완충포장의 기초이론 및 문제연습(2)

이명훈/한국포장시스템연구소 소장

목 차

3. 진동(Vibration)

진동은 일상생활에서 늘 겪는 일이다. 철도 건널목에서 기차가 지나가기를 기다릴 때 땅이 울리는 것을 느낄 수 있고 자동차를 타면 지표면의 요철 때문에 진동을 느낄 수 있다. 또한 비행기에서는 엔진의 진동을 느끼게 된다.

소음은 공기의 진동에 의해 전달되는데 고막의 울림을 통하여 우리 머리 속으로 전달된다. 어떤 물체가 내는 열은 분자와 원자의 진동운동이다. 가시광선조차도 진동의 한 형태(전자기파 진동)이다.

따라서 유통과정중의 포장화물도 진동을 겪게 된다.

여러가지 복합적이고 기계적인 진동과 이에 수반되는 가속도의 포장화물은 물리적인 손상을 입을 수 있다.

유통과정에서 생기는 복합적인 기계적 진동을 논하기 이전에 진동의 가장 단순한 형태인 단진동(Simple harmonic motion)에 대하여 알아보기로 한다.

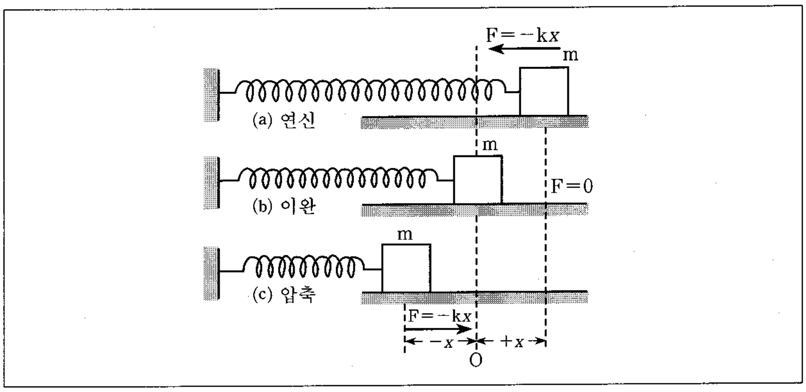
〔그림 3-1〕은 단순 진동자를 나타내었는데 무게추가 마찰없는 스프링에 연결되어 무중력장 하에서 진동하고 있는 모습이다.

그림에서 a는 스프링이 늘어나면서 스프링의 힘은 무게추를 왼쪽방향으로 끌어당기고 있다.

c에서는 스프링이 압축되면서 무게추를 오른쪽 방향으로 밀고 있다.

b에서는 무게추가 운동의 중심점에 위치하여 밀지도 당기지도 않고

〔그림 3-1〕 단진자 운동



있다. 이 a-b-c가 반복하는 것을 단순진동이라 한다.

이 단순진동을 90° 돌려서 바닥 위에 세워 놓는다고 가정하자. 〔그림 3-2〕는 이 단순진동이 압축되었다가 풀리는 과정을 진동이 계속되는 동안 임의의 좌표로 표현한 것이다.

〔그림 3-2〕에서 평형지점으로부터 1인치 아래인 a 지점까지 압축된 무게추는 b · c · d를 거치면서 최대 높이면 e 지점까지 올라갔다가 f · g · h를 거치면서 최소 높이인 i지점까지 내려가며 이러한 동작을 반복하게 된다.

무게추의 중심점들을 연결하여 시간에 대한 그래프를 작성하여 보면 〔그림 3-3〕과 같이 된다. 여기에서 나타나는 여러가지 개념을 우선 정리해볼 필요가 있다.

▲ 주기(Period) : 주기는 한 사이클에 필요한 시간을 말한다. 그림에서 c로부터 k까지 0.5초가 소요되었다면 진동주기는 0.5초라고 말할 수 있다.

약어로서 T=초당주기

▲ 주파수(Freguency) : 주파수는 특정 단위 시간 내에 일어나는 사이클 수로 정의된다. 주파수와 주기는 다음과 같은 상관관계를 가진다.

$$\text{주파수(사이클/초)} = \frac{1}{\text{주기(추)}} \quad (3 \cdot 1)$$

초당 1사이클의 주파수를 1헤르츠(Hertz) 또는 1Hz으로 표현한다. 위의 예는 2Hz의 주파수라고 할 수 있다. 주파수는 'f'라고 표시하는데 공식(3 · 1)을 다시 표현하면 다음과 같다.

$$f(hz) = \frac{1}{T(sec)} \quad (3 \cdot 2)$$

▲ 진폭(Amplitude) : 진폭은 무게추가 0이 되거나 평형을 이루는 점으로부터의 변위를 말한다. 위의 예에서는 진폭이 1inch이다. A라고 표현하며 충격과 진동에 관한 서적에서는 '단일'(single)진폭 혹은 '0에서 정점까지'(zero to peak) 진폭이라고 정의된다.

