

# 不規則 波浪 入·反射波 分解技法

吳 炳 哲

〈韓國海洋研究所 海洋工學研究部 前任研究員〉

## 1. 서론

심해에서 발생된 파랑은 수심과 흐름의 변화에 따라 천수, 굴절, 마찰소산, 쇄파 등의 변형을 거쳐서 해안선 또는 방파제, 호안 등의 인공구조물에 다다르게 된다. 이 때 파랑은 더 이상 앞으로 진행할 수 없게 되며 반사라는 물리현상을 통하여 외해로 되돌아가게 된다. 천수, 굴절, 마찰소산 등이 서서히 변화하는 파랑변형메카니즘인데 반하여 반사현상은 쇄파와 함께 급격한 변형 메카니즘이다. 그러므로 방파제 등 연안구조물 주변해역의 파랑장 특성을 정밀히 규명하기 위해서는 반드시 반사효과를 고려해야만 한다.

반사파는 입사파와 함께 정상파(clapotis)를 형성하여 극심한 주변해역의 교란을 수반하기 때문에 연안구조물 특히 반사율이 큰 방파제, 안벽, 외곽 방파제 등의 건설시에는 반

드시 반사파의 영향을 사전에 충분히 검토하여 설계에 반영하여야 한다. 파랑의 반사와 관련된 재해로는 항내의 선박파손, 구조물 주변 해역에서의 선박 통행 지장 및 작업일수 감소로 인한 항만 구조물의 운영효율 저하 등을 들 수 있다. 이러한 측면에서 생각할 때, 안벽 특히 방파제처럼 비교적 길이가 긴 인공 구조물 주변에서는 반사현상이 다른 파랑변형 요소 못지 않게 중요하다고 사료된다.

파랑의 반사현상은 반사계수에 의하여 특성 지워진다. 즉 반사계수는 입사파고에 대한 반사파고의 비( $r = H_r/H_i$ )로서 정의되어 1보다 작은 값을 가지며, 반사파의 방향은 기하광학의 반사법칙에 의하여 결정된다. 반사현상을 표현하는 수학적 기법은 이처럼 매우 단순하지만 실제로는 반사계수가 주파수와 입사파의 방향의 함수이기 때문에 반사계수는 모든 주파수와 방향별로 계산되지 않으면 안된다. 그러므

로 반사계수가 주파수와 방향의 함수로서 모델에 도입되어야만 연안 구조물 주변의 해상상태를 정밀하게 계산할 수 있다. 그러나 지금까지는 반사계수에 대한 정밀한 관측이나 계산을 수행하지 않고 단지 연안구조물과 해안의 형태에 따라서 경험적으로 일정한 값을 부여하여 수치모델과 실무에서 반사현상을 고려하였다.

실험실의 2차원 수조에서 반사계수를 계산하기 위한 연구가 1970년 이후 몇 차례 시도되었다. Goda and Suzuki(1976)는 모형구조물 전방에 두 개의 파고계를 설치하여 이로부터 독취된 동시파고기록 자료를 바탕으로 반사계수를 구하는 방법(2점법)을 제안하였다. 이 방법은 두 파고계 간의 거리에 따라 특이점(singular point)이 생길 수 있으므로 이를 피하려면 계획 주파수(target frequency)에 따라서 계기의 간격을 달리하여야 한다. Mansard and Funke(1980)는 세 개의 파고계로부터 얻은 동시관측자료에 최소자승법을 적용하여 반사계수를 구하는 방법(3점법)을 제안하였는데, 이 방법은 2점법과는 달리 특이점을 갖고 있지 않기 때문에 활용의 폭이 넓다. 2점법은 수조에서 발생하는 횡파, 비선형 상호간섭, 시그널 노이즈(signal noise), 측정오차 등에 민감한 반응을 보이고 있으나, 3점법은 이러한 현상에 덜 민감한 것으로 보고되고 있다. 이러한 방법은 2차원 실험수조에서 발생하는 규칙파와 불규칙파에 적용할 수 있다. 2차원 수조에서 관측된 파랑에는 일반적으로 조파기(wave generator)에 의한 파랑과 모형구조물, 소파기 등에 의해 반사된 파랑이 합성되어 있으므로 이러한 경우에 조파기에 의해 생성된 파랑을 관측자료로부터 추출하는 데 2점법과 3점법이 주로 활용되어 왔다. 다시 말해서 이러한 연구는 반사계수보다

는 조파기에 의해 발생하는 파랑성분을 추출하는 데 중점을 두고 있으므로 현장 또는 수치모델에 직접 응용하기에는 곤란하다고 사료된다.

