 매도매수호가의 차이로 인한 통계추정치의 편의에 관한 모형을 도출하여 편의의 크기와 특징을 분석하고, 이를 수정하는 간편식을 도출하여 그 유효성을 검증하고 있다.

Gottlieb and Kalay(1985), Ball(1988), Cho and Frees(1988)등은 1/8 달러의 최소호가단위로 인하여 발생하는 기존의 분산추정치의 편의를 계산하고 이를 수정하는 간편식을 제시하였다. French and Roll(1986)은 휴일이 포함된 기간의 수익률 분산과 평일 분산추정치의 비율이 기간과 비례하지 않는 원인중 하나는 매도매수호가차이로 인한 분산추정치의 편의라는 점을 설명한 바 있다. Choi and Shastri(1989)는 Black and Scholes 옵션가격결정모형이 주식 분산값의 크기에 따라 일정한 편의를 보이는 주요한 원인은 퍼센티지 매도매수호가차이와 옵션가격이 모두 진정한 분산치의 정의 함수이기 때문이라는 점을 보였다. Harris(1988)와 최종연(1994)는 주가의 불연속성 및 매도매수호가차이를 동시에 고려하여 기존의 분산추정치가 어떠한 편의를 보이는지에 관하여 분석한 바 있다. 본 연구에서는 최종연(1994)의 연구에서 도출된 모형을 연장하여 국내 주식시장과 같이 주가 수준에 따라 최소호가단위가 변화할 때의 변형모형을 도출하였다. 또한 이 모형에 따라 통계추정치의 편의를 수익률의 표준편차를 중심으로 계산하여 그 정도를 미국시장의 경우와 비교하였고, 그 추정치의 수정방법에 대하여 호가단위가 변화하는 주가금액이 10,000원 주변일 경우를 중심으로 분석하였다.

* 한양대학교 경영학과 부교수

** 본 연구는 1994년 한양대학교 교내연구비의 지원으로 수행되었습니다.

Ⅰ. 연구모형

균형가격 P(t)가 로그정규확산과정(Log Normal Diffusion Process)을 따른다고 가정할 때, 아래의 확률미분식이 성립하게 된다.

$$dP=\mu P\, dt+\sigma P\, db \tag{1}$$

$$P(t)=P(0)e^{\sigma b(t)+\mu^{*}t} \tag{1}$$

여기서, $\mu^{*}=\mu-\left(\frac{1}{2}\right)\sigma^{2}$

$b(t)=\varepsilon\sqrt{\Delta t}=$ Wiener process

t시점에서 관찰되는 가격을 $\hat{P}(t)$라고 정의하고, 최소호가 단위가 주가수준에 관계없이 일정하다면, $\hat{P}(t)$와 P(t)와의 관계는 다음과 같이 가정할 수 있다.[1)]

$$\hat{P}(t)=\left[nd \mid nd-\frac{d}{2}\leq=P(t)\frac{\delta(t)S(t)}{2}<nd+\frac{d}{2}\right] \tag{2}$$

여기서, n : 양의 정수, d : 증권시장에서의 최소거래단위(예 : 100원 또는 1/8달러)

$\delta(t)=\begin{cases}+1 & \text{만약 t에서의 거래가 매도호가에 성립할 경우,}\\ -1 & \text{만약 t에서의 거래가 매수호가에 성립할 경우}\end{cases}$

S(t) : t시점에서의 매도매수호가의 차이

위의 식 (1)′과 (2)에 의거할 때 거래가격의 변화에 대한 통계적 모멘트는 다음과 같이 도출된다.

$$E\{[\hat{P}(t+\Delta t)-\hat{P}(t)]^{L}\}=\sum_{j=-j_c}^{\infty}(j\,d)^{L}I_j \tag{3}$$

여기서, $j_c=\frac{\hat{P}(t)}{d}$

1) Gottlieb and Kalay에서 밝힌 바와 같이 $\hat{p}(t)$와 p(t)와의 관계는 여러 가지의 형태로 가정될 수 있으나, 결과에는 큰 영향을 미치지 못한다. 또한 정보의 비대칭성을 고려할 때 P(t)는 모든 정보가 반영된 균형가격이라기 보다는 시장호가를 형성하고 있는 투자자들(미국시장의 경우 딜러)이 생각하고 있는 균형가격(Perceived equilibrium price)이라고 해석될 수 있다.

$$
\begin{aligned}
I_j = &\Pr(ask, t)\Pr(ask, t+\Delta t)\int_{nd-(\frac{S(t)}{2})-(\frac{d}{2})}^{nd-(\frac{S(t)}{2})+(\frac{d}{2})} h(1)\{\Phi_1\}dx \\
&+\Pr(ask, t)\Pr(bid, t+\Delta t)\int_{nd-(\frac{S(t)}{2})-(\frac{d}{2})}^{nd-(\frac{S(t)}{2})+(\frac{d}{2})} h(1)\{\Phi_2\}dx \\
&+\Pr(bid, t)\Pr(ask, t+\Delta t)\int_{nd-(\frac{S(t)}{2})-(\frac{d}{2})}^{nd-(\frac{S(t)}{2})+(\frac{d}{2})} h(2)\{\Phi_1\}dx \\
&+\Pr(bid, t)\Pr(bid, t+\Delta t)\int_{nd-(\frac{S(t)}{2})-(\frac{d}{2})}^{nd-(\frac{S(t)}{2})+(\frac{d}{2})} h(2)\{\Phi_2\}dx
\end{aligned} \tag{3a}
$$

Pr(ask, t) : t시점에서 거래가 매도호가에 이루어질 확률
Pr(bid, t) : t시점에서 거래가 매수호가에 이루어질 확률

$h(1) = P(t) \in \left[(nd-\frac{d}{2}-\frac{S(t)}{2}), (nd+\frac{d}{2}-\frac{S(t)}{2})\right]$일때 P(t)의 밀도함수값

$h(2) = P(t) \in \left[(nd-\frac{d}{2}+\frac{S(t)}{2}), (nd+\frac{d}{2}+\frac{S(t)}{2})\right]$일때 P(t)의 밀도함수값

$$
\begin{aligned}
\Phi_1 = &\Phi\left[\frac{1}{\sigma\sqrt{\Delta t}}\ln\left[\frac{(n+j)d-\left(\frac{S(t+\Delta t))}{2}\right)+\left(\frac{d}{2}\right)}{X}\right]-\frac{\mu^*\sqrt{\Delta t}}{\sigma}\right] \\
&-\Phi\left[\frac{1}{\sigma\sqrt{\Delta t}}\ln\left[\frac{(n+j)d-\left(\frac{S(t+\Delta t))}{2}\right)-\left(\frac{d}{2}\right)}{X}\right]-\frac{\mu^*\sqrt{\Delta t}}{\sigma}\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Phi_2 = &\Phi\left[\frac{1}{\sigma\sqrt{\Delta t}}\ln\left[\frac{(n+j)d+\left(\frac{S(t+\Delta t))}{2}\right)+\left(\frac{d}{2}\right)}{X}\right]-\frac{\mu^*\sqrt{\Delta t}}{\sigma}\right] \\
&-\Phi\left[\frac{1}{\sigma\sqrt{\Delta t}}\ln\left[\frac{(n+j)d+\left(\frac{S(t+\Delta t))}{2}\right)-\left(\frac{d}{2}\right)}{X}\right]-\frac{\mu^*\sqrt{\Delta t}}{\sigma}\right]
\end{aligned}
$$