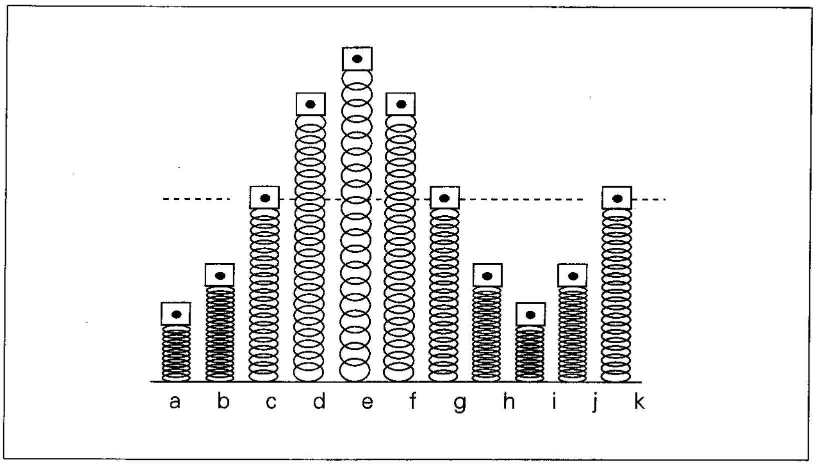
진동추의 최저점에서 부터 최고점까지(위의 예에서는 2inch)를 '배수진폭'(double amplitude) 혹은 '정점에서 정점까지'(peak to peak) 진폭이라 한다.

진동 스프링-무게추 시스템을 Sine 함수로서 수학적으로 표현하면 다음과 같다.

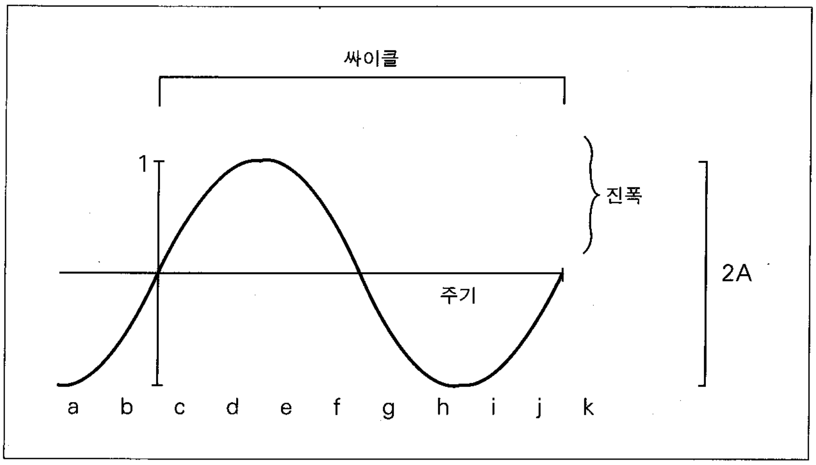
$$X = A\ \sin(pt) \quad (3 \cdot 3)$$

〔그림 3-4〕에서와 같이 X는 시간 ti에서 진동무게추의 평형점으로부터의 변위이다. 위의 예에서 진동주파수는 2Hz(초당 2사이클)이고 x축은 라디안 단위로 측정된다면(註 : π 라디안=180°) 회전 주파수(circular freguency) P는 다음과 같이 정의

〔그림 3-2〕 수직방향 단순진동



〔그림 3-3〕 시간 함수로서의 단순 진동운동 그래프



된다.

$$P=2\pi f \qquad (3 \cdot 4)$$

여기에서 f는 진동 주파수이다. 예제에서는 $P=2\pi \cdot f=2\pi \cdot 2Hz=4\pi$사이클/초가 되며 만약 t=0.3초라고 가정하면 변위는 다음과 같다.