Isobe *et al.*(1984)은 입사파와 반사파가 공존하는 파랑장의 방향스펙트럼을 계산할 수 있는 기본식을 유도하였다. 이 방정식에는 반사계수가 포함되어 있으므로 문제를 완성하기 위해서는 반사계수에 대한 추가적인 방정식 또는 제약조건식이 필요하다. Cross 스펙트럼 분석으로부터 주파수 성분이 분리되므로 반사계수는 매 주파수에 대하여 입사파 방향만의 함수로 표현될 수 있다. 이러한 연구는 Isobe *et al.*(1984)과 橋本 等(1987, 1993)에 의하여 수행되었다. Isobe *et al.*(1984)은 일방향파랑의 경우에 정확한 반사계수를 제공하는 식을 유도하였으며, 이는 다방향 불규칙파랑에 대해서도 근사해를 제시한다. 한편 橋本 等(1987, 1993)은 반사계수를 파향에 대하여 지수함수(exponential function)로 표현하고 Bayesian방법과 최대엔트로피법을 사용하여 반사계수를 계산하였다.

본 연구에서는 반사파의 추정의 근간이 되는 지배방정식을 적분식의 형태로 유도하고 수면면위 자료에만 적용할 수 있는 Isobe *et al.*(1984)의 수정최우법을 일반적인 파동량(예를 들면 파랑에 의한 동압, 수면구배, 수면가속도, 수립자의 속도 등)의 관측자료에 적용할 수 있도록 확장하고 수치모의실험을 통하여 본 방법의 방향분해능 및 반사계수 추정의 정확성을 검토하였다.

## 2. 입·반사파 공존장의 cross 스펙트럼과 방향스펙트럼과의 관계

입사파의 Fourier-Stieltjes 표현이 다음과 같이 주어지는 파동장을 생각한다.

$$\eta_i(\vec{x}, t) = \int_{\sigma} \int_{\vec{k}} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \sigma t)} Z(d\vec{k}, d\sigma) \quad (1)$$

여기서  $\eta_i(\vec{x}, t)$ 는 입사파의 수면범위,  $\vec{k}$ 는 파수벡터,  $\sigma$ 는 각주파수를 나타내며,  $Z(d\vec{k}, d\sigma)$ 는 복소진폭으로  $[\vec{k}, \vec{k}+d\vec{k}]$ 와  $[\sigma, \sigma+d\sigma]$  영역의 파랑 에너지와 관련된다. 따라서  $Z$ 의 절대값은  $[\vec{k}, \vec{k}+d\vec{k}]$ 와  $[\sigma, \sigma+d\sigma]$ 의 영역에 존재하는 성분파의 진폭이 되며,  $Z$ 의 편각은 random phase가 되므로

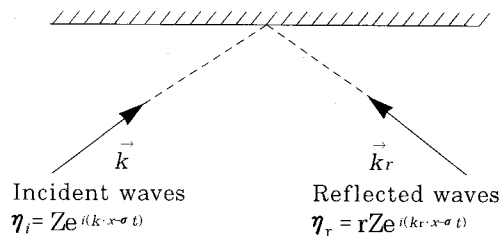
$$\langle Z(d\vec{k}, d\sigma) Z^*(d\vec{k}', d\sigma') \rangle = 0 \quad (\vec{k} \neq \vec{k}') \quad (2)$$

이다. 여기서  $\langle \cdot \rangle$ 는 앙상블 평균, \*는 공액복소수를 각각 의미한다. 한편,  $\vec{k} = \vec{k}'$ 인 경우에  $\langle Z(d\vec{k}, d\sigma) Z^*(d\vec{k}, d\sigma) \rangle$ 는 파랑에너지를 나타내므로

$$\langle Z(d\vec{k}, d\sigma) Z^*(d\vec{k}, d\sigma) \rangle = S(\vec{k}, \sigma) d\vec{k} d\sigma \quad (3)$$

이 성립한다. 여기서  $S(\vec{k}, \sigma)$ 는 입사파의 에너지 스펙트럼이다.