Φ: 표준누적 정규분포의 값
증명 : 부록 1 참조

그러나 한국시장에서의 경우와 같이 최소호가 단위가 주가수준에 따라 달라진다면 위의 (2)식은 다음의 식(4)와 같이 변형된다.

$$\hat{P}(t)=\left\{n_1d_1 \mid n_1d_1-\frac{d_1}{2}\le P(t)\frac{\delta(t)S(t)}{2}<n_1d_1+\frac{d_1}{2}\right\}$$

만약 $\hat{P}(t)<P_c$

$$\hat{P}(t)=\left\{P_c=n_1^{*}d_1 \mid P_c-\frac{d_1}{2}\le P(t)\frac{\delta(t)S(t)}{2}<P_c+\frac{d_2}{2}\right\}$$

만약 $\hat{P}(t)<P_c$

$$\hat{P}(t)=\left\{P_c+n_2d_2 \mid P_c+n_2d_2-\frac{d_2}{2}\le P(t)\frac{\delta(t)S(t)}{2}<P_c+n_2d_2+\frac{d_2}{2}\right\} \tag{4}$$

만약 $\hat{P}(t)<P_c$

여기서 d_1 : 가격수준이 P_c 보다 낮을 때의 최소 호가 단위

d_2: 가격수준이 P_c 보다 높을 때의 최소 호가 단위

P_c : 최소 호가단위의 기준이 변화하는 가격수준

(예 : 한국 주식시장의 경우 $P_c=10{,}000$, $d_1=10$, $n_1^{*}=1{,}000$)

$\delta(t)$와 $S(t)$는 식 (2)에서 설명된 바와 동일한 변수

위의 식 (1)′과 (4)에 의거할 때 거래가격의 변화에 대한 통계적 모멘트의 식 (3)은 다음의 식(5)와 같이 나타나게 된다.

$$E\{[\hat{P}(t+\Delta t)-\hat{P}(t)]^{L}\}$$

$$=\sum_{j=-j_c}^{n_c-1}(jd_1)^{L}I_{j,1}+(n_cd_1)^{L}I_{j,2}+\sum_{j=n_c+1}^{\infty}[n_cd_1+(j-n_c)d_2]^{L}I_{j,3} \tag{5}$$

여기서 $n_c=\frac{P_c}{d_1}-j_c$

$$j_c=\frac{\hat{P}(t)}{d_1}$$

$$
\begin{aligned}
I_{j,i} &= I_{j,i,ask,ask} + I_{j,i,ask,bid} + I_{j,i,bid,ask} + I_{j,i,bid,bid} \qquad (i=1,2,3) \\
&= \Pr(ask, t)\Pr(ask, t+\Delta t)\int_{\hat{P}(t)-(\frac{S(t)}{2})-k_1}^{\hat{P}(t)-(\frac{S(t)}{2})+k_2} h(1, k_1, k_2)\phi_1(jd_i)dx \\
&+ \Pr(ask, t)\Pr(bid, t+\Delta t)\int_{\hat{P}(t)-(\frac{S(t)}{2})-k_1}^{\hat{P}(t)-(\frac{S(t)}{2})+k_2} h(1, k_1, k_2)\phi_2(jd_i)dx \\
&= \Pr(bid, t)\Pr(ask, t+\Delta t)\int_{\hat{P}(t)+(\frac{S(t)}{2})-k_1}^{\hat{P}(t)+(\frac{S(t)}{2})+k_2} h(2, k_1, k_2)\phi_1(jd_i)dx \\
&+ \Pr(bid, t)\Pr(bid, t+\Delta t)\int_{\hat{P}(t)+(\frac{S(t)}{2})-k_1}^{\hat{P}(t)+(\frac{S(t)}{2})+k_2} h(2, k_1, k_2)\phi_2(jd_i)dx
\end{aligned}
\tag{5-a}
$$

여기서 $\hat{P}_t < P_c$이면 $k_1 = k_2 = \frac{d_1}{2}$

$\hat{P}_t = P_c$이면 $k_1 = \frac{d_1}{2}, k_2 = \frac{d_2}{2}$

$\hat{P}_t > P_c$이면 $k_1 = k_2 = \frac{d_2}{2}$

$h(\cdot)$는 적분범위 안에서의 $P(t)=X$의 밀도함수 값.

또한,

$$
\begin{aligned}
\phi_1(jd_1) &= \phi\left[\frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\ln\left[\frac{\hat{P}(t)+jd_1-\left(\frac{S(t+\Delta t)}{2}\right)+\left(\frac{d_1}{2}\right)}{X}\right]-\frac{\mu^*\sqrt{\Delta t}}{\sigma}\right] \\
&-\phi\left[\frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\ln\left[\frac{\hat{P}(t)+jd_1-\left(\frac{S(t+\Delta t)}{2}\right)-\left(\frac{d_1}{2}\right)}{X}\right]-\frac{\mu^*\sqrt{\Delta t}}{\sigma}\right]
\end{aligned}
$$

$$
\phi_1(jd_2) = \phi\left[\frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\ln\left[\frac{P_c-\left(\frac{S(t+\Delta t)}{2}\right)+\left(\frac{d_2}{2}\right)}{X}\right]-\frac{\mu^*\sqrt{\Delta t}}{\sigma}\right]
$$

$$-\phi\left[\frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\ln\left[\frac{P_c-\left(\frac{S(t+\Delta t)}{2}\right)-\left(\frac{d_1}{2}\right)}{X}\right]-\frac{\mu^*\sqrt{\Delta t}}{\sigma}\right]$$

$$\phi_1(jd_3)=\phi\left[\frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\ln\left[\frac{P_c-(j-n_c)d_2-\left(\frac{S(t+\Delta t)}{2}\right)+\left(\frac{d_2}{2}\right)}{X}\right]-\frac{\mu^*\sqrt{\Delta t}}{\sigma}\right]$$

$$-\phi\left[\frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\ln\left[\frac{P_c-(j-n_c)d_2-\left(\frac{S(t+\Delta t)}{2}\right)-\left(\frac{d_2}{2}\right)}{X}\right]-\frac{\mu^*\sqrt{\Delta t}}{\sigma}\right]$$

$$\phi_2(jd_1)=\phi\left[\frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\ln\left[\frac{\hat{P}(t)+jd_1+\left(\frac{S(t+\Delta t)}{2}\right)+\left(\frac{d_1}{2}\right)}{X}\right]-\frac{\mu^*\sqrt{\Delta t}}{\sigma}\right]$$

$$-\phi\left[\frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\ln\left[\frac{\hat{P}(t)+jd_1+\left(\frac{S(t+\Delta t)}{2}\right)-\left(\frac{d_1}{2}\right)}{X}\right]-\frac{\mu^*\sqrt{\Delta t}}{\sigma}\right]$$

$$\phi_2(jd_2)=\phi\left[\frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\ln\left[\frac{P_c+\left(\frac{S(t+\Delta t)}{2}\right)+\left(\frac{d_2}{2}\right)}{X}\right]-\frac{\mu^*\sqrt{\Delta t}}{\sigma}\right]$$

$$-\phi\left[\frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\ln\left[\frac{P_c+\left(\frac{S(t+\Delta t)}{2}\right)-\left(\frac{d_1}{2}\right)}{X}\right]-\frac{\mu^*\sqrt{\Delta t}}{\sigma}\right]$$

$$\phi_2(jd_3)=\phi\left[\frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\ln\left[\frac{P_c+(j-n_c)d_2-\left(\frac{S(t+\Delta t)}{2}\right)+\left(\frac{d_2}{2}\right)}{X}\right]-\frac{\mu^*\sqrt{\Delta t}}{\sigma}\right]$$

$$-\phi\left[\frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\ln\left[\frac{P_c+(j-n_c)d_2-\left(\frac{S(t+\Delta t)}{2}\right)-\left(\frac{d_1}{2}\right)}{X}\right]-\frac{\mu^*\sqrt{\Delta t}}{\sigma}\right]$$

위의 식(5)는 주가수준에 따라 최소 호가단위가 변화하지 않을 경우 ($d_1=d_2$), 최종연(1994)의 식 (3-a) 및 (5)와 같게 되며, 이와 아울러 매도 매수 호가 차이를 고려하지 않을 경우 (만약 $S(t)=S(t+\Delta t)=0$), Gottlieb & Kalay(1985)의 식 (3b)와 같게 된다.