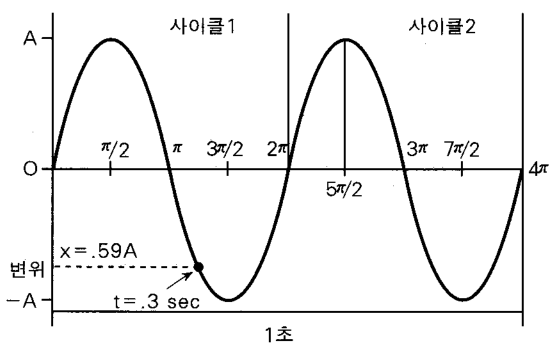
$$X=A\ \sin(4\pi\ \text{cycles/sec} \cdot 0.3\text{sec})$$
$$=-0.59A$$ (최대치의 약 59%, 1인치 아래 방향 향진)

진동 무게추의 위치 산출은 별로 어렵지 않으며 +A와 −A 사이에 있을 테지만 포장 용도에 적합한 지점이어야 한다는 것이다.

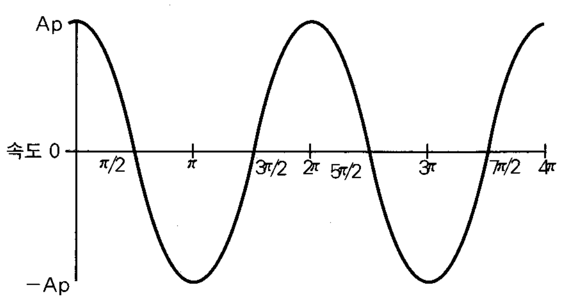
중요한 요소는 진동 중에 무게추의 속도와 가속도이며 무게추의 속도는 시간 변화에 대한 변위로 정의된다. 즉,

$$V=\frac{\text{변위}}{\text{시간 변위}}=\frac{dx}{dt}$$
$$=\frac{dx}{dt}(A\ \text{Sin}\ pt)$$
$$=Ap\ \cos(pt) \qquad (3 \cdot 5)$$

〔그림 3-4〕 Sine함수 : 평형점으로부터 진동 무게추의 변위(공식 3 · 3 관련)



〔그림 3-5〕 진동 무게추의 속도(공식 3 · 5 관련)



〔그림 3-5〕는 〔그림 3-4〕를 같은 수평스케일상에 진동무게추의 속도를 나타낸 그래프이다. 한걸음 더 나아가서 가속도 a를 산출하자면,

$$a=\frac{\text{속도 변화}}{\text{시간 변화}}=\frac{dv}{dt}$$
$$=\frac{dv}{dt}(Ap\ \cos(pt))$$
$$=-Ap^2\ \sin(pt)$$

〔그림 3-6〕은 〔그림 3-4〕와 〔3-5〕로부터 산출된 가속도를 도식한 것이다.

〔그림 3-4, 3-5, 3-6〕으로부터 주목하여야 할 점은 변위 X가 변함에 따라 속도와 가속도도 변화한다는 것이다.

이러한 동작의 변화를 〔그림 3-7〕과 같이 진동 무게추의 1사이클로 나타내었다.

A지점에서 무게추는 평형지점을 지나게 되고 이때 속도는 최대가 된다. 공식 (3 · 5)에서 t=0일 때 속도를 산출할 수 있다.