한편, 관심지점 부근에 안벽, 절벽, 방파제 등의 반사성 구조물이 있어서 반사파의 영향을 무시할 수 없는 경우, 입사성분과 반사성분은 선형으로 중첩하여 합성수면변위를 형성한다고 생각한다. <그림 1>에서 보는 바와 같



<그림 1> 입사파와 반사파의 정의

이 X축을 반사면으로 하면 반사파에 의한 수면변위는 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\eta_r(\vec{x}, t) = \int_{\sigma} \int_{\vec{k}_r} e^{i(\vec{k}_r \cdot \vec{x} - \sigma t)} Z(d\vec{k}_r, d\sigma) \quad (4)$$

여기서  $r$ 은 반사계수로서 파수와 주파수의 함수이며,  $\vec{k}_r$ 은 반사면에 대하여  $\vec{k}$ 와 대칭인 벡터이다. 또한 좌표 원점을 반사면에 놓으면 입사파와 반사파는 위상이 동일하므로 식(1)과 식(4)의 복소진폭항은 같다. 따라서 반사파의 파고는 반사계수  $r$ 에 의하여 변하지만 그 위상은 입사파와 동일하다. 즉, 입사파와 반사파는 위상이 서로 독립이 아니다(locked phase). 그러므로 모든 성분파의 위상이 서로 독립이라고 가정하고 전개된 기존의 방향스펙트럼 산정 이론은 반사파가 현저한 해역에 대해서는 적용할 수 없다. 이러한 경우에 locked phase의 영향을 고려하여 방향스펙트럼을 산정하는 기본방정식을 Isobe *et al.* (1984)이 처음으로 유도하였다.

$\vec{x}_i$ 을  $\vec{x}$ 와 반사면에 대하여 대칭인 vector라 하면  $\vec{k}_r \cdot \vec{x} = \vec{k} \cdot \vec{x}_i$ 이므로 식(4)는

$$\eta_r(\vec{x}, t) = \int_{\sigma} \int_{\vec{k}} r e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x}_i - \sigma t)} Z(d\vec{k}, d\sigma) \quad (5)$$

으로 쓸 수 있다. 식(1)과 식(5)로 부터 합성수면변위는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\eta(\vec{x}, t) = \eta_i(\vec{x}, t) + \eta_r(\vec{x}, t) = \int_{\sigma} \int_{\vec{k}} [e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \sigma t)} + r e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x}_i - \sigma t)}] Z(d\vec{k}, d\sigma) \quad (6)$$

수면변동 이외의 파동량은 전달함수를 사용하여 표시할 수 있다.

$$\xi(\vec{x}, t) = \int_{\sigma} \int_{\vec{k}} [H(\vec{k}, \sigma) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \sigma t)} + r H(\vec{k}_r, \sigma) e^{i(\vec{k}_r \cdot \vec{x}_i - \sigma t)}] Z(d\vec{k}, d\sigma) \quad (7)$$

여기서  $H(\vec{k}, \sigma)$ 는 수면변위로 부터 파동량  $\xi$ 의 전달함수로 일반적으로 차원을 가지며 선형파 이론을 사용하는 경우 다음식으로 표현된다.

$$[H(\vec{k}, \sigma) = H(f) \cos^{\alpha} \theta \sin^{\beta} \theta \quad (8)$$

여기서  $f$ 는 주파수,  $\theta$ 는 파향이며, 선형파 이론에 의한  $H(f)$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  등은 표 1에 수록되어

있다. 주파수  $f$ 는 파수  $|k|$ 가 기지인 경우 분산관계식(dispersion relation)으로 부터 구할 수 있다. 임의의 두 점  $\bar{x}_m$ 과  $\bar{x}_n$ 에서 관측한 두 파동량의 시계열을 각각  $\xi_m(\bar{x}_m, t)$ 와  $\xi_n(\bar{x}_n, t)$ 라 하면 식(7)로 부터 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\xi_m(\bar{x}_m, t) = \int_{\sigma} \int_k [H_m(k, \sigma) e^{i(k \cdot \bar{x}_m - \sigma t)} + r H_m(k_r, \sigma) e^{i(k \cdot \bar{x}_m - \sigma t)}] Z(dk, d\sigma) \quad (9)$$

$$\xi_n(\bar{x}_n, t) = \int_{\sigma} \int_k [H_n(k, \sigma) e^{i(k \cdot \bar{x}_n - \sigma t)} + r H_n(k_r, \sigma) e^{i(k \cdot \bar{x}_n - \sigma t)}] Z(dk, d\sigma) \quad (10)$$

그러므로 파동량  $\xi_m$ 와  $\xi_n$ 의 각주파수  $\sigma$ 성분의 복소진폭은 각각

$$X_m(\bar{x}_m, d\sigma) = \int_k [H_m^*(k, \sigma) e^{-ik \cdot \bar{x}_m} + r H_m^*(k_r, \sigma) e^{-ik \cdot \bar{x}_m}] Z(dk, d\sigma) \quad (11)$$

$$X_n(\bar{x}_n, d\sigma) = \int_k [H_n^*(k, \sigma) e^{-ik \cdot \bar{x}_n} + r H_n^*(k_r, \sigma) e^{-ik \cdot \bar{x}_n}] Z(dk, d\sigma) \quad (12)$$