위의 식을 간편하게 사용하기 위하여 아래의 축약식에서는 Gottlieb & Kalay의 부록A 에서 증명된 바 있는 "t가 무한대로 갈 때 밀도함수 h(x)는 P_0 값의 값에 관계없이 균등분포에 근접한다"는 정리를 이용하였다. 이때 밀도함수 h(·)값은 d_i^{-1}이 되고 이는 rm hat P (t)의 값에 따라 $1/d_1$, $1/d_2$ 또는 $2/(d_1+d_2)$의 값을 갖게 된다. 또한 무작위 시점 t에서의 거래유형이 매도(또는 매수)일 조건부확률을 0.5라고 가정하고, $(t+\Delta t)$에서의 거래유형이 t시점에서의 거래유형과 같을 확률을 거래유형에 관계없이 ρ라고 가정하면 위의 (5-a)식은 다음과 같이 표현된다.

$$I_{j,i}=\frac{0.5}{d(\hat{P}(t))}\left[\int_{\hat{P}(t)-\frac{S(t)}{2}-k_1}^{\hat{P}(t)-\frac{S(t)}{2}+k_2}\rho\phi_1(jd_i)+(1-\rho)\phi_2(jd_i)dx\right.$$
$$\left.+\int_{\hat{P}(t)+\frac{S(t)}{2}-k_1}^{\hat{P}(t)+\frac{S(t)}{2}+k_2}(1-\rho)\phi_2(jd_i)+\rho\phi_2(jd_i)dx\right] \qquad i=1,2,3 \tag{5-b}$$

또한 모멘트를 추정하는 단위기간이 거래빈도에 비하여 충분히 긴 경우에는 같은 유형의 거래가 연속될 확률 ρ를 0.5로 가정할 수 있게 되며, 이때 (5-b)식과 (5)식은 다음의 (5-c) 및 식(6)과 같이 표현될 수 있다.

$$I_{j,i}=\frac{0.25}{d(\hat{P}(t))}\left[\int_{\hat{P}(t)-\frac{S(t)}{2}-k_1}^{\hat{P}(t)-\frac{S(t)}{2}+k_2}(\phi_1(jd_i)+\phi_2(jd_i))dx\right.$$
$$\left.+\int_{\hat{P}(t)+\frac{S(t)}{2}-k_1}^{\hat{P}(t)+\frac{S(t)}{2}+k_2}(\phi_1(jd_i)+\phi_2(jd_i))dx\right] \tag{5-c}$$

$$E[[\hat{P}(t+\Delta t)-\hat{P}(t)]^L]=\sum_{j=-j_c}^{n_c-1}(jd_1)^L I_{j,1}+(n_c d_1)^L I_{j,2}+\sum_{j=n_c+1}^{\infty}[n_c d_1+(j-n_c)d_2]^L I_{j,3}$$

$$=\frac{0.25}{d(\hat{P}(t))}\left[\sum_{j=-j_c}^{n_c-1}(jd_1)^L\left[\int_{\hat{P}(t)-\frac{S(t)}{2}-k_1}^{\hat{P}(t)-\frac{S(t)}{2}+k_2}(\phi_1(jd_1)+\phi_2(jd_1))dx\right.\right.$$
$$\left.+\int_{\hat{P}(t)+\frac{S(t)}{2}-k_1}^{\hat{P}(t)+\frac{S(t)}{2}+k_2}(\phi_1(jd_1)+\phi_2(jd_1))dx\right]+(n_c d_1)^L\left[\int_{\hat{P}(t)-\frac{S(t)}{2}-k_1}^{\hat{P}(t)-\frac{S(t)}{2}+k_2}(\phi_1(jd_2)+\phi_2(jd_2))dx\right.$$

$$+\int_{\hat{P}(t)+\frac{S(t)}{2}-k_1}^{\hat{P}(t)+\frac{S(t)}{2}+k_2}(\phi_1(jd_2)+\phi_2(jd_2))dx\Bigg]+\sum_{j=n_c+1}^{\infty}[n_c d_1+(j-n_c)d_2]^L$$

$$\left[\int_{\hat{P}(t)-\frac{S(t)}{2}-k_1}^{\hat{P}(t)-\frac{S(t)}{2}+k_2}(\phi_1(jd_3)+\phi_2(jd_3))dx+\int_{\hat{P}(t)+\frac{S(t)}{2}-k_1}^{\hat{P}(t)+\frac{S(t)}{2}+k_2}(\phi_1(jd_3)+\phi_2(jd_3))dx\right]\Bigg] \quad (6)$$

본 연구에서는 여러 통계적 모멘트 중에서도 옵션가격의 결정에 민감한 영향을 미치는 주식수익률의 분산값의 추정오차에 초점을 맞추고 있으며, 증권의 매도매수 호가 차이는 Stoll(1978), Glosten &Milgrom(1985) 등이 주장한 바와 같이 딜러의 재고비용 및 정보상의 비교우위를 갖는 투자자들로부터 기대되는 손해를 일반투자자들로부터 보상받는 형태를 취하게 되어 주식수익률의 분산값과 양의 상관관계를 갖게 되므로 이를 모형속에 고려함으로써 분산추정치의 편의를 분석하는 것이 필요하게 된다. Stoll(1978)의 주장에 의하면 퍼센티지 매도매수호가차이는 다음과 같이 결정된다.

$$\theta=a+b\sigma^2 \quad (7)$$

여기서, θ=퍼센티지 매도매수호가차이=$\ln(P_{ask}/P_{bid})$

$a=2C+2M/|Q|$, C=역선택으로 인한 비용, M=주문비용

Q=해당거래의 '진정한' 가치, $b=Z|Q|/W_0>0$

W_0=딜러의 최초 시점의 부

Z=딜러의 상대적 위험 회피도

한국의 주식시장에서는 딜러가 존재하지 않음으로 위와 같은 관계식을 직접적으로 적용하기에는 많은 문제가있으나, 지정가 주문(limit order)등으로 인하여 한국 주식시장에서도 장하성(1995)등에서 밝힌 바와 같이 유사한 현상이 발견되고 있다. 본문에서 S(t)는 가격으로 본 매도매수 호가 차이이므로 아래의 식(8)과 같이 추정되었다.

$$S(t)=\hat{P}(t)\,(a+b\sigma^2)$$
$$S(t+\Delta t)=\hat{P}(t+\Delta t)(a+b\sigma^2) \quad (8)$$

Ⅱ. 표준편차 추정치의 편의

본장에서는 증권가격의 불연속성과 매도매수호가의 차이로 인한 표준편차 추정치 편의의 크기를 미국의 경우와 비교 분석하기 위하여 식(6)에 수치를 대입하여 진정한 표준편차와의 크기를 비교하였다. 가격수준에는 \$10에서 \$55까지의 가격이 대입되었고 진정한 표준편차에는 0.005에서 0.041까지의 값이 대입되었다. 특히 호가단위가 바뀌는 주가 10,000원 부근의 추정치 편의의 행태를 보다 심도있게 관찰하기 위하여 주가 수준이 9500원에서 10,500원사이인 경우에는 100원간격으로 분석하였다.