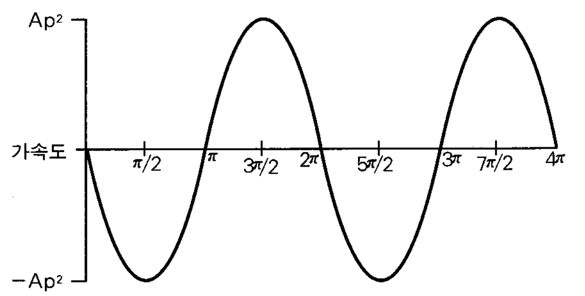
$$V=Ap\ \cos(pt)=Ap\ \cos(0)$$
$$=Ap$$

속도의 최대값은 진폭과 주파수의 곱과 같다. 또한 같은 점에서 가속도는 최소가 된다. 공식 (3 · 6)에서

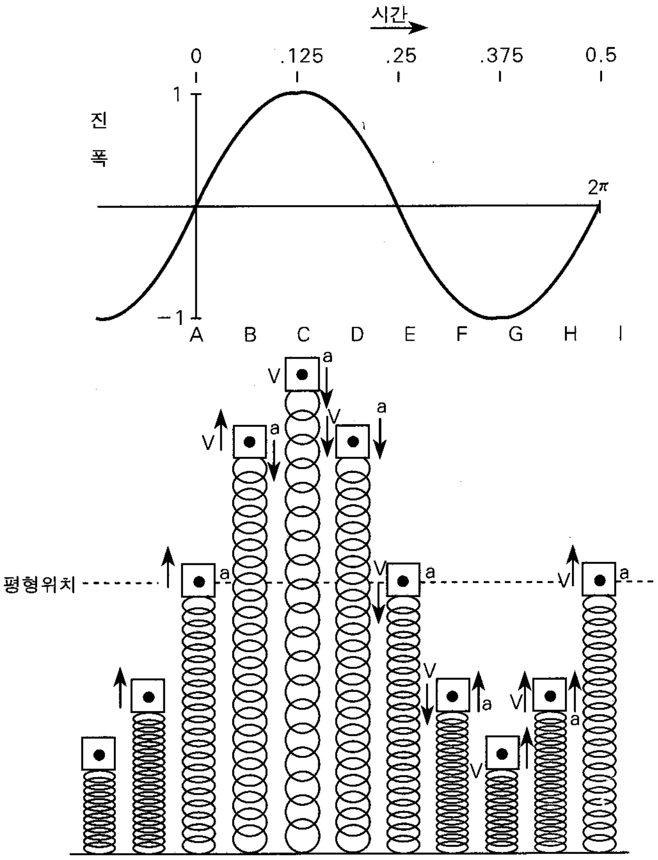
$$a=-Ap^2\ \sin(pt)$$
$$=-Ap^2\ \sin(0)=0$$

B지점에서 스프링이 늘어나면서 힘이 점차 소진되며 아래 방향으로 가속도가 생기게 된다. 이것은 무게추를 느리게 움직이게 하는데 속도도 점차 감소한다. C지점에서 스프링이 늘어나면서 생긴 아래 방향의 가속도

〔그림 3-6〕 진동 무게추의 가속도(공식 3 · 6 관련)



〔그림 3-7〕 2Hz에서의 자유진동



속도, V	최대		최소		최대		최소		최대
가속도, a	최소		최대		최소		최대		최소

는 무게추의 속도를 0으로 만든다.

$$V = Ap\ \cos(pt)$$
$$= Ap\ \cos(4\pi \cdot 0.125sec) = 0$$

하지만 가속도는 최대가 되는데 아래 방향으로 작용하므로 −부호를 붙인다.

$$a = Ap^2\ \sin(pt)(4\pi \cdot 0.125sec)$$
$$= -Ap^2$$

이 −부호 혹은 아래 방향 가속도는 무게추의 동작을 반전시킴으로써 D지점에서는 다시 평형점을 향해 아래로 내려가게 된다.

E지점에서 평형점을 지나면서 가속도는 0이 되고 속도는 최대가 된다. −부호는 아래 방향을 가르킨다.

F지점에서는 무게추가 바닥으로 접근함에 따라 스프링이 압축되고 아래방향으로의 동작에 저항하는 힘이 생기며 윗방향 즉 +방향으로의 가속도가 발생한다. 이것은 G지점에 이르기까지 계속되는데 반대방향으로 바뀌게 된다. 이 동작은 무게추가 또 다시 평형지점에 이를 때까지 윗쪽 방향으로 계속되며 이와 같은 사이클은 계속 반복된다.

앞의 분석은 다음과 같은 세 가지 중요한 점을 적시하고 있다.

1. 무게추의 속도는 무게추가 중간지점 혹은 동작의 평형지점(X=0)을 지나면서 최대값을 가진다.

2. 가속도는 변위가 최대이고 속도가 0인 지점 즉 동작의 끝지점에서 최대값을 보이고 속도가 최대로 되는 동작의 중간지점에서 최소가 된다.

가속도는 변위가 가장 큰 값을 가질 때 (X=A) 가장 큰 −값($-Ap^2$)을 가진다. 가속도와 변위는 180° 상

반된다고 할 수 있다.

3. 변위, 속도, 가속도에 대한 최대값은 각각 다음과 같다.

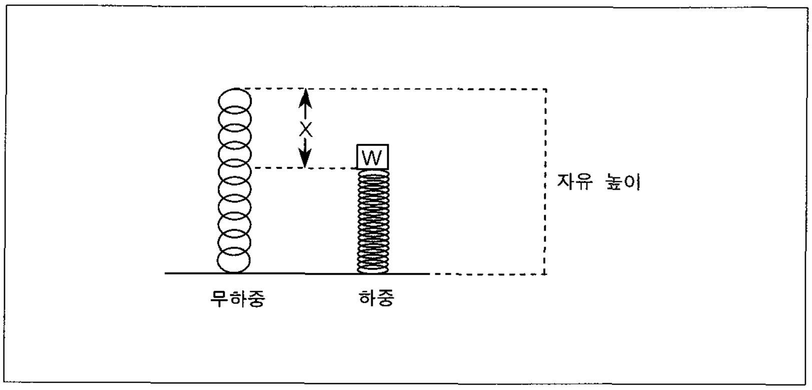
$$X_{max}=A \quad (3 \cdot 7)$$

$$V_{max}=Ap \quad (3 \cdot 8)$$

$$\alpha_{max}=Ap^2 \quad (3 \cdot 9)$$

과도한 동작으로 인해 발생된 가속도는 포장제품의 유통에 있어서 진동에 의한 파손과 깊은 관련이 있다.