이며, cross 스펙트럼의 정의로 부터 두 파동량 간의 cross 스펙트럼  $\phi_{mn}(\sigma)$ 는 다음과 같다.

$$\phi_{mn}(\sigma) d\sigma = \langle X_m^*(\bar{x}_m, d\sigma) X_n(\bar{x}_n, d\sigma) \rangle \quad (13)$$

〈표1〉 선형파 이론에 의한 전달함수

measured quantity	Symbol	H(k, $\sigma$ )	H(f)	$\alpha$	$\beta$
Water surface elevation	$\eta$	1	1	0	0
Excess pressure	P	$\rho g \frac{\cosh kz}{\cosh kh}$	$\rho g \frac{\cosh kz}{\cosh kh}$	0	0
Vertical water surface velocity	$\eta_t$	$-i\sigma$	$-i\sigma$	0	0
vertical water surface acceleration	$\eta_{tt}$	$-\sigma^2$	$-\sigma^2$	0	0
surface slope(x)	$\eta_x$	$ik \cos \theta$	$ik$	1	0
Surface slope(y)	$\eta_y$	$ik \sin \theta$	$ik$	0	1
Surface curvature(x)	$\eta_{xx}$	$-k^2 \cos^2 \theta$	$-k^2$	2	0
Surface curvature(y)	$\eta_{yy}$	$-k^2 \sin^2 \theta$	$-k^2$	0	2
Surface curvature(xy)	$\eta_{xy}$	$-k^2 \cos \theta \sin \theta$	$-k^2$	1	1
Water particle velocity(x-direc.)	$u$	$\sigma \cos \theta \frac{\cosh kz}{\sinh kh}$	$\sigma \frac{\cosh kz}{\sinh kh}$	1	0
Water particle velocity(y-direc.)	$v$	$\sigma \sin \theta \frac{\cosh kz}{\sinh kh}$	$\sigma \frac{\cosh kz}{\sinh kh}$	0	1
Water particle velocity(z-direc.)	$w$	$-i\sigma \frac{\sinh kz}{\sinh kh}$	$-i\sigma \frac{\sinh kz}{\sinh kh}$	0	0
Water particle acceleration(x-direc.)	$ut$	$-i\sigma^2 \cos \theta \frac{\cosh kz}{\sinh kh}$	$-i\sigma^2 \frac{\cosh kz}{\sinh kh}$	1	0
Water particle acceleration(y-direc.)	$vt$	$-i\sigma^2 \sin \theta \frac{\cosh kz}{\sinh kh}$	$-i\sigma^2 \frac{\cosh kz}{\sinh kh}$	0	1
Water particle acceleration(z-direc.)	$wt$	$-\sigma^2 \frac{\cosh kz}{\sinh kh}$	$-\sigma^2 \frac{\cosh kz}{\sinh kh}$	0	0

$f$ : frequency,  $\sigma = 2\pi f$ : angular frequency,  $k$ : wave number,  $\theta$ : wave direction,  $h$ : water depth,  $z$ : elevation from the bottom,  $\rho$ : fluid density,  $g$ : gravitational acceleration

식(11)과 식(12)에서  $Z$ 만이 확률변수이므로 식(13)은

$$\begin{aligned} \phi_{mn}(\sigma) d\sigma = & \int_k \int_k (H_m(k_r, \sigma) e^{ik \cdot x_m} + \\ & r H_m(k, \sigma) e^{ik \cdot x_{mr}} \\ & [H_n^*(k', \sigma) e^{-ik' \cdot x_n} + r H_n^*(k'_r, \sigma) e^{-ik' \cdot x_{nr}}] \\ & \langle Z(d\vec{k}, d\sigma) Z^*(d\vec{k}', d\sigma) \rangle \end{aligned} \quad (14)$$

식(2)와 식(3)로부터 식(14)는 다음과 같이 간단히 된다.

$$\begin{aligned} \phi_{mn}(\sigma) = & \int_k [H_m(k, \sigma) e^{ik \cdot x_m} + \\ & r H_m^*(k_r, \sigma) e^{-ik \cdot x_{mr}}] \\ & [H_n^*(k, \sigma) e^{-ik \cdot x_n} + r H_n^*(k_r, \sigma) \\ & e^{-ik \cdot x_{nr}}] S(k, \sigma) d\vec{k} \end{aligned} \quad (15)$$

식(15)는 주어진 두 파동량간의 cross 스펙트럼과 파수·주파수 스펙트럼과의 관계를 나타내는 식으로 입·반사파가 공존하는 파랑장의 방향스펙트럼 추정에서 가장 기본이 되는 적분방정식이다. 위 식에서  $r=0$ 이면 기존의 방향 스펙트럼 추정의 기본식으로 된다. 식(15)는 직벽으로 된 반사면을 가정하고 있기 때문에 경사가 완만한 자연해빈에 의한 반사에는 적용할 수 없다. 그러나 혼성방파제 처럼 반사면의 경사가 급한 경우에는 식(15)를 사용하여 근사적으로 반사파를 산정할 수 있다.

