財務管理硏究 第十二卷 第一號(1995.6), 1-17

쪽거리와 장기기억

李 逸 均*

〈요 약〉

경제에 미친 충격이 경제에 일시적 영향을 미치고 사라지며 그 영향력이 곧 소멸하고 마는 경우와 영구히 존속하는 경우가 있을 수 있다. 경제에 불현듯 다가와 영향력을 행사한 충격이 일시적으로 존재하고 사라지느냐 아니면 영원히 또는 장기적으로 존재하느냐 하는 것은 경제 현상을 시계열적으로 파악하고 이해하는 데 중요한 요소이다. 충격이 경제 내에 장기기억으로 존재한다면 경제 현상은 경제가 시작되는 순간부터 현재까지의 충격들의 결합적 집합이라 할 수 있을 것이다.

이 논문에서는 적분확률과정의 모수 d가 정수를 갖지 않고 비정수를 갖을 때의 ARIMA(p, d, g)process, 즉 ARFIMA(p, d, q)process의 비정수차분 모수 d를 추정하고자 한다. 그리고 이 비정수차분모수의 추정과 검정을 통하여 우리나라의 주가가 충격을 받았을 때 이 충격을 금시 해소시키고 버리는지, 또는 장기적으로 기억하여 항상 주가에 반영시키고 있는지의 여부를 검증하였다. 이 논문에서는 periodogram 방법과 lag window 방법을 다같이 사용하여 차분모수 d를 추정하고 표준오차를 계산하여 d의 추정치에 대한 기각여부를 검정한 우리나라의 주식시장은 충격에 대한 장기기억을 보유하고 있다는 것을 발견하였다. 이와 같은 발견은 충격적이다.

Ⅰ. 서 론

국민경제나 세계경제에 충격(shock)이 가해질 때, 이 충격이 경제에 일시적 영향을 미치고 사라지며 그 영향력이 곧 소멸하고 마는 경우가 있다. 이때 경제는 이 충격에 대하여 단기적(일시적) 영향을 받지만 곧 그 충격 자체를 잊는다. 경제에 해로운 충격이 일시적으로 경제에 반영되고 곧 해소시키면 바람직하다. 그러나 경제에 이로운 충격은 경제가 오래도록 기억한다면 경제 발전에 유익할 것이다. 경제에 불현듯 다가와 영향력을 행사한 충격이 일시적으로 존재

* 韓國財務管理學會 會長 · 明知大學校 經營學科 敎授
** 이 논문은 1994년도 한국재무관리학회 춘계학술대회에서 학회회장 권두논문으로 발표된 것으로 수정보완된 논문임

하고 사라지느냐 아니면 영원히 또는 장기적으로 존재하느냐 하는 것은 경제 현상을 시계열적으로 파악하고 이해하는 데 중요한 요소이다. 충격이 경제 내에 장기기억으로 존재한다면 경제 현상은 경제가 시작되는 순간부터 현재까지의 충격들의 결합적 집합이라 할 수 있을 것이다.[1)]

自己回歸 · 移動平均模型(autogressive moving average model; ARMA)에서 定常性(stationarity)를 선정할 경우에 自己相關函數(autocorrelation function)가 시차가 증가함에 지수적으로 감소한다. 따라서 시간간격이 긴 관찰치들 간에는 독립성을 가정할 수 있겠다. 그러나 실제로 관찰된 시계열자료는 정상성의 가정을 만족시키는 경우에도 시간간격이 긴 관찰치들(distant observations)간에 의존성이 존재하며 이 의존도가 작아도 결코 무시할 수 없는 영향을 갖고 있다. 이와 같은 지속성은(persistence)은 Hurst(1951)가 수력에 관한 연구에서 발견해내 Hurst현상이라 하는데, Mandelbrot와 Wallis(1969)가 본격적으로 연구한 바 있다. 이 지속성의 현상은 시계열 자료에서 큰 값이 발생한 후에는 부호가 동일한 큰 값이 따라나오는 현상을 의미한다. 이러한 양태는 경기 변동의 현상과 유사한데 長期週期(long cycle)는 총 표본의 크기와 어느정도 비례성을 갖는다. Mandelbrot (1969, 1972)는 경제시계열 데이타에 대한 시계열적 의존성의 구조를 연구하여 장기 지속성(long-term persistence)은 離散時間(fraction Gaussian noise)를 갖는다고 주장하였다.

시계열 데이타를 모형화 할 때 자기회귀모형과 이동평균모형이 전가의 보도로 사용되며 이 양자의 결합에 의하여 시계열 데이타의 성질이 다양하게 설명되고 있다. 單位根過程(unit process)는 時差因子(back-shift operator)를 B라 하면 $(1-B)y_t=\delta+\Psi(B)\epsilon_t$로 표시되는데 이 process는 次數 1의 積分過程(integrated process of order 1)이다. 그리고 일발적인 차수 d의 적분과정은 $(1-B)^d y_t=\Psi(B)\epsilon_t$이며, 이 경우 $\sum_{j=0}^{\infty} | \Psi_j < | < \infty$ 이어야 한다. Granger와 Joyeux (1980)와 Hosking (1981)은 d의 값이 일반적으로 상징하고 있는 바와 같이 정수가 아니고 非整數(noninteger; fractional)이어도 모형이 성립되며 비정수가 오히려 유용할 경우도 많다는 것을 입증하고 비정수위 경우에 얻게 되는 모형의 성질을 다각도의 측면에서 도출하였다. ARMA를 정수로 적분한 ARIMA (p,d,q)도 시계열데이타를 모형화 하는데 유리할 뿐만 아니라 d를 비정수 즉 fractional로 적분한 ARIMA도 유용하다.

적분차수 d가 비정수인 ARIMA(p,d,q) process를 장기기억 모형(long memory model)이라고 한다. 적분차수가 비정수일 때에는 정수의 경우와는 다른 성질을 갖는데, Hosking(1981)은 $|d| < 1/2$이면 시계열 y_t가 정상성(stationarity)과 可逆性(invertibility)을 갖으며, 자기상관함수는 시차가 증가함에 따라 영(zero)를 향하여 단조적으로 그리고 쌍곡선적으로(monotonically and

1) 충격들의 결합은 충격들의 합, 충격들의 적(product), 또는 이 양자의 선형적이나 비선형적 결합 등 다양한 양태로 표시될 수 있을 것이며, 이 양태에 관한 연구는 본 논문의 주제가 아니다.

hyperbolically) 감소함을 밝히고 있다.[2] 그리고 자기상관함수 ρ_k의 합은 무한하므로 $0<d<1/2$일 때 ARIMA(0, d, 0) process가 장기기억을 갖게 되어 장기지속성을 모형화하는데 유용하며, $-1/2<d<0$일 때 자기상관과 편상관은 모두 음수가 되고, 자기상관의 합이 무한대가 되어도 그와 같은 음의 상관들이 장기 지속성을 용인하지 않음을 보여주고 있다.