호가단위는 10,000원 미만에서는 10원단위로, 10,000원이상에서는 100원단위로 설정하였으며, 균형가격은 $\mu=0$인 로그정규확산과정을 따르는 것으로, 같은 유형의 거래가 연속될 조건부 확률(ρ)은 0.5로 가정하였다. 임의의 t시점에서 $\hat{P}(t)$로 거래된 균형가격 P(t)의 밀도함수는 식(4)에 의거하여 정의구역안에서는 균등분포를 갖는 것으로 가정되어 $\hat{P}_t$값에 따라 1/10, 2/(10+100), 1/100의 값이 사용되었고, Δt에는 단위시간 1이 대입되었다.

매도 매수 호가의 차이 S(t)와 S(t+Δt)값은 Stoll(1978)의 모형을 따라 앞의 식(8)과 같이 가정하여 추정되었으며, 이때 회귀계수값은 1/8 달러 규제가 존재하는 미국시장과의 비교를 위하여 최종연(1994)의 연구에서와 같이 Choi & Shastri(1989)에서 추정된 계수 a=0.0027, b=7.25가 사용되었다.[2)]

다음의 <표 1>은 임의로 선정된 진정한 표준편차값들과 식(6)에 의거하여 계산된 추정표준편차와의 비율을 진정한 표준편차 및 가격수준 별로 비교하였다. 괄호안의 수치는 최종연(1994)에서와 같이 1/8 달러 단위의 호가 규제가 있는 시장에서의 편의를 나타내고 있다. (780원/달러로 가정)

다음의 <표 1>의 결과는 예상된 바와 같이 국내시장에서의 매도매수호가 및 가격의 불연속성으로 인한 표준편차 추정치의 편의가 주가수준이 \$10에서는 미국시장의 경우보다 작고 \$15이상에서는 미국의 경우보다 크며 그 상대적 차이는 표준편차가 작을때 더욱 뚜렷한 것으로 나타났다. 또한 "추정표준편차/진정한 표준편차"로 표현된 상대적 편의는 가격의 불연속성만을 고려한 Gottlieb and Kalay에서의 결과와는 달리 표준편차가 증가함에 따라 일정한 표준편차값 이상에서는 증가하는 것으로 나타났다. 이는 표준편차가 아주 작

2) Choi & Shastri(1989)에서의 실증분석은 CBOE에서 옵션이 거래되는 주식을 대상으로 한 것이므로 일반적인 주식시장에서의 계수와 다를 수 있으며, 또한 Stoll의 모형에 의하면 계수 a와 b값은 증권의 유형 및 달러의 성향에 따라 달라질 수 있다. 그러나 본 논문에서는 추정오차의 존재와 그 형태 및 정정방법에 연구에 초점이 있으므로, 회귀계수 a, b는 임의의 합리적인 수치를 대용하여도 무방하다고 생각된다.
또한 여타의 합리적인 수치를 사용할 경우에도 본 논문이 제시하는 결론에는 변함이 없다. 여기서 퍼센티지 매도매수호가의 차이는 $\sigma=0.005$일 때 0.29%로 최소이며, $\sigma=0.041$일 때 1.49%로 최대이다.

〈표 1〉 거래가격을 이용한 표준편차 대 진정한 표준편차의 비율($\hat{\sigma}_{d,s}/\sigma$)

σ \ 가격	7800	11700	15600	19500	23400	27300	31200	35100	39000	42900
0.005	1.084	1.286	1.200	1.158	1.135	1.120	1.111	1.105	1.100	1.096
	(1.481)	(1.276)	(1.194)	(1.155)	(1.132)	(1.119)	(1.110)	(1.103)	(1.099)	(1.096)
0.009	1.034	1.103	1.073	1.059	1.051	1.046	1.043	1.041	1.039	1.038
	(1.178)	(1.100)	(1.071)	(1.057)	(1.050)	(1.045)	(1.043)	(1.041)	(1.039)	(1.038)
0.013	1.023	1.057	1.042	1.035	1.031	1.029	1.028	1.026	1.026	1.025
	(1.095)	(1.056)	(1.041)	(1.035)	(1.031)	(1.029)	(1.027)	(1.026)	(1.026)	(1.025)
0.017	1.020	1.040	1.031	1.027	1.025	1.024	1.023	1.022	1.022	1.021
	(1.063)	(1.039)	(1.031)	(1.027)	(1.025)	(1.023)	(1.023)	(1.022)	(1.022)	(1.021)
0.021	1.020	1.033	1.027	1.025	1.023	1.022	1.022	1.021	1.021	1.021
	(1.048)	(1.032)	(1.027)	(1.024)	(1.023)	(1.022)	(1.021)	(1.021)	(1.021)	(1.020)
0.025	1.021	1.030	1.026	1.024	1.023	1.023	1.022	1.022	1.022	1.022
	(1.041)	(1.030)	(1.026)	(1.024)	(1.023)	(1.023)	(1.022)	(1.022)	(1.022)	(1.022)
0.029	1.023	1.030	1.027	1.026	1.025	1.024	1.024	1.024	1.024	1.024
	(1.038)	(1.030)	(1.027)	(1.025)	(1.025)	(1.024)	(1.024)	(1.024)	(1.024)	(1.024)
0.033	1.026	1.031	1.029	1.028	1.027	1.027	1.027	1.026	1.026	1.026
	(1.037)	(1.031)	(1.029)	(1.028)	(1.027)	(1.027)	(1.027)	(1.026)	(1.026)	(1.026)
0.037	1.029	1.033	1.032	1.031	1.030	1.030	1.030	1.030	1.030	1.029
	(1.038)	(1.033)	(1.031)	(1.031)	(1.030)	(1.030)	(1.030)	(1.030)	(1.030)	(1.029)
0.041	1.033	1.037	1.035	1.034	1.034	1.034	1.034	1.033	1.033	1.033
	(1.041)	(1.036)	(1.035)	(1.034)	(1.034)	(1.034)	(1.034)	(1.033)	(1.033)	(1.033)

은 값에서는 가격의 불연속성으로 인한 추정치의 상대적 편의가 크나, 일정한 수준이상의 표준편차에서는 3장에 설명된 바와 같이 표준편차가 증가하면 매도매수호가차이가 크게 되고 그 결과 이로 인한 추정치의 상대적 편의 또한 증가하기 때문이다. 그러나 위의 <표 1>에 나타난 결과는 한 미 양국간에 퍼센티지 매도매수호가차이는 없는 것으로 가정하였고 달러당 원화 환율이 780원인 경우로 한정하였기 때문에 위의 결과가 한국시장에서의 추정표준편차의 편의의 크기를 보이는 것으로 해석하는 것은 무리가 있다. 본 연구의 주요 관심은 최소 호가단위가 변하게 되는 주가 수준에서의 표준편차 추정치의 편의가 어떠한 행태를 보이는지와 이를 보정할 수 있는 축약식의 유효성 검증에 있으므로 다음의 <표 2>에서는 t시점에서 관찰된 주가가 9,500원에서 10,500원사이인 경우의 표준편차 추정치의 편의를 수록하였다.