### 3. 위상간섭항의 영향

식(15)에서 두 대괄호의 첫번째 항의 곱은 입사파 성분을 나타내며, 두번째 항의 곱은 반사파 성분을 의미한다. 나머지 두 개의 곱은 예상하지 못했던 성분으로 이는 locked phase의 영향으로 생각되며 위상간섭항(phase interaction term)이라고 부른다. 식(15)의 대괄호를 전개하였을 때 각 항은 전달함수로 무차원화하면 다음과 같은 일반식으로 표현될 수 있다.

$$\phi(\vec{x}) = \int_k e^{-ik \cdot \vec{x}} S(k, \sigma) d\vec{k} \quad (16)$$

한편 Mitsuyasu형의 방향분포함수를 고려하면

$$S(k, \sigma) = \cos^{2s} \frac{\theta - \theta_0}{2} \quad (17)$$

로 주어진다.  $\vec{x}$ 는 극좌표에서 다음과 같다.

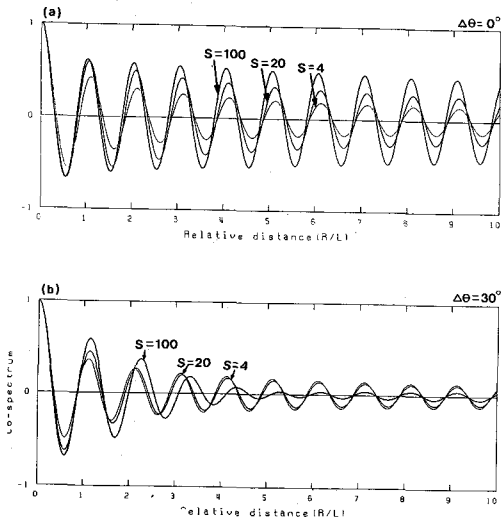
$$\vec{x} = (R \cos \theta, R \sin \theta) \quad (18)$$

식(17)과 식(18)을 식(16)에 대입하여 적분을 수행하고  $\vec{x}=0$ 에서의 co-spectrum  $c(0)$ 로 무차원화하면 각각 다음과 같은 co-spectrum과 quad-spectrum을 얻는다.

$$\begin{aligned} \frac{c(\vec{x})}{c(0)} = & J_0(kR) + 2 \sum_{l=1}^{(s/2)} [(-1)^l \frac{s!}{(s-2l)!} \\ & \frac{s!}{(s+2l)!} J_{2l}(kR) \cos 2l(\theta_0 - \theta)] \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \frac{q(\vec{x})}{c(0)} = & 2 \sum_{l=1}^{((s-1)/2)} [(-1)^l \frac{s!}{(s-2l-1)!} \frac{s!}{(s+2l+1)!} \\ & J_{2l+1}(kR) \cos(2l+1)(\theta_0 - \theta)] \end{aligned} \quad (20)$$

여기서  $J_l$ 은  $l$ order의 제1종 Bessel 함수이며,  $[p]$ 는 Gauss 기호로서  $p$ 를 넘지 않는 최대의 정수를 의미한다. 그림 2는  $\Delta\theta = \theta_0 - \theta = 0^\circ$ 와  $30^\circ$ 인 경우 상대거리( $R/L$ ;  $L$ 은 파장)에 대한 co-spectrum의 변화를 보여준다. quad-spectrum에 대한 그림의 형태는 그림 2와 비슷하며 다만 최대와 최소값이 그림 2의 zero-crossing에서 나타남을 식(19)와 식(20)으로부터 알 수 있다. 그러므로  $\phi$ 의 진폭은 co-spectrum 곡선의 포락선(envelope)이다. 입사파 성분과 반사파 성분에 대하여는  $\vec{x}=0$ 이고 위상간섭항에 대해서는  $\vec{x} \neq 0$ 이므로 <그림 2>의 포락선은 위상간섭항의 크기를 나타낸다고 생각할 수 있다. 이 그림



〈그림 2〉 위상간섭상의 영향 (a)  $\Delta\theta = 0^\circ$ , (b)  $\Delta\theta = 30^\circ$

으로부터 방향분포함수의 유효폭이 작을수록 ( $S$ 가 클수록), 주파향이  $x$ 의 방향과 일치할수록 그리고 반사면에 가까울수록 locked phase의 영향이 중요해짐을 알 수 있다. 그러나 어느 경우이든 반사면으로부터 충분히 멀리 떨어진 곳에서는 locked phase의 영향이 무시될 수 있기 때문에 이러한 해역에서는 random phase를 가정하는 방향스펙트럼 추정법을 적용하여 반사파를 분리할 수 있다.