母數 d가 간격이 긴 관찰자들(distant observation)에 미치는 영향이 시차가 증가함에 따라 쌍곡선적으로 감소한다. 반면에 AR과 MA의 모두의 영향은 지수적으로 감소한다. 따라서 d는 시계열의 높은 시차(high lag) 상관구조를 기술할 수 있도록 선정되어야 하며, p와 q는 낮은 시차(low lag) 상관구조를 기술하도록 이루어져야 한다.

자본시장에 장기기억이 존재하느냐의 여부는 재무경제학에서 매우 중요한 과제이다. 최적 소비 · 투자 결정이나 포트폴리오 결정은 주식의 수익률이 장기적 의존성을 갖으면 투자기간(investment horizon)에 극도로 민감하다. 연속시간 재무 모형에서 일반적으로 사용되고 있는 연속시간 확률과정(stochastic process) 은 장기기억을 전제로 하고 있지 않으므로 마탕게일 방법에 의하여 그 성질을 도출하고 있는 파생상품의 경우에도 장기기억이 존재하면 현재 개발된 모형이나 성질에 문제점들이 존재하게 된다. Mandelbrot(1971)는 주식수익에 지속적인 통계적 의존형이 존재할 수 있는 가능성을 제기하고 이것이 주식 평가에 미치는 함의를 고찰한 바 있다. Greene과 Fieltz(1977)는 뉴욕 증권 거래소에 상징된 주식 가운데 많은 주식의 일별수익률들간에 장기적 의존성이 존재함을 발견하였다. 그러나 Lo(1991)는 Hurst(1951)가 제안한 範圍尺度再定統計量(rescaled range statistic)을 사용하여 미국의 일별주가지수와 월별주가지수에 대하여 장기기억의 존재여부를 분석하였는 바, 이 지수들간의 장기적 의존성의 증거를 발견해내지 못하였다.

장기기억 여부를 인지하기 위해 장기기억 모수인 d를 추정해야 하는데 추정방법은 여러가지가 있다. Granger과 Joyeux(1980)는 d를 grid search에 의하여 추정하는 방법을 제시하였다. Hosking(1981)은 d를 최대우도법에 의하여 추정하는 방법을 제시하였고 Sowell(1992)은 이 방법을 정치화시카고 있다. Hosking(1981)은 範圍尺度再定統計量에 의하여 추정할 것도 아울러 제시하고 있으며 Mandelbrot와 Taqqu(1979)가 이 분석법에 대하여 survey 를 한 바 있다. Lo(1991)는 이 방법을 정치화시켜 주식수익률에 대하여 적용한 바 있다. Geweke와 Porter-Hudak(1983)은 시계열의 periodogram의 로그(logarithm)를 회귀방정식으로 정립하여 d를 추정하는 방법을 제시하고 미국의 월별 경제시계열을 사용하여 예측의 신뢰성을 분석한 바 신뢰도가 높다는 점을 보여주었다. Diebold와 Rudebusch(1989)는 이 방기변동의 파동의 지속성을 분석하였다. Reisen(1994)과 Chen(1994)은 periodogram방법을 보완하기 위해 lag window를 peri-

2) 즉 자기상관함수가 ARMA(d=c) process의 지수덕 감소보다 무척 느리게 0으로 수렴한다.

odogram에 부가하여 추정의 정확성을 높이려 하고 있다.

본 논문은 lag window와 periodogram을 사용한 회귀방정식을 통하여 fractional ARIMA(p,d,q)의 적분차수 모수 d를 우리나라의 증권시장에 적용하여 추정하는 데 목적이 있다. 비정수 차수 d를 추정하여 $|d|<1/2$인지의 여부를 판별함으로써 주식수익률이 장기기억 process를 따르고 있는지를 인식할 수 있다.

이 논문의 구성은 다음과 같다. 제2장에서는 integrated process를 중심으로 한 fractional ARIMA모형인 ARFIMA(p,d.q) (AR fractionally integrated MA)를 이론적으로 분석한다. 제3장에서는 이 시계열 모형의 추정방법을 제시한다. 제4장에서는 우리나라의 종합주가지수를 이용하여 모수 d를 추정하고 우리나라의 종합주가지수가 장기기억 pricess를 형성하고 있는지의 여부를 실증적으로 검증한다. 제5장에서는 결론을 제시한다.

II. 長期記憶과 實數差分

시계열 데이타가 비정상성(nonstationarity)을 형성하고 있을 때 정상성을 얻기 위해서는 차분(differencing)을 시행한다. 차분은 1번 할 수도 있다. 그러나 d번 차분이 필요한 경우가 일반적이다. 이 차분을 실행한 process가 적분(integrated) process이다. 時差因子(back－shift operation)를 B라 하면 $Bx_t=x_{t-1}$로 표현된다. 자기회귀와 이동평균을 결합시킬 때 적분 pricess를 적용시키면 ARIMA(p,d,g) process를 얻는다. 차분차수 d가 非陰整數(non－negative integer)일 때 ARIMA는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$(1-B)^d X_t = Y_t,\ \phi(B)Y_t = \theta(B)Z_t. \tag{1}$$

위에서 Z_t는 독립적이고 동등하게 분포된 확률변수(iid random variable)이며 평균이 0이고 분산이 σ^2이다. 식 (1)에서 $\phi(B)$는 $\phi(B)=1-\phi_1B-\cdots-B^p$이고, $\theta(B)=1-\theta_1B-\cdots-\theta_qB^q$로서 각각 정상적 자기회귀인자와 可逆的이동평균인자이다. 식 (1)은 원래의 시계열 X_t를 d번 차분하면 정상적 시계열을 생성시키는 효율적 방법을 얻게된다는 점을 보여주고 있다.