〈표 2〉 호가단위가 변하는 9500원~10500원사이의 거래가격을 이용한 표준편차 대 진정한 표준편차의 비율($\hat{\sigma}_{d,s}/\sigma$)

가격 / σ	9500	9600	9700	9800	9900	10000	10100	10200	10300	10400	10500
0.005	1.083	1.083	1.083	1.083	1.068	1.308	1.365	1.344	1.340	1.335	1.331
0.009	1.034	1.034	1.034	1.031	1.028	1.107	1.131	1.128	1.123	1.121	1.120
0.013	1.023	1.023	1.022	1.020	1.023	1.060	1.069	1.071	1.069	1.067	1.066
0.017	1.020	1.020	1.018	1.018	1.021	1.042	1.046	1.048	1.048	1.047	1.045
0.021	1.020	1.019	1.019	1.019	1.021	1.035	1.036	1.038	1.038	1.038	1.037
0.025	1.020	1.020	1.020	1.021	1.022	1.033	1.032	1.033	1.034	1.034	1.033
0.029	1.023	1.022	1.023	1.023	1.024	1.032	1.031	1.032	1.033	1.033	1.032
0.033	1.025	1.025	1.026	1.026	1.027	1.033	1.032	1.033	1.033	1.033	1.033
0.037	1.029	1.029	1.029	1.030	1.030	1.036	1.034	1.034	1.035	1.035	1.035
0.041	1.032	1.033	1.033	1.033	1.034	1.039	1.037	1.037	1.037	1.038	1.038

위의 표 2에 나타난 바와 같이 표준편차 추정치의 상대적 편의는 최소호가단위가 증가하는 10.000원에서 급격히 증가하여 10,000원이상에서 가장 커, 그 최대치는 36%(σ=0.005, $\hat{P}_t$=10,100원)에 이르는 것으로 나타났다.

<표 1>에서와 같이 추정치의 상대적 편의는 표준편차값이 작을 때 가격의 불연속성으로 인한 오차로 가장 큰 값을 보이다가 표준편차값이 증가함에 따라 그 상대적 오차가 감소하는 반면 스프레드의 영향으로 인한 추정치 편의가 증가하여 일정한 표준편차값이상에서는 다시 증가하는 것으로 나타났다.

Ⅲ. 표준편차 추정치의 편의 수정

앞에 1장에서 도출된 식(6)은 증권가격의 불연속성과 매도매수 호가차이로 인한 영향을 고려치 않고 통계적 모멘트를 계산할 때 야기되는 추정치의 편의에 대하여 설명하였다. 그러나 식(6)을 실용적으로 적용하여 편의를 수정하기에는 복잡한 계산식이 요구되고, <표 1>이나 <표 2>를 이용하여 오차를 수정하고자 할 때는 가격대나 표준편차값이 표에 나타난 수치와 다를 수 있을 뿐 아니라 매도 매수 호가의 차이가 앞에서 가정한 Stoll(1978)의 식이나 Choi & Shastri(1989)의 수치와 상이한 경우가 많을 것이다. 따라서 본 장에서는 앞에서 도출된 관계식을 실용적으로 보완하여 표준편차 값을 수정하는 축약식을 제시하고

<표 1>과 <표 2>에서 나타난 추정치를 수정하여 진정한 표준편차 값과 비교함으로써 축약식을 이용한 수정방법의 유효성에 대하여 검증하였다.

균형가격 P_t가 (2)식을 만족하고 그 분포가 균등분포라고 가정할 때, 가격의 불연속성으로 인한 추정치의 편의와 매도매수호가차이로 인한 편의는 상호독립적이 되며 그 결과 식(9)로부터 아래의 식(10)과 식(10)′이 성립된다.

즉, $$\hat{\sigma}_{d,s}^2=\hat{\sigma}^2+(\hat{\sigma}_d^2-\sigma^2)+(\hat{\sigma}_s^2-\sigma^2)=\hat{\sigma}_d^2+\hat{\sigma}_s^2-\sigma^2 \tag{9}$$

여기서, $\hat{\sigma}_{d,s}^2$ = 가격의 불연속성과 매도매수호가의 차이로 인하여 과대추정된 분산값

$\hat{\sigma}_d^2$ = 매도매수호가의 차이가 0 일 때, 가격의 불연속성으로 인하여 과대추정된 분산값

$\hat{\sigma}_s^2$ = 거래되는 증권의 최소호가 단위(d)가 0 일 때, 매도매수호가의 차이로 인하여 과대추정된 분산값

$$\hat{\sigma}_{d,s}^2=\sigma^2+(\beta_d^2+\beta_s^2-1) \tag{10}$$

여기서, $\beta_d=\dfrac{\hat{\sigma}_d}{\sigma}$, $\beta_s=\dfrac{\hat{\sigma}_s}{\sigma}$

$$\sigma=\left[\frac{\hat{\sigma}_{d,s}}{(\beta_d^2+\beta_s^2-1)}\right]^{0.5} \tag{10}$$

따라서 거래가격을 사용하여 계산된 표준편차 ($\hat{\sigma}_{d,s}$)로부터 진정한 표준편차 (σ) 값의 추정치를 구하기 위하여는 β_d와 β_s값을 추정하여야 한다. 그러나 이때 주의할 점은 진정한 표준편차 값 (σ)을 모르는 상태[3]에서 β_d와 β_s값을 구하여야 한다는 점이다. βd 에 대하여 Ball(1988)은 미국시장의 경우 음의 간편식으로 적은 오차범위내에서 $\hat{\sigma}_d$를 구할 수 있음을 보였다.

$$\hat{\sigma}_d^2 = 2d\sigma/(\sqrt{2\pi}P) \qquad \text{when } d/\sigma P > 2.50$$

$$\hat{\sigma}_d^2+\sigma^2\ \frac{d_2}{6P^2} \qquad \text{when } d/\sigma P \leq 2.50 \tag{11}$$[4]

3) Ball(1988)의 축약식은 진정한 표준편차값(σ)을 알 때 가격의 불연속성으로 인하여 추정된 $\hat{\sigma}_d$이 얼마나 과대추정되는 가를 나타내고 있다.

식 (11)로부터 β_d를 $\hat{\sigma}_d$와 P의 함수로 나타내면 아래의 식 (12)와 같다.

$$\beta_d = \frac{\hat{\sigma}_d}{\sigma} = \frac{2d\sigma}{\sqrt{2\pi}\hat{\sigma}_d P} \qquad \text{when } d / \sigma P > 2.50$$

$$\beta_d = \frac{\hat{\sigma}_d}{\sigma} = \frac{\hat{\sigma} d}{\sqrt{\hat{\sigma}_d^2 - (d^2/6P^2)}} \qquad \text{when } d / \sigma P \leq 2.50 \tag{12}$$

그러나 한국 시장과 같이 주가 수준에 따라 호가단위가 변하는 시장에서는 식(11)은 다음과 같이 변형될 수 있다.

$$\hat{\sigma}_d^2 = 2d^* \sigma / (\sqrt{2\pi}\hat{P}) \qquad \text{when } d^* / \sigma\hat{P} > 2.50$$

$$\hat{\sigma}_d^2 = \sigma^2 + \frac{d_2}{\sigma P^2} \qquad \text{when } d^* / \sigma\hat{P} \leq 2.50 \tag{13}$$

여기서, $d^* = (\alpha d_1^2 + (1-\alpha) d_2^2)^{0.5}$ 이고

$$\alpha = \phi\left(\frac{(P_c - P^*_t)}{\hat{\sigma}\hat{P}_t} \right) \tag{13a}$$

$\phi(\cdot)$는 표준누적 정규분포의 값

P_c : 호가단위가 변화하는 주가수준 (예 : 10,000원)

$$P^*_t = \begin{cases} \hat{P}_t = P_c \text{ 일 경우, } \hat{P}(t) + (d_2 - d_1) / 4 \\ \hat{P}_t = P_c \text{ 일 경우, } \hat{P}(t) \end{cases}$$

$\hat{\sigma} \neq$ 거래가격을 이용한 계산된 수익률의 표준편차[5]

또한 매도매수호가차이로 인한 상대적 편의 β_s값은 아래의 (14)식과 같이 추정될 수 있다.

$$\beta_s = \frac{\hat{\sigma}_s}{\sigma} = \frac{\hat{\sigma}_s(1+\theta^2)^{0.5}}{\{\hat{\sigma}_s - (1-\rho)\theta\}^{0.5}} \tag{14}$$

---

4) Ball(1988)의 간편식에서 $E[K^2] = \frac{2d\sigma}{\sqrt{2\pi}}$ 는 본 연구에서의 표현으로 변환할 경우 $\hat{\sigma}_d \cdot P^2 = \frac{2d\sigma P}{\sqrt{2\pi}}$ 로 되어 식 (11)과 같이 된다.