〔그림 3-9〕 선형 스프링 위에 하중을 가할 경우



3-1. Yo-Yo 유추법

우리말로 스카이콩콩이라고 하는 Yo-Yo는 앞장에서 설명한 단순진동과 매우 흡사한 동작을 가지고 있으며 〔그림 3-8〕에 표시하였다.

우선 Yo-Yo의 동작을 가장 높은 지점으로부터 시작하여 보자. 시간의 경과에 따라 요요는 임의의 참고점(B지점)을 거쳐 가장 낮은 점(C지점)에 이르게 되고, 이곳으로부터 다시 윗방향으로 참고지점 D를 거쳐 가장 높은 지점인 E에 이르게 되며 이러한 과정을 주기적으로 반복하게 된다.

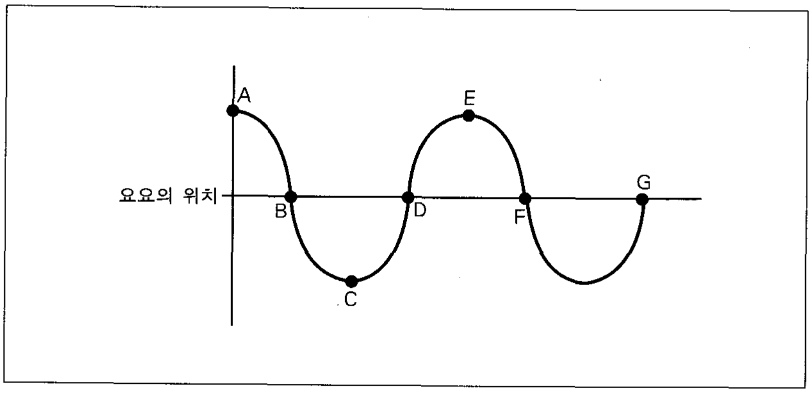
1주기 동작(1사이클)을 완료하는데 소요되는 시간을 1주기(T)라고 하며 주로 초단위로 측정된다. 1초 동안 이루어지는 사이클 수를 주파수라고 하며 헤르쯔(Hz)단위로 표시한다. 따라서 주기와 주파수의 관계는 다음과 같이 표시된다.

$$f=\frac{1}{T} \quad \text{(T는 초단위)}$$

실제로 어린이들이 Yo-Yo를 가지고 놀 때 주파수는 거의 1Hz에 가까운데 속력은 시간별로 틀리다. 〔그림 3-8〕에서,

- A지점에서의 속력은 0이다.
- A에서 B까지의 속력은 계속 증가되며 B지점에서 최대가 된다.
- B에서 C까지는 속력이 감소하며 C지점에서 다시 0이 된다.
- C에서 D까지는 속력은 다시 증가하고 D에서 E까지는 다시 감소한다.

〔그림 3-8〕 Yo-Yo의 동작



속력의 증감이 반복되는 동안 가속도의 변화는 일정하다. C지점부터 시작하자면, C지점이 바로 Yo-Yo가 약동을 시작하는 점이 된다. 약동이란 Yo-Yo를 윗쪽 방향으로 가속시키는 힘을 의미한다.

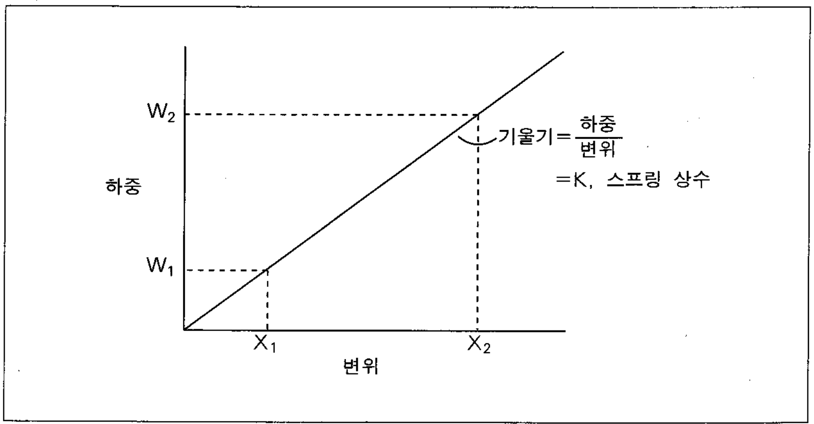
약동 강도는 C에서 D에 이르기까지는 감소한다. 그러므로 가속도도 점차 작아지고 D지점에서는 0이 된다(중력에 의한 g값은 무시한다). D지점에서 E지점까지는 감속도가 점차 증가되고 E지점에서 최대 감속도를 보인다.