그런데 이 ARIMA process는 재무·금융시계열의 성질을 밝히는 데 이용되어 왔다. 그러나 李逸均(1994)이 지적하고 있는 바와 같이 재무·금융시계열 중에는 d번 차분을 한 경우 과도하게 차분된 결과를 야기시키고 동시에 (d－1)회 차분하면 과소하게 차분되는 양태를 생성시키는 시계열이 존재한다. 이 경우에는 d를 비음정수값으로 한정하게 되면 식 (1)이 정상적 시계열에서 발견되는 상관계수가 서서히 체감하는 시계열을 생성시킬 수 없는 경우에 과대, 과

소의 차분이 발생한다. 정상시계열에 대한 모형에서 잘 알려진 바와 같이 spectral density function이 frequency $\lambda=0$에서 유계이고 자기상관 함수는 지수적(기하학적)으로 감소한다. 이 현상은 안정적 ARMA 모형에서 성립한다. 그러나 Hurst (1951), Mandelbrot (1969, 1971), Mandelbrot와 Van Ness (1968), McLeod와 Hipel (1978), Granger와 Joyeux (1980), Porter－Hudak (1983) 등이 지적하고 있는 것처럼 시계열 중에서는 다른 양태를 보여주는 시계열도 많다. 이와 같은 방법에 의한 예측이 $\lambda=0$에서 非有界의 spectral density와 지수적으로 체감하지 않는 자기상관함수에 의한 예측보다 열등하다. 여기에서 비정수의 차분의 필요성이 대두된다. 비정수의 차분을 위에서 열거한 논문과 더불어 Reisen (1994), Hurvich와 Beltrao (1994) 등을 참고하여 아래에서 다루고자 한다.

장기기억은 간격이 긴 관찰치들(distant observations) 간의 의존성을 무시할 수 없는 시계열의 특성이며 이 성질을 갖는 시계열은 자기회귀함수가 절대치합산이 형성되지 않고 frequency가 0으로 접근해도 spectral density function이 無界(unbounded)가 되지 않는다. Hosking (1981)에 의하면 ARIMA (p.d.q) process는 $d\in(-0.5, 0.5)$일 때 정상적이며 가역적이고 $0<d<0.5$일 때 장기기억의 성질을 갖고 있음을 증명한 바 있다. 식 (1)에서 d의 값이 $(1-B)^d$를 이항전개를 사용하여 다음과 같이 정의할 때 비정수를 갖는다.

$$(1-B)-1=\sum_{j=0}^{\infty}\pi_j B^j \tag{2}$$

위에서 $\pi j=[-d(1-d)\ \dots\ (j-1-d)]/j!$이다. 이 경우 비정수 차분을 통하여 정상적 시계열을 얻을 수 있다. $\phi(B)$와 $\phi(B)$가 공통의 0을 갖지 않으며 단위원(unit circle)상에 0을 갖지 않을 때, 즉 $\phi(B)$와 $\theta(B)$가 단위원 외부에 모든 root를 갖고 공통의 root를 공유하지 않으면 Brockwell과 Davis (1987, 정리 13.2.2)이 증명한 바와 같이 다음을 만족시키는 정상적 · 가역적 시계열 X_t가 존재한다.

$$\phi(B)(1-B)^d X_t=\theta(B)Zt. \qquad d\in(-0.5, 0.5) \tag{3}$$

위에서 $d>-0.5$는 시계열의 가역성(invertibility)를 위하여, $d<0.5$는 정상성을 위하여 필요하다. 식 (3)을 만족시키는 시계열이 fractionally integrated ARMA, 즉 ARFIMA (p,d,q) process이다. $\phi(B)=\theta(B)=1$일 때 시계열 X_t를 fractionally differenced white noise (FDWN) process라 하며 이것을 $(1-B)X_t=Z_t$로 표현한다. ARFIMA (p,d,q)와 ARIMA (p,d,q)는 상관구조가 상당한 차이를 갖는다. ARFIMA process의 spectral density는 $f(w)=f_u(w)[2\sin rm(w/2)]^{-2d}$이다. 여기서 $f_u(w)$

는 ARIMA process $u_t=(1-B)^d X_t$의 spectral density이다. Brockwell과 Davis (1987, 정리 13.2.2)를 사용하면, $d\neq0$에 대하여

$$f(w)=\frac{\sigma^2}{2\pi}\frac{|\theta(e^{-iw})|^2}{|\phi(e^{-iw})|^2}[2\sin(\frac{w}{2})]^{-2d},\ w\in[-\pi,\pi]$$

위에서 $w\to0$함에 따라 $\lim[w^{-2d}f(w)]$는 존재하고 유한하다. $d\in(0, 0.5)$에 대하여 $f(w)$는 $w=0$에서 유계를 갖지 않는다. 이것은 정상적 ARIMA process의 spectral density가 $w=0$에서 유계인 점과 대조를 이룬다. σ_x를 자기상관함수라 하면

$$\rho_x \sim Kh^{2d-1} \quad \text{as} \quad h\to\infty \tag{5}$$

위에서 ρ_x는 정상적 ARIMA의 자기상관함수가 지수적으로 체감하는데 반하여 쌍곡선적으로 감소함을 보여주고 있다. 달리 표현하면 $A\to\infty$함에 따라 $\lim(K^{1-2d}\rho_x)$는 존재하고 유한하다.

식 (4)와 (5)에 의하여 ARFIMA process는 정해진 범위 내에서 d의 양의 값에 대하여 강기기억의 성질을 갖는다. 즉 spectral density가 frequency가 0이 되는 곳의 근방에서 無界이고 자기회귀함수는 절대치의 합을 형성하지 않는다. 식 (5)가 보여주는 바와 같이 서서히 감소하는 (slowly decaying) 자기상관을 장기의존성이라 하며, 따라서 장기기억을 의미한다.