5) 여기서 $\hat{\sigma}$값은 σ값을 관찰할 수 없음으로 인하여 대용변수로 사용되었습. 따라서 식(16-1), (16-2)의 보정식을 이용하여, $\hat{\sigma}^*$값을 구한 후 이를 대입하면 보다 정확한 σ값을 구할 수 있게 되며, 이때 $\hat{\sigma}^*$값은 iteration 2회이하에서 수렴하게 된다.

여기서 $\theta = S_t/P_t$ 퍼센티지 매도매수호가이고, $\hat{\sigma}_s$와 ρ는 앞에서의 정의와 같다.

증명 : 부록 2

부록 2에 설명된 식(14)의 증명에서 나타난 바와 같이, 매도매수호가의 차이로 인한 표준편차의 편의는 연속되는 거래시점의 거래유형이 다름으로 인하여 야기되는 부분과 매도매수호가의 크기가 거래가격이 변함에 따라 변동함으로 인하여 발생하는 추정치의 편의로 구성된다. 또한 매도매수호가차이로 인한 상대적 편의를 나타내는 식 (14)를 진정한 표준편차의 함수로 표현하면 아래의 식(15)과 같이 표현된다.

$$\beta_s^2 = \frac{\hat{\sigma}_s^2}{\sigma^2} = 1 + \frac{(1-\rho)\theta^2}{\sigma^2} + \theta^2$$

$$= 1 + \frac{(1-\rho)(a+b\sigma^2)^2}{\sigma^2} + (a+b\sigma^2)^2 \qquad (15)$$

위의 식(15)를 진정한 표준편차(σ)로 미분하면, 그 미분값이 일정한 표준편차 이하(예 : $\rho=0.5$, $a=7.25$, $b=0.0027$일때 $a=0.019$이하)에서는 음의 값을 갖고 그 이상에서는 양의 값을 갖게 됨을 알 수 있다. 이는 <표 1>에서 보는 바와 같이 Gottlieb & Kalay(1985)의 결과와는 달리 표준편차의 상대적 편의는 일정수준의 표준편차값 이상에서는 오히려 증가하는 것을 나타내고 있다.

앞의 식(13) 및 식(14)의 증명 ④식을 종합하면, 가격의 불연속성 및 매도매수호가차이로 인한 표준편차의 편의를 간략히 수정한 분산의 추정치는 다음의 식(15)로 표현된다.

$$\hat{\sigma}_{ds}^2 = \sigma^2 + (\hat{\sigma}_d^2 - \sigma^2) + (\hat{\sigma}_s^2 - \sigma^2) \text{이므로,}$$

(i) $d^* / \sigma\hat{P} \leq 2.50$ 일 때,

$$\hat{\sigma}_{ds}^2 = \sigma^2 + d^{*2}/(6P^2) + (1-\rho)\theta^2 + \theta^2\sigma^2$$

$$\text{따라서} \quad \sigma^2 = \frac{\hat{\sigma}_{d.s}^2 - (1-\rho)\theta^2 - d^{*2}/(6P^2)}{(1+\theta^2)}$$

$$\text{또는 } \beta_{d.s} = \frac{\hat{\sigma}_{d.s}}{\sigma} = \sqrt{\frac{6(1+\theta^2)P^2\hat{\sigma}_{d.s}^2}{6P^2\hat{\sigma}_{d.s}^2 - 6P^2(1-\rho)\theta^2 - d^2}} \qquad (16\text{-}1)$$

5) 여기서 $\hat{\sigma}$값은 σ값을 관찰할 수 없음으로 인하여 대용변수로 사용되었슴. 따라서 식(16-1), (16-2)의 보정식을 이용하여, $\hat{\sigma}^*$값을 구한 후 이를 대입하면 보다 정확한 σ값을 구할 수 있게 되며, 이때 $\hat{\sigma}^*$값은 iteration 2회이하에서 수렴하게 된다.

〈표 3〉 축약식에 의거하여 계산된 표준편차

σ \ 가격	9500	9600	9700	9800	9900	10000	10100	10200	10300	10400	10500
0.005	0.0050	0.0050	0.0050	0.0050	0.0049	0.0052	0.0052	0.0050	0.0050	0.0050	0.0050
	(1.000)	(1.000)	(1.000)	(1.0000)	(1.023)	(0.956)	(0.971)	(1.000)	(1.000)	(1.000)	(1.000)
0.009	0.0090	0.0090	0.0090	0.0090	0.0088	0.0091	0.0092	0.0091	0.0090	0.0090	0.0090
	(1.000)	(1.000)	(1.000)	(1.005)	(1.020)	(0.985)	(0.981)	(0.994)	(0.999)	(1.000)	(1.000)
0.013	0.0130	0.0130	0.0130	0.0129	0.0129	0.0131	0.0131	0.0131	0.0130	0.0130	0.0130
	(1.000)	(1.000)	(1.002)	(1.006)	(1.011)	(0.992)	(0.989)	(0.994)	(0.998)	(0.999)	(1.000)
0.017	0.0170	0.0170	0.0170	0.0169	0.0169	0.0171	0.0171	0.0171	0.0171	0.0170	0.0170
	(1.000)	(1.001)	(1.003)	(1.005)	(1.007)	(0.995)	(0.993)	(0.995)	(0.997)	(0.999)	(1.000)
0.021	0.0210	0.0210	0.0209	0.0209	0.0209	0.0211	0.0211	0.0211	0.0211	0.0210	0.0210
	(1.001)	(1.001)	(1.003)	(1.004)	(1.005)	(0.997)	(0.995)	(0.996)	(0.997)	(0.998)	(0.999)
0.025	0.0250	0.0250	0.0249	0.0249	0.0249	0.0251	0.0251	0.0251	0.0251	0.0250	0.0250
	(1.001)	(1.001)	(1.002)	(1.003)	(1.003)	(0.997)	(0.997)	(0.997)	(0.998)	(0.998)	(0.999)
0.029	0.0290	0.0290	0.0290	0.0289	0.0289	0.0291	0.0291	0.0291	0.0291	0.0290	0.0290
	(1.001)	(1.001)	(1.002)	(1.002)	(1.002)	(0.998)	(0.997)	(0.998)	(0.998)	(0.998)	(0.999)
0.033	0.0330	0.0330	0.0330	0.0330	0.0329	0.0331	0.0331	0.0331	0.0331	0.0331	0.0330
	(1.001)	(1.001)	(1.001)	(1.001)	(1.002)	(0.998)	(0.998)	(0.998)	(0.998)	(0.998)	(0.999)
0.037	0.0370	0.0370	0.0370	0.0370	0.0370	0.0371	0.0371	0.0371	0.0371	0.0371	0.0370
	(1.001)	(1.001)	(1.001)	(1.001)	(1.01)	(0.998)	(0.998)	(0.998)	(0.998)	(0.998)	(0.999)
0.041	0.0410	0.0410	0.0410	0.0410	0.410	0.0411	0.0411	0.0411	0.0411	0.0411	0.0411
	(1.000)	(1.000)	(1.001)	(1.001)	(1.001)	(0.999)	(0.998)	(0.998)	(0.998)	(0.999)	(0.99)