A에서 C까지 Yo-Yo의 가속 형태는 방향만 다를 뿐 C에서 E까지와 같다. 중요한 사실은 진동에 있어서 가속도는 일정하게 변화하며 최대치와 최소치를 가진다는 것이다.

Yo-Yo의 동작은 선형스프링에 연결된 무게추의 진동과 매우 흡사하다. 궁극적으로 알고자 하는 것은 포장 혹은 무포장 상태의 물체가 외계의 진동을 받는 유통 여건에 놓여 있을 때 어떻게 될 것인가 하는 점이다.

3절에 소개된 스프링-무게추는 유통에 의한 진동으로부터 알아보고자

〔그림 3-10〕 선형 스프링의 하중-변위 선도



하는 제품 완충 혹은 제품 각 부위의 취약성, 기타의 특성들을 유추할 수 있는 이상적인 모델이다.

좀더 쉽게 접근하기 위하여 스프링은 무게가 매우 가벼우므로 무게없는 선형 스프링이라고 가정하고 〔그림 3-9〕와 같은 모델이 있다고 하자.

매우 단순한 특성을 지니고 있으므로 선형 스프링이 사용된다고 하면 이의 하중 변위선도는 〔그림 3-10〕과 같다.

선형 스프링이란 가해진 힘에 정비례하여 압축되거나 늘어나는 스프링을 말한다. 〔그림 3-9〕의 왼쪽에 있는 스프링에 올려진 하중을 W_1이라고 하자. 스프링은 하중을 받지 않았을 때보다 X_1 거리만큼 압축된다. W_1을 내리고 W_1보다 3배의 하중을 가진 W_2의 하중을 올리면 스프링은 X_1의 3배 거리인 X_2만큼 압축된다. 이러한 스프링의 하중-변위 선도는 직선으로 나타나는데(그림 3-10) 여기에서 선형이라는 개념을 알 수 있다.

하중-위치의 기울기를 스프링상수(Spring Constant) K라고 하며 다음식으로 계산할 수 있다.

$$K=\frac{W_2-W_1}{X_2-X_1} \qquad (3 \cdot 10)$$

단위는 일반적으로 1b/in로 나타낸다.

스프링 탄력에 의한 윗방향의 힘과 지구 중력 작용에 의한 아래방향의 힘이 작용하는데 이 힘은 다음과 같이 표현된다.

Fs=KX (X는 변위이다)

어떤 선형 스프링 위에 특정 하중이 올려져 있다면 이 시스템이 정지 상태에 있을 때 아래방향의 변위를 측정할 수 있는데 이를 정적변형(static deflection), δst(델타에스티)라고 한다.

$$\delta st=\frac{W}{K} \qquad (3 \cdot 11)$$

완충포장된 제품의 정적 변형은 간단한 실험으로 측정할 수 있으며 외부의 진동하에 있을 경우 제품과 완충 시스템이 역학이론을 규명하는데 도움이 된다.

3-2. 자연 주파수 (Natural Freguency)

스프링-무게추 시스템의 무게추를 아래방향으로 향하게 하고 놓으면 무게추는 변위 공식에 맞게 움직일 것이다. 즉,

$$X=A \sin(pt)$$

3.0 절에 소개된 속도 및 가속도 공식에서부터 원형주파수 P, 선형 스프링 계수 K, 그리고 무게추의 중량 W 사이에는 다음과 같은 관계가 성립된다.

$$P^2=\frac{Kg}{W} \qquad (3 \cdot 12)$$

여기에서 g는 중력가속도(386.4in/sec²)이다.