III. 差分次數의 推定方法

앞장에서 분석한 ARIFIMA(p,d,q) process는 많은 성질을 보여주고 있어 재무 · 금융시계열에 대한 성질을 밝히는데 사용할 수 있다. 그런데 추정방밥이 용이하지 않다. Sowell(1992)는 최대우도법을 사용하여 모수 p,d,q를 동시에 추정하는 방법을 제시하고 있다. 그러나 Geweke와 Porter-Hudak (1983)은 모수 p와 q와는 독립적으로 차분 모수 d를 추정하는 방법을 제시하고 있다. 이 방법은 다음과 같다. 즉, 먼저 $w=0$인 근방의 frequency들에 대하여 표본 periodgram을 사용하여 spectral density를 추정한다. 다음에는, 위에서 추정한 spectral density의 값에 대수(logarithm)를 취한 값과 상수의 수열의 선형회귀식 분석을 통하여 d를 추정한다. 이와 같은 방법은 차수 p와 q에 대한 값이 d를 추정하는데 필요하지 않다.

일반적인 적분시계열 모형에서 모수 d를 추정하는 방법을 Geweke와 Porter-Hudak (1983)에 따라 살펴보자. $(1-B)^d X_t=Y_t$라 하자. 여기에서 Y_t는 spectral density function $f_Y(w)$를 갖는 정상적 선형 process이며, $f_Y(w)$는 유한하고 0 이외에서 유개이며 구간 $[-\pi,\pi]$에서 연속적인 함수이

다. 시계열 X_t의 spectral density function은 f(w)로서 $f(w)=(\sigma^2/2\pi)\{4\sin^2(w)\}^{-d}f_Y(w)$이다. f(w)는

$$\log f(w)=\log\{(\sigma^2 f_Y(0)/2\pi\}-d\log\{4\sin^2(w/2)\}+\log\{f_Y(w)/f_Y(0)\}. \quad (6)$$

시계열 X_t의 표본의 크기를 T라 하자. $w_{j,T}=2\pi j/T$ ($j=0, 1, \cdots, T-1$)을 harmonic ordinates라 하고, $I(w_{j,T})$를 이 ordinates에서의 periodogram이라 하자. $w_{j,T}$에서 식 (6)을 평가하고 정리하면,

$$\log I(w_{jT})=\log\{(\sigma^2 f_Y(0)/2\pi\}-d\log\{4\sin^2(w_{j,T}/2)\} +\log\{fY(_{w_{j,T}})/f_Y(0)\}+\log\{I(w_{j,T})/f(w_{j,T})\}. \quad (7)$$

위에서 $\log\{f_Y/f(0)\}$는 0에 접근하는 harmonic frequency들에 한정할 때 무시할 수 있는 값이 된다. 따라서 식 (7)은 선형회귀모형과 동일하게 볼 수 있다. 즉, $\log\{I(\cdot)\}$는 회귀식에서 종속변수에 해당되며, $\log\{4\sin^2(\cdot)\}$은 독립변수, 즉 설명변수에 해당된다. $\log\{I(\cdot)/f(\cdot)\}$은 교란항에 해당된다. 기울기 계수는 $-d$이고 절편항은 $\log\{\sigma 2f_Y(0)/2\pi\}$이다. 상수와 $\log\{4\sin^2(\cdot)\}$에 대한 $\log\{I(\cdot)\}$의 최초자승법에 의한 ~~가울~~기 계수가 추정식이 된다. 표본은 $j=1, 2, \cdots, g(T)$이다. g(T)는 $\lim_{T\to\infty} g(T)=\infty$이고, $\lim_{T\to\infty} g(T)/T=0$의 조건을 만족시켜야 한다. 이와 같은 조건을 만족하면 d의 추정치 $\hat{d}$는 접근적 정규성을 갖는다. 위의 논술을 아래와 같이 요약할 수 있다.

[定理 1] [Granger and Porter－Hudak(1983), Theorem 2]

시계열 X_t가 일반적 적분 선형 process이며, $d<0$이라 하자. $I(w_{j,T})$는 크기가 T인 표본에서 harmonic frequency $w_{j,T}=\pi j/T$의 X_t의 periodogram이다. $b_{1,T}$를 회귀방정식 $\log\{(I(w_{j,T})\}=\beta_0+\beta_1\log\{4\sin^2(w_{j,T}/2)\}+u_{j,T}$ ($j=1,2, \cdots, n$)에서 β_1 OLS추정식이라 하자. 그러면 함수 g(T) {g(T)는 $\lim_{T\to\infty} g(T)=\infty$, $\lim_{T\to\infty}(l\cancel{og\ T})^2/g(T)=\cancel{0의}$ 성질을 갖음}가 존재하며, n~=~g(T)이면 $\text{plim}\ b_1=-d$가 이루어진다. $\lim_{T\to\infty}(\log T)^2/g(T)=0$이면 $(b_1+d)/\{\text{var}(b_1)\}^{1/2}\to N(0, 1)$이다. 여기에서 $\text{var}(b_1)$은 b_1의 분산의 OLS추정치이다.

시계열 X_t의 관찰치 표본이 주어지면 periodogram은 다음에 의하여 구한다.

$$I(w)=\frac{1n}{2\pi=1}\{R(0)+2\sum_{s=1}^{-1}R(s)\cos(sw)\} \quad w\in[-\pi, \pi]. \quad (8)$$

위에서 R(S)는 표본자기공분산함수(autocovariance function)로서 다음과 같이 구한다.

$$R(s)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-s}(Xi-\overline{X})(X_{i+s}-\overline{X})\quad s=0,\pm 1\ \cdots,\pm(n-1). \tag{8}$$

위에서 $\overline{X}$는 표본평균이다.

위에서 제시한 periodogram을 이용하여 d를 추정하는데 periodogram은 spectral density의 점근적 unbiased estimator가 되고 있지만 inconsistency를 내포하고 있다. periodogram을 smooth하게 하면 spectral density의 추정식이 개선된다. 즉, 분산이 적어진다. periodogram을 smooth하는 데에는 lag window가 사용된다. 길이가 n이고 $f(Fw)=|1-e^{iw}|^{-2d}fy(w)$의하여 생성되는 시계열 X_t에 대하여 f(w)의 lag window 추정식은 다음의 일반적 형태를 갖는다.

$$f_s(w_j)=\frac{1}{2\pi}\sum_{s=-m}^{m}K(\frac{s}{m})R(s)\cos(sw_j) \tag{9}$$

위에서 K(C)는 lag window generator로서 $-1<C<1$ 범위 내에서 고정된 연속 even function이다. $K(0)=1$이고 $K(-C)=K(C)$이다. 모수 m은 fruncation point로 표본의 크기 n의 함수로의 $n\to\infty$함에 따라 $m\to\infty$이고 $n/m\leftrightarrow 0$이 되도록 선택해야 한다.