#### 4. 수정확장최우법(MEMLM)의 유도

기존의 방향스펙트럼 추정 이론을 식(15)에 적용할 수 있도록 개선하는데 있어서 어려운 점은 식(15)의 피적분함수에 포함되어 있는 반사계수  $r$ 이 미지수이며 더우기 이는 주파수와 방향의 함수라는 것이다. 즉 반사계수  $r$ 에 대한 추가적인 방정식 또는 제약조건 등이 필요하다.

Isobe *et al.* (1984)은 그의 최우법(MLM; Maximum Likelihood Method)을 입·반사파가 공존하는 파동장에 적용할 수 있도록 개선하여 수정최우법(MMLM; Modified Maximum Likelihood Method)으로 명명

하였다. Isobe *et al.* (1984)의 방법은 수면변위를 대상으로 하였기 때문에 공간배열(space array)에만 적용할 수 있다. 그러나 국내에서는 directional waverider buoy, PUV 계기 등 점배열을 이용하여 방향스펙트럼을 관측하는 경우가 대부분이므로 Isobe *et al.* (1984)의 방법을 점배열에 사용할 수 있도록 확장하여야 한다. 따라서 본 연구 Isobe 등의 수정최우법을 수면변위 이외의 파동량에도 적용할 수 있도록 확장된 식을 유도하여 이를 수정확장최우법(MEMLM; Modified Extended Maximum Likelihood Method)으로 칭하고 수치모의실험을 통하여 수정확장최우법에 의한 방향 분해능과 반사계수 산정의 정확성을 검토하기로 한다.

Isobe *et al.* (1984)은 Davis and Regier (1977)과 같이 입·반사파가 공존하는 파동장의 방향스펙트럼 추정치를 관측파동량간의 cross 스펙트럼의 선형결합(linear combination)으로 표현하였다.

$$\hat{S}(\vec{k}, \sigma) = \sum_m \sum_n \alpha_{mn}(\vec{k}) \Phi_{mn}(\sigma) \quad m, n=1, 2, \dots, N \quad (21)$$

여기서  $\hat{S}(\vec{k}, \sigma)$ 는 입사파의 방향스펙트럼 추정치,  $\alpha_{mn}(\vec{k})$ 는 선형결합의 계수,  $N$ 은 관측파동량의 수이다. 식(15)를 식(21)에 대입하면 다음과 같다.

$$\hat{S}(\vec{k}, \sigma) = \int_{\vec{k}'} S(\vec{k}', \sigma) W(\vec{k}, \vec{k}') d\vec{k}' \quad (22)$$

$$W(\vec{k}, \vec{k}') = \sum_m \sum_n \alpha_{mn}(\vec{k}) T_{mn}(\vec{k}') \quad (23)$$

$$T_{mn}(\vec{k}') = [H_m(\vec{k}', \sigma) e^{i\vec{k}' \cdot \vec{x}_m} + r H_m^*(\vec{k}', \sigma) e^{-i\vec{k}' \cdot \vec{x}_m}] [H_n^*(\vec{k}', \sigma) e^{-i\vec{k}' \cdot \vec{x}_n} + r H_n(\vec{k}', \sigma) e^{-i\vec{k}' \cdot \vec{x}_n}] \quad (24)$$

식(22)로 부터 방향스펙트럼 추정치  $\hat{S}(\bar{k}, \sigma)$ 는 실스펙트럼(real spectrum)  $S(\bar{k}, \sigma)$ 에 window  $W(\bar{k}, \bar{k}')$ 를 convolution한 것임을 알 수 있다. 한편 window에 positive definiteness를 부여하기 위하여  $\alpha_{mn}(\bar{k})$ 를 다음 식과 같이 Hermitian form으로 표현한다.

$$\alpha_{mn}(\bar{k}) = \gamma_m(\bar{k}) \gamma_n^*(\bar{k}) \quad (25)$$

식(25)를 식(21)과 식(23)에 대입하면 다음식을 얻는다.