원형 주파수는 진동시스템의 주파수와 다음과 같은 관계가 성립된다.

$$P=2\pi f \qquad (3 \cdot 13)$$

스프링 무게추 시스템은 자유 운동하에서는 항상 동일한 주파수로 진동한다. 즉, 시스템이 움직이도록 일정한 힘을 가하였다가 떼면 시스템은 일정한 주파수로 진동하게 되는데 이 주파수를 자연주파수(natural

〔표 3-1〕

δst (inches)	fn (Hertz)
2	2.2
1	3.2
0.5	4.4
0.25	6.3
0.10	9.9
0.01	31
0.001	99

freguency)라고 하며 fn으로 표시한다.

$$P=2\pi fn \qquad (3\cdot14)$$

식 3 · 12와 3 · 13으로 부터 P를 소거하면,

$$P^2=\frac{Kg}{W},\ P=\sqrt{\frac{Kg}{W}}$$

P=2πfn이므로

$$2\pi fn=\sqrt{\frac{Kg}{W}}$$

$$fn=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{Kg}{W}} \qquad (3\cdot15)$$

자연 주파수는 선형 스프링 무게추 시스템에서 스프링 상수값과 무게추의 중량을 구할 수 있다. 예를 들면 만약 W=10 lbs, K=500 lb/in라고 하면,

$$fn=\frac{1}{2\pi}\cdot\sqrt{\frac{(500\ lb/in)(386.4\ in/sec^2)}{10\ lb}}$$

$$=22\ cycles/sec\ or\ 22Hz$$

식 3 · 15를 좀더 단순화하자면,

$$fn=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{Kg}{W}}=\frac{\sqrt{g}}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{W}}$$

$$=\frac{\sqrt{386.4}}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{W}}$$

$$=3.13\sqrt{\frac{K}{W}} \qquad (3\cdot16)$$

즉, $fn=3.13\sqrt{\frac{K}{W}}$ 이며 이때 K의 단위는 lb/in이고 W는 lb 단위이다.

식 3 · 11을 이용하면 좀더 단순화 할 수 있는데,

$$\delta st=\frac{W}{K}\text{이므로}$$

$$fn=3.13\sqrt{\frac{K}{W}}$$

$$=3.13\sqrt{\frac{1}{\delta st}} \qquad (3\cdot17)$$

여기에서 정적변형 δst는 인치 단위이다.

위의 공식을 이용하여 정적 변형과 자연주파수와의 관계를 표 3 · 1에 나타내었다. 변형이 작을 수록 자연 주파수는 커진다. 이 관계는 스프링 무게추 시스템에는 물론이고 제품과 완충재의 관계나 제품에서 구조적 요인을 파악하는데도 적용된다. 유통체계하의 포장화물에 아주 효과적으로 이용할 수 있을 것이다.

3-3. 진동하는 스프링-무게추 시스템

원형주파수는 P를 소거하고 속도와 가속도의 관계를 규명하자면,

$$P=\sqrt{\frac{Kg}{W}}\ \text{혹은}\ P=2\pi f$$

자유 진동 스프링-무게추 시스템에서는 f=fn이다.

진동 하중에 의한 최대 속도 및 가속도를 나타낼 수 있는 사인곡선 운동(Sinusoidal motion)으로부터

$$V_{max}=Ap$$

$$a_{max}=Ap^2$$

여기에서 A는 무게추 운동에서 단진폭(Single amplitude)을 의미한다. 포장 화물에서는 최대 속도와 최대 가속도가 중요한 의미를 갖는데,

$$V_{max}=A\sqrt{\frac{Kg}{W}} \qquad (3\cdot18)$$

$$\text{또는}\ V_{max}=A(2\pi fn) \qquad (3\cdot19)$$

최대 가속도는,

$$a_{max}=A\left(\frac{Kg}{W}\right) \qquad (3\cdot20)$$

$$\text{또는}\ a_{max}=A(2\pi fn)^2 \qquad (3\cdot21)$$

완충포장한 10 lb의 제품이 있다고 가정(완충재는 선형 스프링 행동을 보인다고 가정)할 때 완충재가 포장 전보다 0.61인치가 눌렸다면 이 시스템이 진동할 때 주파수는 어떻게 될 것인가?

식 3 · 17로부터 $fn=3.13\sqrt{\frac{1}{\delta st}}$

그러므로 $fn=3.13\sqrt{\frac{1}{0.61}}=4Hz$

제품의 무게를 알고 있으므로 스프링 상수 K도 산출할 수 있다.

$$\delta st=\frac{W}{K},\ K=\frac{W}{\delta st}=\frac{10lb}{0.61in}$$

$$=16.4\ lb/in$$

이제 완충포장제품을 원래 위치로 부터 2인치 아래방향까지 눌렀다고 하자. 이때 마찰이나 다른 충격은 없다고 가정하면 제품은 정확하게 ±2인치 사이에서 진동할 것이다. 진동 중 제품에 가해지는 최대 속도는,

$$V_{max}=A\sqrt{\frac{Kg}{W}}=2in\cdot\sqrt{\frac{(16.4\ lb/in)(386.4\ in/sec^2)}{10\ lb}}$$

$$=50.3inches/sec.$$

또는 식 3 · 19로부터

$V_{max}=A(2\pi fn)=2in(2\pi\cdot 4\ cycles/sec)=50.3\ in/sec$

최대 가속도는 식 3 · 20으로부터

$$a_{max}=A\left(\frac{Kg}{W}\right)=2in\cdot\left(\frac{16.4\ lb/in\cdot 386.4\ in/sec^2}{10\ lb}\right)$$
$$=1267\ in/sec^2=3.28g$$