Lag window는 priestly(1982)이 광범위하게 그 성질을 파악하고 있는데 많이 사용되는 Lag window를 제시하면 〈표 1〉과 같다.

〈표 1〉 Lag window

Lag window	w(x)		$\alpha=\int_{-1}^{1} w^2(x)dx$
Bartlett	$1-\|x\|$	$(\|x\|\leq 1)$	2/3
Daniell	$\sin(\pi x)/\pi x$		0.90282336
Blackman－Tuchey	$1-2a+2a\cos(\pi x)$	$(\|x\|\leq 1)$	2(1－4a+6a2)
Parzen	$1-6x^2+6\|x\|^3$	$(\|x\|<0.5)$	0.53928571
	$2(1-\|x\|^3)$	$(0.5\leq\|x\|\leq 1)$	
Bartlett－priestly	$\frac{3}{\pi^2x^2}\{\frac{\sin\pi x}{\pi x}-\cos\pi x\}$		1.2

Priestly (1981)에 의하면 lag window estimator $f_s(w)$는 분포에서 $f_x(w)x^2_\nu/\nu$로 근사치화 할 수 있으며,

$$\nu=2n/m\alpha,\quad \alpha=\int_{-1}^{1} w^2(x)dx$$

그런데 C_j는 다음과 같은 성질을 갖는다.

$$E(C_j) \approx \psi(\nu/2) - \log(\nu/2).$$
$$\mathrm{var}(C_j) \approx \psi'(\nu/2).$$

위에서

$$\psi(x) = \frac{d.}{dx} \log\{\Gamma(x)\}.$$

$$\psi'(x) = \frac{d^2}{dx^2} \log\{\Gamma(x)\}.$$

위의 두 식은 각각 digamma 함수와 trigamma 함수이다.

Lag window를 사용하여 periodogram을 완만하게 조정한 경우에는 다음과 같이 차분 모수를 추정한다. 이 식은 식 (7)과 동일하나 좌변의 독립변수만 차이를 갖는다.

$$\log\{f_s(w_{j,T})\} = a + b\xi_{j,T} + u_{j,T} \tag{7'}$$

단,

$a = \log\{\sigma 2 f_Y(0)/2\pi\}$,

$b = \log\{4\sin^2(w_{j,T}/2)\}$

$u_{j,T} = \log\{f_Y(w_{j,T})/f_Y(0)\} + \log\{I(w_{j,T})/f(w_{j,T})\}$

위에서 정립한 모형인 식 (7)을 $\eta_j = a + b\xi_j + u_j (j=1,2, \cdots, n)$로 쓰자.여기에서 $\eta_j = \log$ `$\{I(w_{j,T})\}$, $a = \log\{\sigma^2 f_Y(\cdot)/2\pi\}$, $b = \log\{4\sin^2(w/2)\}$이고 u_j는 식 (7)의 마지막 2개항을 의미한다. 이 회귀식은 OLS를 사용하여 b를 추정할 수 있다. periodogram을 이용하여 η_j를 추정하여 종속변수로 사용할 때 d는 점근적 정규분포를 다음과 같이 형성한다.

$$\hat{d}_p \sim N \text{ left } \left[d, \frac{\pi^2/6}{\sum_{j=1}^{n} (\xi_j - \xi)^2} \right] \tag{10}$$

그리고 lag window를 이용하여 periodogram을 smooth하게 한 식 (9)를 사용하여 η_j를 추정하고, 이 추정치를 사용하여 식 (7)을 OLS를 사용, d를 추정할 경우 이 추정치는 점근적 정규분포를 다음과 같이 따른다.

$$\hat{d}_p \sim N \text{ left } \left[d, \frac{\psi'(\nu/2)}{\sum_{j=1}^{n}(\xi_j-\bar{\xi})^2} \right] \quad (11)$$

그런데 〈표 1〉>에서 보는 바와 같이 lag window를 사용하여 완만한 periodogram을 얻는데에는 큰 제약이 존재한다. 그것은 sin 함수나 cos 함수가 음수를 생성시킨다는 점이다. 음수가 발생하면 log의 값은 구할 수가 없다. 재무 · 금융 시계열 자료 중 수익률은 음수가 발생하므로 특히 sin 함수의 경우 음수가 발생하며, lag window를 사용할 수 없다는 것이 단점이다.

Chen, Abraham, Peiris (1994)는 lag window에의 한 d의 추정이 periodogram에 의한 추정보다 mean square error가 적다는 것을 simulation을 통하여 보여주고 있다. Reisen(1994)은 Parzen lag window를 사용하여 분석하였는데 역시 Chen 등과 유사한 결론을 제시하고 있다.

IV. 實證分析

주가가 장기기억 시계열데이타 생성함수에 의하여 생성되고 있는지의 여부를 분석하기 위하여 한국종합주가지수를 사용한다. 기간은 1980~1993 이다. 이 종합주가지수를 사용하여 종합주가의 일별수익률을 계산하였다. 그리고 일별수익률을 사용하여 주별수익률을 계산하였다.

주별 종합주가수익률을 사용하여 차분모수 d를 추정한 결과를 제시하면 〈표 2〉와 같다. 〈표 2〉에서 첫째열에 있는 nonsmooth는 periodogram에 의하며 식 (7)을 OLS로 추정한 d의 값이며, Bartlett는 Bartlett lag window를 사용하여 식 (7)`을 추정한 결과이다. 앞에서 논술한 바와 같이 g(T)는 이론적으로는 그 값을 분명하게 제시하고 있으나 실제로는 $\lim_{T\to\infty} g(T)=\infty$와 $\lim_{T\to\infty} (\log T)^2/g(T)=0$를 만족시키는 g(T)의 값을 구하기는 용이하지 않다. 이 문제점을 해소하기 위하여 이 두조건을 충족시킬수 있는 g(T) 의 값을 여러개 상정하여 d의 값을 추정 하였다. 〈표 2〉에서 제시된 바와 같이 표본수인 g(T)에 대하여 periodogram에서는 $g(T)=T^{\alpha}$에서 α를 0.5, 0.6, 0.7과 0.8로 각각 상정하여 g(T)를 계산하였다. 이경우 g(T)는 각각 26, 50, 97과 186이 된다. Bartlett lag window의 경우에는 truncation ponit인 $m=T^{\theta}$에서 θ를 0.5, 0.6, 0.7, 0.8 및 0.9로 놓고 m을 계산하여 모수 d의 추정에 이용하였다.