$$\hat{S}(\bar{k}, \sigma) = \sum_m \sum_n \gamma_m(\bar{k}) \Phi_{mn}(\sigma) \gamma_n^*(\bar{k}) \quad (26)$$

$$W(\bar{k}, \bar{k}') = \sum_m \sum_n \gamma_m(\bar{k}) T_{mn}(\bar{k}') \gamma_n^*(\bar{k}) \quad (27)$$

식(24)를 식(27)에 대입하고 복소수의 성질을 이용하여 정리하면 다음과 같다.

$$W(\bar{k}, \bar{k}') = \left| \sum_m \gamma_m(\bar{k}) [H_m(\bar{k}', \sigma) e^{ik' \cdot x_m} + r H_m^*(\bar{k}', \sigma) e^{ik' \cdot x_m}] \right|^2 \quad (28)$$

식(28)로 부터 window는  $W(\bar{k}, \bar{k}') \geq 0$ 이므로 positive definiteness를 갖고 있으며 또한  $\bar{k} = \bar{k}'$ 에서 최대값을 갖는다.

식(22)에서 보는 바와 같이 window가 Delta 함수이면 추정 스펙트럼은 실스펙트럼과 동일하다. 따라서 window가 Delta 함수에 접근하면 할수록 방향스펙트럼의 추정 정도는 향상된다. 식(26)에서 방향스펙트럼 추정치를 구하기 위해서는 먼저  $\gamma(\bar{k})$ 가 결정되어야 한다. 그런데 식(27)에서  $\gamma(\bar{k})$ 는 window와도 관련되어 있으므로 식(29)의 조건을 부여하여 구할 수 있다. 즉

$$W(\bar{k}, \bar{k}') \rightarrow \delta(\bar{k}, \bar{k}') \quad (29)$$

식(29)를 식(22)와 관련시켜 생각하면  $S$

$(\bar{k}, \sigma)$ 와  $W(\bar{k}, \bar{k}')$ 가 모두 음이 아니고 window가  $\bar{k} = \bar{k}'$ 에서 최대값을 가지므로  $W(\bar{k}, \bar{k}')$ 를 일정하게 유지할 경우 window의 면적 또는  $\hat{S}(\bar{k}, \sigma)$ 를 최소로 하는  $\gamma(\bar{k})$ 를 결정하는 문제로 귀착된다. 표기의 간편성을 위하여 vector와 행렬 기호를 도입하여 식(26)과 식(27)을 다시 쓰면 다음과 같다.

$$\hat{S}(\bar{k}, \sigma) = \gamma^T(\bar{k}) \Phi(\sigma) \gamma^*(\bar{k}) \quad (30)$$

$$W(\bar{k}, \bar{k}') = \gamma^T(\bar{k}) T(\bar{k}') \gamma^*(\bar{k}) \quad (31)$$

여기서 상첨자  $T$ 는 전치(transpose)를 의미한다. 그러므로  $\hat{S}(\bar{k}, \sigma)$ 와  $\gamma(\bar{k})$ 를 결정하는 문제는 다음과 같다.

$$\min \gamma^T(\bar{k}) \Phi(\sigma) \gamma^*(\bar{k}) \quad (32)$$

$$\text{subject to } \gamma^T(\bar{k}) T(\bar{k}') \gamma^*(\bar{k}) = \text{constant} \quad (33)$$

한편 식(32)와 식(33)은

$$\frac{W(\bar{k}, \bar{k}')}{S(\bar{k}, \sigma)} = \frac{\gamma^T(\bar{k}) T(\bar{k}') \gamma^*(\bar{k})}{\gamma^T \Phi(\sigma) \gamma^*(\bar{k})} \rightarrow \max \quad (34)$$

로 바꿀 수 있다. 여기서  $T(\bar{k}')$ 는 Hermitian이고 식(34)에서 보는 바와 같이 두개의 vector로 분리되므로  $\text{rank}(T) = 1$ 이며 또한  $\text{tr}(T) \geq 0$ 이므로  $T$ 의 고유치는 하나의 양의 실수와  $N-1$  multiple의 zero이다. 식(34)는 Rayleigh quotient로 알려져 있으며 최대값은

$$T \gamma^* = \lambda \Phi \gamma^* \quad (35)$$

를 만족하는 고유치  $\lambda$ 의 최대값  $\lambda_{\max}$ 와 동일하다(Wylie, 1975). 따라서 구하는 방향스펙트럼 추정치는