주 : ( )안의 수치는 진정한 표준편차와의 상대적 편의($\hat{\sigma}/\sigma$)를 나타낸다.
$\hat{\sigma}$'는 축약식(15)를 이용하여 교정한 표준편차

(ii) $d^* / \sigma\hat{P} > 2.50$ 일 때,

$$\hat{\sigma}^2_{d,s} = 2d^{*2}\sigma/(\sqrt{2\pi}P) + (1-\rho)\theta^2 + \theta^2\sigma^2$$

$$\fallingdotseq 2d^{*2}\sigma/(\sqrt{2\pi}P) + (1-\rho)\theta^2 \qquad (\because \theta^2\sigma^2 \fallingdotseq 0)$$

따라서 $\sigma = \dfrac{\sqrt{2\pi}P}{2d}[\hat{\sigma}^2 - (1-\rho)\theta^2]$

또는 $\beta_{d,s} = \dfrac{2d\hat{\sigma}}{[\hat{\sigma}^2_{d,s} - (1-\rho)\theta^2]\sqrt{2\pi}\,P}$ (16-2)

위의 <표 3>은 위의 축약식 (16-1)과 (16-2)에 의거하여 계산된 표준편차의 상대적 편의

와 식 (3)에 따라 계산되어 <표 1> 에 수록된 편의를 비교하고 있다.

다음의 <표 3>에 나타난 바와 같이 축약식(15)는 복잡한 계산식을 요구하는 식(3)의 대안으로서 표준편차의 상대적 편의의 근사치를 제공하고 있음을 보인다. 상대적 편의($\hat{\sigma}/\sigma$)는 주가가 10,000원미만에서는 1보다 약간 크고 10,000이상에서는 1보다 약간 작은 값을 나타내고 있는데 이는 수익률분포가 호가단위안에서 비대칭적이라는 점을 축약식이 고려하지 못하는데 기인한 것으로 판단된다. 상대적 편의의 차이가 가장 큰 경우(P=10,000, σ=0.005)에도 그 차이는 0.0002(4.4%)에 불과하며 대부분의 경우에 그 차이는 무시할 정도인 것으로 나타나 보정식(16-1),(16-2)가 스프레드 및 가격의 불연속성으로 인한 표준편차 추정치의 편의를 수정하는데 유효하게 쓰일 수 있는 것으로 나타났다. 다음의 표에 나타난 보정식을 이용한 수정결과는 최소 호가단위가 변화하는 시장에서 적용되었다는 점, 매도매수호가차이[6]로 인한 추정치의 편의도 수정하였다는 점, 진정한 표준편차를 모르고 있다는 가정하에서 추출되었다는 점에서 Ball(1988)에 수록된 수정결과와 구별된다.

Ⅳ. 요약 및 연구의 한계점

본 연구는 한국 주식시장에서 증권가격의 불연속성과 매도매수 호가의 차이로 인하여 발생할 수 있는 통계추정치의 편의에 관하여 수익률의 표준편차값을 중심으로 분석하였다. 미국등의 경우와는 달리 최소호가단위가 가격수준에 따라 변화하는 한국 주식 시장에서의 진정한 통계적 모멘트와 추정치와의 관계식을 도출하였고 간략한 수정방법을 제시하였다. 그러나 본 연구에서는 퍼센티지 매도매수호가가 일정한 경우에 한하여 Stoll(1978)의 단순모형식과 미국시장에서의 회귀분석결과를 본문의 표에 실린 수치를 이용하여 적용하여 국내시장여건에 맞추어 시뮬레이션한 결과를 제시한 것이므로 표준편차의 추정치를 수정하는 것은 오류의 가능성이 높다. 이러한 목적을 위해서는 한국 주식시장에서의 매도매수호가의 차이에 관한 결정모형 또는 통계치가 수반되어야 할 것이며, 추후의 연구에서는 가격의 불연속성을 고려한 매도 및 매수호가의 전략적 설정 등을 고려한 보다 정교한 모형을 이용한 분석이 이루어져야 할 것이다.

6) 거래가격을 이용하여 매도매수호가차이를 추정하는 방법에 관하여 Roll(1984), Choi, etc. (1988) 등을 참조하기 바람

<부록 1>

증명 : $\Pr(\hat{P}(t+\Delta t)-\hat{P}(t)=jd \mid P(t)=x)$

$$=\Pr(ask,t)\Pr(ask,t+\Delta t)\Pr[\hat{P}(t+\Delta t)-\hat{P}(t)=jd \mid ask,ask] \qquad \text{(i)}$$

$$+\Pr(ask,t)\Pr(bid,t+\Delta t)\Pr[\hat{P}(t+\Delta t)-\hat{P}(t)=jd \mid ask,bid] \qquad \text{(ii)}$$

$$+\Pr(bid,t)\Pr(ask,t+\Delta t)\Pr[\hat{P}(t+\Delta t)-\hat{P}(t)=jd \mid bid,ask] \qquad \text{(iii)}$$

$$+\Pr(bid,t)\Pr(bid,t+\Delta t)\Pr[\hat{P}(t+\Delta t)-\hat{P}(t)=jd \mid bid,bid] \qquad \text{(iv)}$$

(i)의 값의 도출

if $[\hat{P}(t+\Delta t)=nd+jd \mid P(t)=X \ \text{transaction at } t+\Delta t=ask]$

$$P(t+\Delta t)+\frac{S(t+\Delta t)}{2}\in\left((n+j)-\frac{d}{2},\ (n+j)d-\frac{d}{2}\right)$$

$$P(t+\Delta t)\in\left((n+j)d-\left(\frac{S(t+\Delta t)}{2}\right)-\frac{d}{2},\ (n+j)d-\left(\frac{S(t+\Delta t)}{2}\right)+\frac{d}{2}\right)$$

$$\Pr[P(t+\Delta t)=Xe^{\sigma b(\Delta t)+\mu^*\Delta t}\in\left((n+j)d-\left(\frac{S(t+\Delta t)}{2}\right)-\frac{d}{2},\ (n+j)d-\left(\frac{S(t+\Delta t)}{2}\right)-\frac{d}{2}\right)]$$

$$=\Pr\left[\frac{b(\Delta t)}{\sqrt{\Delta t}}\in\left[\left[\frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\times\ln\left[\frac{(n+j)d-\left(\frac{S(t+\Delta t))}{2}\right)+\left(\frac{d}{2}\right)}{X}\right]-\frac{\mu^*\sqrt{\Delta t}}{\sigma}\right],\right.\right.$$

$$\left.\left.\left[\frac{1}{\sigma\sqrt{\Delta t}}\times\ln\left[\frac{(n+j)d-\left(\frac{S(t+\Delta t))}{2}\right)+\left(\frac{d}{2}\right)}{X}\right]-\frac{\mu^*\sqrt{\Delta t}}{\sigma}\right]\right]\right]$$

$$=\Phi\left[\frac{1}{\sigma\sqrt{\Delta t}}\times\ln\left[\frac{(n+j)d-\left(\frac{S(t+\Delta t))}{2}\right)+\left(\frac{d}{2}\right)}{X}\right]-\frac{\mu^*\sqrt{\Delta t}}{\sigma}\right]$$

$$-\Phi\left[\frac{1}{\sigma\sqrt{\Delta t}}\times\ln\left[\frac{(n+j)d-\left(\frac{S(t+\Delta t))}{2}\right)+\left(\frac{d}{2}\right)}{X}\right]-\frac{\mu^*\sqrt{\Delta t}}{\sigma}\right]$$

왜냐하면, $\frac{b(\Delta t)}{\sqrt{\Delta t}}\sim b(1)$

또한 $[\hat{P}(t)=nd \mid \text{transaction at } t=ask]$이면,

$$P(t)+(\frac{S(t)}{2})\in[nd-(\frac{1}{2})d,\ nd+(\frac{1}{2})d]$$이고

$$P(t)\in[nd-(\frac{S(t)}{2})-(\frac{1}{2})d,\ nd-(\frac{S(t)}{2})+(\frac{1}{2})d]$$를 만족하게 된다.