괄호안의 숫자는 첫째 괄호가 OLS에 의한 표준오차이고 둘째 괄호의 값은 식 (8)과 (11)에서 제시된 통계량에 의하여 계산된 표준오차이다.

〈표 2〉 주별수익률의 장기기억

$g(T)=T^{\alpha}$. $m=T^{\theta}$(truncation point)

	$\alpha=0.5$ (g(T)=26)	$\alpha=0.6$ (g(T)=50)	$\alpha=0.7$ (g(T)=97)	$\alpha=0.8$ (g(T)=186)
Nonsmooth	−0.1879 (0.1807) (0.1532)	−0.0851 (0.1152) (0.1033)	−0.0067 (0.0826) (0.0712)	−0.1029 (0.0560) (0.0510)
	$\theta=0.5$			
Bartlett	−0.0426 (0.0032) (0.0190)	−0.0509 (0.0024) (0.0128)	−0.0130 (0.0046) (0.0089)	−0.0947 (0.0080) (0.0063)
	$\theta=0.6$			
Bartlett	−0.0815 (0.0070) (0.0266)	−0.0745 (0.0077) (0.0179)	−0.0154 (0.0081) (0.0124)	−0.1037 (0.0098) (0.0088)
	$\theta=0.7$			
Bartlett	−0.0975 (0.0173) (0.0374)	−0.0843 (0.0162) (0.0252)	−0.0144 (0.0132) (0.0174)	−0.1064 (0.0122) (0.0125)
	$\theta=0.8$			
Bartlett	−0.1074 (0.0396) (0.0530)	−0.0884 (0.0295 (0.0357)	−0.0132 (0.0216) (0.0246)	−0.1041 (0.0163) (0.0176)

우리나라의 종합주가지수가 충격을 장기적으로 기억하고 있는지의 여부를 제시한 〈표 2〉는 periodogram을 사용한 경우 $\alpha=0.8$일 때를 제외하면 모두 기각이 된다. OLS에 의한 표준오차와 식 (10)에 의한 표준오차가 너무 크다. $\alpha=0.8$일 $d=-0.1029$로 유의수준 5%에서 기각에 실패하고 있다. $\alpha=0.8$ 이외에는 기각되는데 이것은 periodogram의 비완만성(nonsmoothenss)에 의하여 기인될 가능성을 배제할 수 없다. periodogram의 움직임을 완화함으로써 meun square error를 축소시키고 완만성을 성취하기 위하여 lag window 중 Bartlett lag window를 사용하여 추정하였다. 〈표 2〉에서 보는 바와 같이 $\alpha=0.7$인 경우를 제와하고는 유의수준 5%에서 기각에 실패하고 있다. 다만 Bartlett lag window에서 $\alpha=0.8$이고 $\theta=0.6$일 때는 기각된다.

우리나라의 증권시장에서 장기기억 내지는 지속성이 존재하는가의 여부를 검토하기 위하여는 ARFIMA (p,d,q)에서 d의 값을 추정하고 이 d의 값이 $d\in(-0.5, 0.5)$일 때 장기기억 process가 형성된다. 〈표 2〉에서 제시된 바와 같이 차분모수 d는 모두 음수이며 $d\in(-0.5, 0.5)$의 범위내의 값을 갖고 있다. $\alpha=0.6$일 때 periodogram에 의하거나 Bartlett lag window에 의하거나 모수

d의 값은 대략 −0.08 정도이다. α=0.7일 때 periodogram의 경우 d는 −0.0067이다. Bartlett lag window를 사용하여 추정한 d의 값은 −0.015 정도이다. α=0.5일 때 d는 α=0.5일 때 −0.04이며, θ가 0.6, 0.7 및 0.8일 때 d는 대략 −0.09의 값을 갖는다. α=0.8이면, periodogram에 의한 차분모수의 추정과 Bartlett lag window에 의한 추정이 모두 대략 −0.10이다. 대체적으로 α=0.5 및 α=0.8일 경우 차분모수 d는 −0.1의 값을 갖으며, α=0.6 및 α=0.8일 때 d는 −0.08의 값을 갖는다. 0.02의 차이가 발생하는데, 이 차이가 크지 않다고 인정한다면 d는 개략적으로 −0.1값을 취한다고 해석할 수 있다.

〈표 2〉에서 α=0.7일 경우 Bartlett lag window에 의한 차분모수에 대한 검정과 periodogram에 의한 차분모수의 검정이 그 값은 경제적 의미를 갖고 있으나 통계적으로 유의하지 못하고 있다. 그러나 periodogram에 의한 차분모수의 검정이 α=0.5 및 α=0.8에서 통계적으로 기각되지만 그 값은 유의성을 유지하고 있다. 그 이외의 경우는 차분모수에 대한 검정에서 통계적 유의성과 경제적 유의성을 다함께 갖추고 있다. 이와 같은 해석을 용인하면 우리나라의 증권시장은 장기기억 process를 형성하고 그에 따라 움직이고 행동(motion과 behavior)을 수행해 나간다고 볼 수 있을 것이다.

V. 결 론

이 논문은 integrated process의 모수 d가 정수를 갖지 않고 비정수를 갖을 때의 ARIMA (p,d,g) process, 즉 ARFIMA (p,d,q) process의 비정수차분 모수 d를 추정하였다. 그리고 이 비정수차분 모수의 추정과 검정을 통하여 우리나라의 주가가 충격을 받았을 때 이 충격을 금시 해소시키고 버리는지, 또는 장기적으로 기억하여 항상 주가에 반영시키고 있는지의 여부를 검증하였다. ARFIMA (p,d,g) process에서 모수 p, d와 q를 동시에 추정하는 방법이 존재하는데 대표적인 것이 최우법이며, 이 방법에 의하여 검증을 수행할 수 있다. 다른 방법으로서는 p와 q를 추정하지 않고도 d를 추정하는 기법이 있는데, 이것은 spectral density의 추정에 periodogram을 사용하고 이것을 이용하여 회귀분석법에 의하여 d를 추정하고 검정하는 방법이다. 이 방법에는 periodogram을 직접 사용하는 경우와 periodogram의 완만화를 기하기 위하여 lag window를 사용하여 회귀방정식의 종속변수를 추정함으로써 d의 값을 얻는다.