$$\hat{S}(\bar{k}, \sigma) = \frac{K}{\lambda_{\max}} \quad (36)$$

로 주어지며 행렬  $T(\bar{k}')$ 를

$$T(\vec{k}) = \gamma_0^*(\vec{k})\gamma_0(\vec{k}) \quad (37)$$

로 쓰면 식(35)와 식(37)로부터  $\lambda=0$ 에 대응하는 고유 vector는  $\gamma_0$ 에 직교하는 모든 vector임을 알 수 있다. 서로 다른 고유치에 대응하는 고유 vector는 직교(orthogonal)이므로  $\lambda \neq 0$ 인 고유치에 대응하는 고유 vector는  $\gamma_0$ 임을 알 수 있다. 따라서  $\gamma_0$ 에 대응하는 고유치가  $\lambda_{\max}$ 이므로 식(35)로부터

$$T\gamma_0^* = \lambda_{\max}\Phi\gamma_0 \quad (38)$$

이다. 식(37)을 식(38)에 대입하고 양변에  $\gamma_0^*\Phi^{-1}$ 를 곱하면

$$\gamma_0^*\Phi^{-1}\gamma_0^*\gamma_0\gamma_0^* = \lambda_{\max}\gamma_0^*\gamma_0 \quad (39)$$

를 얻는다. 따라서

$$\lambda_{\max} = \gamma_0^*\Phi^{-1}\gamma_0 \quad (40)$$

이고 방향스펙트럼 추정치는

$$\hat{S}(\vec{k}, \sigma) = \frac{K}{\gamma_0^*(\vec{k})\Phi^{-1}(\sigma)\gamma_0(\vec{k})} \quad (41)$$

임을 알 수 있다. 한편 식(24)와 식(37)로부터

$$\gamma_{0m}^* = H_m(\vec{k}, \sigma)e^{ik \cdot x_m} + rH_m(\vec{k}_r, \sigma)e^{ik \cdot x_{mr}} \quad (42)$$

이므로

$$\hat{S}(\vec{k}, \sigma) = K \left[ \sum_m \sum_n \Phi_{mn}^{-1} \{ H_m^*(\vec{k}, \sigma)e^{-ik \cdot x_m} + rH_m^*(\vec{k}_r, \sigma)e^{-ik \cdot x_{mr}} \} \{ H_n(\vec{k}, \sigma)e^{ik \cdot x_n} + rH_n(\vec{k}_r, \sigma)e^{ik \cdot x_{nr}} \} \right]^{-1} \quad (43)$$

이다. 식(43)은 MMLM을 일반적인 파동량에 적용할 수 있도록 확장한 식이며 반사계수가 zero인 경우에는 기존의 확장최우법과 같아진다. 여기서  $K$ 는 비례상수로서

$$\Phi_{mm}(\sigma) = \int_{\vec{k}} [1 + 2r \cos\{\vec{k} \cdot (x_m - x_{mr})\} + r^2] S(\vec{k}, \sigma) d\vec{k} \quad (44)$$

를 만족하도록 최소자승법으로 결정되며, 적분은 입사파의 파수 vector 범위내에서 수행한다.

식(43)이 입·반사파 공존하는 파랑장에서 수정확장최우법에 의한 입사파의 방향스펙트럼 추정치이다. 식(43)으로부터 입사파의 방향스펙트럼을 산정하려면 반사계수를 알아야 한다. 그러나 반사계수는 일반적으로 방향과 주파수의 함수로서 미지수이므로 이를 결정하기 위해서는 추가적인 방정식 또는 제약조건식이 필요하다. Isobe et al.(1984)은 고유치  $\lambda_{\max}$ 가 반사계수  $r$ 의 함수인 점과 고유치를 최대로 하는 경우에 분해능이 최대로 되는 점을 고려하여 반사계수가  $\lambda_{\max}$ 의 정체점(extremum point)에서 결정된다고 가정하였다. 즉 반사계수는

$$\frac{d\lambda_{\max}}{dr} = 0 \quad (45)$$

로부터 구해질 수 있으며, 이는 Delta 함수로 표현되는 방향분포함수에 대하여 정확한 반사계수를 주며, 일반적인 방향분포함수의 경우에도 근사적으로 사용할 수 있다. 식(40), 식(42) 및 식(45)로부터 반사계수는 최종적으로 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$r = \frac{\sum_m \sum_n \Phi_{mn}^{-1} [H_m^*(\vec{k}, \sigma)H_n(\vec{k}_r, \sigma)e^{ik \cdot (x_{nr} - x_m)} + H_m^*(\vec{k}_r, \sigma)H_n(\vec{k}, \sigma)e^{ik \cdot (x_m - x_{nr})}]}{2 \sum_m \sum_n \Phi_{mn}^{-1} [H_m^*(\vec{k}_r, \sigma)H_m(\vec{k}_r, \sigma) + H_m^*(\vec{k}, \sigma)H_m(\vec{k}, \sigma)]} \quad (46)$$

▣ <다음호에 계속>