이와 같은 조건을 만족하는 $P(t)=X$의 밀도함수를 $h(x)$라고 하면, t와 $t+\Delta t$ 시점의 거래 유형이 매도일 때, 거래가격의 차이가 jd일 확률 ($I_{j,ask,ask}$)은 다음과 같다.

$$I_{j,ask,ask}$$

$$=\int_{nd-(\frac{S(t)}{2})-(\frac{d}{2})}^{nd-(\frac{S(t)}{2})+(\frac{d}{2})} h(n,t,p_0,x,s(t)) \left\{\Phi\left[\frac{1}{\sigma\sqrt{\Delta t}}\times\ln\left[\frac{(n+j)d-\left(\frac{S(t+\Delta t))}{2}\right)+\left(\frac{d}{2}\right)}{X}\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.-\frac{\mu^*\sqrt{\Delta t}}{\sigma}\right]-\Phi\left[\frac{1}{\sigma\sqrt{\Delta t}}\times\ln\left[\frac{(n+j)d-\left(\frac{S(t+\Delta t))}{2}\right)-\left(\frac{d}{2}\right)}{X}\right]-\frac{\mu^*\sqrt{\Delta t}}{\sigma}\right]\right\}dx$$

동일한 방법으로 $I_{j,ask,bid}$(ii), $I_{j,bid,bid}$(iii), $I_{j,bid,ask}$(iv)를 계산하여 $P(t+\Delta t)-P(t)=jd$일 확률 I_j을 식 3b에서와 같이 구할 수 있다. (증명 끝)

<부록 2>

증명 : $E(\hat{P}_{s,t+1}-\hat{P}_{s,t})^2$

$$=E[(P_{t+1}+\delta_{t+1}S_{t+1}/2)-(P_t+\delta S_t/2)]^2$$
$$=E[(P_{t+1}-P_t)+(\delta_{t+1}S_{t+1}/2-\delta_t S_t/2)]^2$$
$$=E[(P_{t+1}-P_t)]^2+E(\delta_{t+1}S_{t+1}/2-\delta_t S_t/2)]^2$$
$$+2E[(P_{t+1}-P_t)(\delta_{t+1}S_{t+1}/2-\delta_t S_t/2)]$$

P_t가 Random Walk를 따르고 거래 유형 δ가 P_t와 독립적일 때,
공분산 $E[(P_{t+1}-P_t)(\delta_{t+1}S_{t+1}/2-\delta_t S_t/2)]$의 값은 0이므로

$$=E[(P_{t+1}-P_t)]^2+E[(\delta_{t+1}S_{t+1}/2-\delta_t S_t/2)]^2$$
$$=\sigma^2P_t^2+0.25E[(\delta_{t+1}S_{t+1}/2-\delta_t S_t/2)]^2 \qquad ①$$

여기서 임의의 시점 t에서의 $P(\delta_t=+1)=P(\delta_t=-1)=0.25$이므로,

$$0.25E[(\delta_{t+1}S_{t+1}/2-\delta_t S_t/2)]^2$$
$$=0.25E\begin{bmatrix}\rho/2(S_{t+1}-S_t)^2+(1-\rho)/2(S_{t+1}+S_t)^2 \\ +(1-\rho)/2(-S_{t+1}+S_t)^2+\rho/2(-S_{t+1}+S_t)^2]\end{bmatrix}$$
$$=0.25[\rho E(S_{t+1}-S_t)^2+(1-\rho)E(S_{t+1}+S_t)^2]$$

매도매수호가차이의 변화 $(S_{t+1}-S_t)$를 γ_t라고 정의하면,

$$=0.25[\rho E(\gamma_t)^2+(1-\rho)E(2S_t+\gamma_t)^2]$$
$$=(1-\rho)E(S_t)^2+0.25E(\gamma_t)^2+(1-\rho)E(S_t\gamma_t)$$

여기서 $E(S_t\gamma_t)=0$이므로

$$=(1-\rho)E(S_t)^2+0.25E(\gamma_t)^2 \qquad ②$$

퍼센티지 매도매수호가차이가 가격수준에 상관없이 일정하다고 가정할 때

$$\theta=S_t\,/\,P_t=S_{t+1}\,/\,P_{t+1}\,,$$
$$E(\gamma_t)^2=E[(P_{t+1}-P_t)\,\theta]^2=\theta^2E[(P_{t+1}-P_t)]^2=\theta^2\sigma^2P_t^2 \qquad ③$$

①, ②와 ③식을 P_t^2으로 나누어 정리하면,

$$\hat{\sigma}_d^2 \fallingdotseq \sigma^2+(1-\rho)\theta^2+\theta^2\sigma^2$$

④식으로부터 β_s를 $\hat{\sigma}$과 $\boldsymbol{\theta}$의 함수로 표현하면,

$$\beta_s=\frac{\hat{\sigma}^2_{d,s}}{\sigma}\fallingdotseq\frac{\hat{\sigma}_s(1+\theta^2)^{0.5}}{\{\hat{\sigma}_2-(1-\rho)\theta^2\}^{0.5}}$$

참 고 문 헌

장하성, 옥진호, 1995, 한국증권시장에서의 스프레드에 관한 연구: 결정요인과 하루중 형태에 관한 연구, 한국재무학회 발표 논문집

최종연, 1994, 증권가격의 불연속성과 매도매수가격의 차이로 인한 통계추정치의 편의에 관한 연구, 산업경영연구, 153-168

Ball, Clifford, 1988, Security price estimation bias induced by discrete observations, *Journal of Finance* 43, 841-866.

Cho, D. and R.Free, 1988, Estimating the volatility of of discrete stock price, *Journal of Finance* 43, 451-466.

Choi, J.Y., K. Shastri, 1987, Bid-Ask spreads and volatility estimates, *Journal of Banking and Finance* 13, 207-219.

Choi, J.Y., D.Salandro and K. Shastri, 1987, On the estimation of vid-ask spreads: Theory and evidence, *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 23, 219-230.

Gottlieb, Gary and Avner Kalay, 1985, Implications of the discreteness of observed stock prices, *Journal of Finance* 40, 135-153.

Kendall, M and A. Stuart, 1977. The advanced theory of statistics, volume 1. London: Griffin and Company.

Roll, R., 1977, A simple measure for the implicit bid-ask spread inan efficient market, *Journal of Finance* 39, Sept., 1127-1139.

Stoll, H., 1978, The supply of dealer services in securities markers, *Journal of Finance* 33, Sept., 1133-1151.