이 논문에서는 periodogram 방법과 lag window 방법을 다같이 사용하여 차분모수 d를 추정하고 표준오차를 계산하여 d의 추정치에 대한 기각여부를 검정하였다. ARFIMA (p,d,q)가 성립하기 위하여는 d≠0이 아니어야 한다. d가 0이면 일반적인 ARMA process로 수렴하기 때문이

다. d가 정수값을 갖는 경우 이 process는 ARIMA 모형으로 변환된다. d가 d $\in(-0.5, 0.5)$일 때 ARMA (p, d, q) process는 장기기억 process가 된다. $d<0.5$일 때 시계열은 정상성을 보유하고 $d>-0.5$일 때 시계열은 가역성을 갖는다. 자기상관이 천천히 감소하게 되어 시계열 간의 장기적 의존성이 존재하게 되고 따라서 장기기억을 갖는다. ARFIMA (p,d,q) process에서 자기상관함수는 $d\in(-0.5, 0.5)$에서 기하학적(지수적)으로 감소하지 않고 쌍곡선적으로 감소하므로 자기상관은 급속히 사라지는 것이 아니라 서서히 감속된다. 서서히 감소하면 의존성이 상존하게 되며, 이것이 시계열내에 장기기억으로 존재한다.

우리나라의 종합주가지수의 수익률을 사용하여 주별수익률을 얻은 후 periodogram에 의한 d의 추정치와 Bartlett lag window를 사용한 d의 추정치를 얻었다. 추정에 사용되는 "표본의 크기" α를 실제표본의 크기 T^{α}로 정의하였을 때 $\alpha=0.8$인 경우 장기기억의 존재를 기각하는데 실패하였다. 이것은 truncation point $m=T^{\theta}$에서 여러가지의 θ값에 대하여 기각하는데 실패하였다. 그런데 $\alpha=0.8$의 경우 θ의 값에 관계없이 d의 추정치들은 거의 동일하고 d의 표준오차는 동일하였다. d가 증가하여 0.8일 때 표본의 T의 정보를 보다 잘 반영하고 있다고 생각하면 우리나라의 주식시장은 충격에 대한 장기기억을 보유하고 있다고 해석할 수 있다. 이와 같은 발견은 충격적이다. 연속시간모형, 특히 파생상품에 대한 연속시간모형은 martingale process를 그 기본으로 삼고 정립되고 자본자산에 대한 여러가지의 성질을 밝혀왔다. 그리고 실증분석은 이와 같은 성질이 자본시장에서 유지되고 있음을 밝히고 있기 때문이다.

필자는, 장기기억에 대한 연구는 과문의 소이이겠거니와, Dielbold와 Rudebusch (1987)의 논문이 GNP 데이타와 경기변동의 주파에 대한 장기기억을 연구한 것 이외에는 모두 이론적 탐구를 시도한 논문들이다.[3] 따라서 장기기억에 대한 본격적인 연구가 요청되고 있다 하겠다. 이 논문은 시간 제약상 peridogram과 Bartlett lag window에 한정되었고 주별주식수익률에 한정되었다. lag로 표시된 주가나 주가수익률을 사용하면 여러 형태의 lag window의 사용이 가능하다. 또한 일별주식수익률도 사용하여 장기기억에 대한 검증도 가능할 것이다.

---

3) Lo(1991)가 장기기억을 본격적으로 다루고 있으나 알세서 본바와 같이 R/A 분석에 한정되어 있다. 李逸均 (1994)도 장기기억을 분석하고 있으나 chaos의 관점에서 분석을 시도하고 있다.

참 고 문 헌

이일균, 1994. "Chaos," 재무관리논총 1, 1－37.

_______, 1994. "시계열자료와 재무관리이론," 재무관리논총 1, 1－23.

Agiakloglou, C. and P. Newbold., 1993. "Lagrange Multiplier Tests for Fractional Difference," *Journal of Time Series Analysis* 15, 253－262.

Agiakloglou, C., P. Newbold and M. Wohar., 1991. "Bias in an Estimator of the Fractional Difference Parameter," *Journal of Time Series Analysis* 14, 235－246.

Ashley, R.A., D.M. Patterson. and M.J. Hinich. 1986. "A Diagnostic Test for Nonlinear Serial Dependence in Time Series Fitting Errors," *Journal of Time Series Analysis* 7, 165－177.

Avram, F. and M.S. Taqqu., 1992. "Weak Convergence of Sums of Moving Averages in the －Stable Domain of Attraction," *Annals of Probability* 20, 483－503.

Beran, J., 1992. "Statistical Methods for Data with Long Range Dependence," *Statistical Science* 7, 404－416.

Beran, J. and N. Terrin., 1992. "Estimation of the Long－Memory Parameter, Based on a Multivariate Central Limit Theorem," *Journal of Time Series Analysis* 15, 269－278.

Bernt, E.K., B.H. Hall, R.E. Hall and J.A. Hausman., 1974. "Estimation and | erence in Nonlinear Structural Models," *Annals of Economic and Social Measurement*, 653－665.

Brockwell, P.A. and R.A. Davis., 1987. *Time Series: Theory and Methods*. New York, Springer－Verlay.

Cao, C.Q. and R.S. Tsay. 1992. "Nonlinear Time－Series Analysis of Stock Volatilities," *Journal of Applied Econometrics* 7, 165－185.

Chen, G., B. Abraham. and S. Peiris. 1994. "Lag Window Estimation of the Degree of Differencing in Fractionally Integrated Time Series Models," *Journal of Time Series Analysis* 15, 473－487.

Cheung, Y.W., 1991. "Tests for Fractional Integration: A Monte Carlo Investigation," *Journal of Time Series Analysis* 14, 331－345.

Delgado, M.A. and P.M. Robinson., 1994. "New Methods for the Analysis of Long－memory Time－Series: Application to Spanish | lation," *Journal of Forecasting* 13, 97－107.

Diebold, F.X. and G.D. Rudebusch., 1989. "Long Memory and Persistence in Aggregate Output," *Journal of Monetary Economics* 24, 189－209.

Geweke, J. and S. Porter－Hudak., 1983. "The Estimation and Application of Long Memory Time Series Models," *Journal of Time Series Analysis* 4, 221－237.