또는 식 3 · 21로부터

$$a_{max}=A(2\pi fn)2$$
$$=2in(2\pi\ 4cycles/sec)^2$$
$$=1263\ in/sec^2$$

위의 예에서 시스템은 1초당 4 사이클로 진동하므로 제품은 움직이는 중간지점에서 최대 속도가 50 in/sec에 달하게 되며 가장 높은 지점과 가장 낮은 지점에서 최대 가속도가 3.28g가 된다.

또 다른 예를 들면 고속도로를 달리는 대형트레일러 트럭이 있다고 하자. 트럭의 몸체는 선형 스프링 무게추 시스템의 사인 곡선 운동과 거의 비슷한 진동 형태를 보인다. 트럭 몸체와 이의 하중 그리고 선형 스프링으로서의 현가장치 스프링(트럭 바퀴와 연결된 완충 스프링)을 고려해 볼 때 이 스프링은 엄밀히 말해서 선형 스프링은 아니지만 함께 움직일 때는 선형에 가깝다. 트럭이 움푹 패인 곳을 지나가거나 도로 표면이 굴곡진 곳을 지났을 때 스프링 무게추 시스템에 외력이 가해지게 된다.

만약 트레일러 하중이 20,000 lb이고 40,000 lb의 화물을 적재하였을 때 스프링이 2 inch 눌렸다면 식 3 · 11로부터 스프링 상수를 구할 수 있다.

$$K=\frac{W}{\delta st}=\frac{20,000+40,000\ lb}{2\ in}$$
$$=30,000\ lb/in$$

트럭이 움푹 패인 곳을 지났다면 트레일러는 진동하게 될텐데, 식 3 · 15로부터,

$$fn=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{Kg}{W}}=\frac{1}{2\pi}\cdot\sqrt{\frac{(30,000\ lb/in)(386.4\ in/sec^2)}{10\ lb}}$$
$$=2.2Hz$$

트레일러가 초당 2.2 사이클로 3인치 사이에서 진동한다면 우선 진폭은 3인치의 절반인 1.5인치이다. 식 3 · 21에서,

$$a_{max}=A(2\pi fn)^2$$
$$=1.5\ in(2\pi\ 2\cdot 2)2$$
$$=286.6\ in/sec^2$$

또는 $\dfrac{286.6\ in/sec^2}{386.4\ in/sec^2\cdot g}$

$$=0.74g's$$

위의 예는 오로지 트럭에 가해진 외력에 대한 것만 계산한 것이다. 트럭에 실린 포장화물에 가해지는 외력에 대한 분석은 다음호에서 자세하게 설명하도록 한다.〈계속〉

〈연습문제〉

1. 20 lb의 무게가 스프링에 가해졌을 때 자연주파수(fn)가 5Hz라고 할 때 자연주파수를 4Hz로 낮추기 위해서는 어느 정도의 무게를 더하여야 하나?
(답 11.2 lb)

2. 10 인치의 스트로크(배수 진폭을 의미함)를 가진 진동다이의 최대 가속도가 1g라고 한다면 이 다이를 진동시키는데 필요한 주파수는 얼마인가?
(답 4.4 Hz)

3. 자연 상태에서 3인치의 스프링이 12 lb 하중을 올려 놓았을 때 1인치가 눌려진다면 이 스프링의 상수는 얼마인가?
(답 12 lb/in)

4. 정적변형이 3인치일 때 스프링 무게추 시스템의 자연주파수를 구하라.
(답 1.81 Hz)

5. 자유진동스프링 무게추 시스템이 30 lb/in의 스프링 상수와 2 lb의 하중을 가졌다고 할 경우 최대 변형이 0.5 인치일 때의 최대 가속도를 구하라.
(답 2.898 in/sec^2)

6. 진폭이 1.7 인치, 스프링 상수 44 lb/in 그리고 무게가 8 lb인 자유 진동 스프링 무게추 시스템이 있다. 무게추의 최대속도와 최대가속도를 각각 in/sec와 g 단위로 산출하라.
(답 78.4 in/sec, 9.35g)