Granger, C.W.G., 1980. "Long Memory Relationships and the Aggregation of Dynamic Models," *Journal of Econometrics* 14, 227−238.

Granger, C.W.J. and R. Joyeux., 1980. "An Introduction to Long−Memory Time Series Models and Fractional Differencing," *Journal of Time Series Analysis* 1, 15−29.

Granger, C.W.J. and J. Hallman., 1991. "Long Memory Series with Attractors," *Oxford Bulletin of Economics and Statistics* 53, 11−25.

Greene, M. and B. Fielitz., 1977. "Long−Term Dependence in Common Stock Returns," *Journal of Financial Economics* 4, 339−349.

Gregory, A. W. and M. J. Sampson., 1991. "Testing Long−Run Properties of Stationary Time Series," *Journal of Bussiness & Economic Statistics* 9, 287−295.

Hassler, U., 1993. "Regression of Spectral Estimators with Fractionally Integrated Time Series," *Journal of Time Series Analysis* 14, 369−380.

__________ 1994. "(Mis)Specification of Long Memory in Seasonal Time Series," *Journal of Time Series Analysis* 15, 19−30.

Hipel, L.W. and A.I. MeLeod., 1978. "Preservation of the Rescaled Adjusted Range 3 : Fractional Gaussian Noise Algorithms," *Water Resources Research* 14, 517−518.

Hosking, J.R.M., 1981. "Fractional Differencing," *Biometrika* 68, 165−175.

Hosking, J. R. M., 1984. "Modeling Persistence in Hydrological Time Series Using Fractional Differencing," *Water Resources Research* 20, 1898−1908.

Hurst, H.E., 1951. "Long−Term Storage Capacity Reservoirs," *Transportation American Social Civil Engineering* 116, 770−799.

Hurvich, C.M. and K.I. Beltrao., 1991. "Asymptotics for the Low−Frequency Ordinates of the Periodogram of a Long−Memory Time Series," *Journal of Time Series Analysis* 14, 455−472,

____________________ 1994. "Automatic Semiparametric Estimation of the Memory Parameter of a Long−Memory Time Series," *Journal of Time Series Analysis* 15, 285−302.

Kashyap, R.L. and K.B. Eom., 1988. "Estimation in Long−Memory Time Series Models," *Journal of Time Series Analysis* 9, 35−41.

Lo, A.W., 1991. "Long−Term Memory in Stock Market Prices," *Econometrica* 59, 1279−1313.

Lo, A. and C. MacKinley., 1988. "Stock Market Prices Do Not Follow Random Walks : Evidence from a Simple Specification Test," *Review of Financial Studies* 1, 41−66.

Mandelbrot, B.B., 1965. "Une Classe de Processus Stochastiques Homoth tiques soi ; Application la

Loi Climatologique de H. E. Hurst," *Comptes Rendus Academic Science Paris* 260, 3274–3277.

________________ 1967. "Some Noises with 1/f Spectrum, a Bridge Between Direct Current and White Noise," *I.E.E.E. Trans. Information Theory* 13, 289–298.

________________ 1971. "A Fast Fractional Gaussian Noise Generator," *Water Resources Research* 7, 543–553.

________________ 1971. "When Can Price Be Arbitraged Efficiently? A Limit to the Validity of the Random Walk and Martingale Models," *Review of Economics and Statistics* 53, 225–236.

________________ 1972. "Statistical Methodology for Non–Periodic Cycles : From the Covariance to R/S Analysis," *Annals of Economic and Social Measurement* 1, 259–290.

Mandelbrot, B. and M. Taqqu., 1979. "Robust R/S Analysis of Long–Run Serial Correlation," *Bulletin of the International Statistical Institute* 48, 59–104.

Mandelbrot, B.B. and J.W. Van Ness., 1968. "Fractional Brownian Motions, Fractional Noises and Applications," *SIAM Review* 10, 422–436.

Mandelbrot, B.B. and J.R. Wallis., 1969. "Some Long–Run Properties of Geophysical Records," *Water Resources Research* 5, 321–340.

________________________ 1969. "Computer Experiments with Fractional Gaussian Noises. Parts 1,2,3," *Water Resources Research* 5, 228–267.

________________________ 1969. "Robustness of the Rescaled Range R/S in the Measurement of Noncyclic Long–Run Statistical Dependence," *Water Resources Research* 5, 967–988.

McLeod, A.I. and K.W. Hipel., 1978. "Preservation of the Rescaled Adjusted Range, I. A Reassessment of the Hurst Phenomenon," *Water Resources Research* 14, 491–518.

Porter–Hudak, S., 1990. "An Application of the Seasonal Fractional Differenced Model to the Monetary Aggregates," *Journal of the American Statistical Association* 85, 338–343.

Priestley, M.B., 1981. *Spectral Analysis and Time Series* 1.

Reisen, V.A., 1994. "Estimation of the Fractional Difference Parameter in the ARIMA(p,d,q) Model Using the Smoothed Periodogram," *Journal of Time Series Analysis* 15, 335–350.

Said, S.E. and D.A., Dickey. 1985. "Hypothesis Testing in ARIMA[p,1,q] Models," *Journal of the American Statistical Association* 80, 369–374.

Samarov, A. and M.S. Taqqu., 1988. "On the Efficiency of the Sample Mean in Long–Memory Noise," *Journal of Time Series Analysis* 9, 191–200.

Schwert, G.W., 1989. "Why does Stock Market Volotility Change Over Time?," *The Journal of Finance* 154, 28−63.

Sowell, F.B., 1990. "The Fractional Unit Root Distribution," *Econometrica* 58, 495−505.

__________ 1992. "Maximum Likelihood Estimation of Stationary Univariate Fractionally Integrated Time Series Models," *Journal of Econometrics* 53, 165−188.

__________ 1992. "Modeling Long−Run Behavior with the Fractional ARIMA Model," *Journal of Monetary Economics* 29, 277−302.

Yajima, Y., 1985. "On Estimation of Long−Memory Time Series Models," *Australian Journal of Statistics* 27, 303−320.

__________ 1988. "On Estimation of a Regression Model with Long−Memory Stationary Errors," *The Annals of Statistics* 16, 791−807.

__________ 1989. "A Central Limit Theorem of Fourier Transforms of Strongly Dependent Stationary Processes," *Journal of Time Series Analysis* 10, 375−383.