축계 비틀림 진동

한 국 어 선 협 회
검사원 심 재 문

1. 서언

내연기관의 크랭크축이나 치차축, 프로펠러축 등은 축에 많은 질량이 붙어 있으며 다질점 비틀림 진동계를 형성하고 있다. 이 축계에 가스압력 또는 프로펠러가 그의 축둘레에 있어 비대칭인 선체 반류속에서 회전하기 때문에 받는 주기력 또는 주기토크 등의 주기적인 변동토크가 작용하면 강제비틀림진동이 발생하고 진폭은 증대해져 위험하다. 따라서 이러한 축계의 진동을 다루는 경우에는 그의 고유진동수(Natural frequency of vibration) 를 구하는 것이 가장 중요하다. 이 고유진동에 같은 주기의 강제진동(Forced vibration)이 가해지면 공진(Resonance)을 일으키고 진폭은 증대해져 축내의 응력도 크게 된다. 따라서 사용운전 범위내에 그의 공진이 들어오지 않도록 충분히 검토하여 치명적인 사고를 막도록 하여야 한다.

이러한 관점에서 축계를 이해하기 위해서는 가장 기본이 되는 것이 비틀림진동이다. 따라서 본고에서 비틀림진동의 개략적인 내용을 소개하고자 한다.

2. 비틀림 진동해석 및 용어해설

그림 2-2는 2행정사이클 기관에 있어서의 크랭크 회전력선도의 일례이며 회전력은 1회전을 1사이클로 하여 변동하는 주기운동이기 때문에 이것

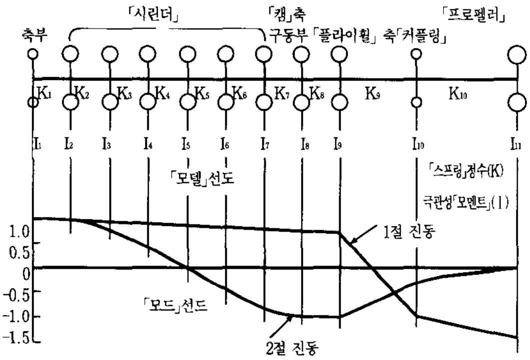


그림 2-1 비틀림진동계산 「모델」과 「모드」
(2행정「사이클」 직결 「디젤」기관 축계」

을 푸리에 급수(Fourier's series)로 전개하면 다수의 조화함수(Harmonic function)인 sin항으로 표시할 수 있다. 이것을 조화분석(Harmonic analysis)이라 하며 각 조화함수항의 진동수의 하나가 축계의 고유진동수와 일치하면 진폭은 매우 크게 되며 위험회전수(Critical revolution)를 보이게 된다. 축이 진동을 하는 경우에 진폭이 0인점(진동계에 변위가 발생하지 않는 점)을 절(Node)이라 하는데 축계의 고유진동은 축에 붙어 있는 질량의 수와 배치 및 축길이에 따라서 달라지고 진동수가 가장 작은 즉 주기가 최대로 되는 것은 절이 하나인 경우이며 이로부터 순차로 1절진동, 2절진동····[그림 2-1 참조]이라 한다. 또한 1회전 중의 진동사이클수 또는 기진회수를 진동차수라 한다. 비틀림진동은 보

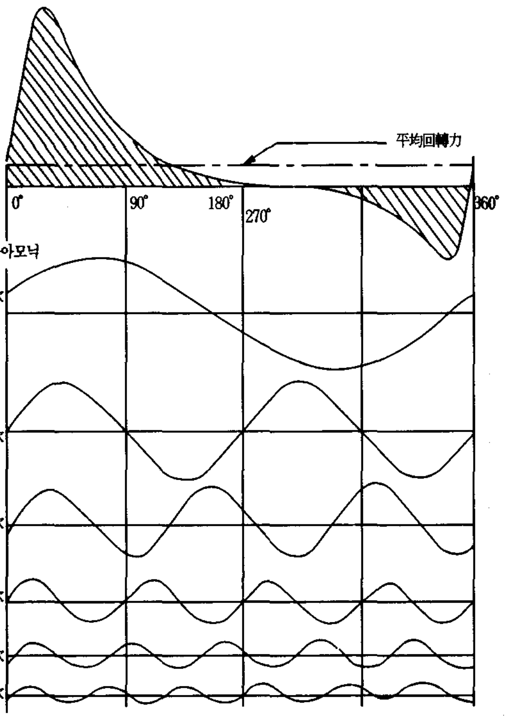
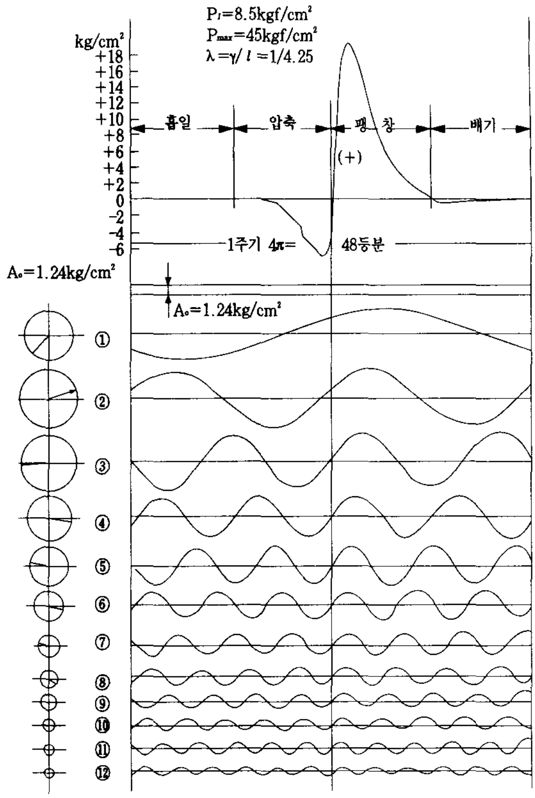


그림 2-2 2行程사이클기관에 있어서의 회전력의 하아모닉스



① $C_{1/2}$ = 2.97kg/cm²	② C_{1} = 3.43kg/cm²
③ $C_{11/2}$ = 3.26kg/cm²	④ C_{2} = 2.68kg/cm²
⑤ $C_{21/2}$ = 2.35kg/cm²	⑥ C_{3} = 1.70kg/cm²
⑦ $C_{31/2}$ = 1.37kg/cm²	⑧ C_{4} = 1.04kg/cm²
⑨ $C_{41/2}$ = 0.82kg/cm²	⑩ C_{5} = 0.63kg/cm²
⑪ $C_{51/2}$ = 0.60kg/cm²	⑫ C_{6} = 0.44kg/cm²

그림 2-3 「시린더·가스」압력 「토오크」의 조화분석

통차수와 절수를 조합하여 호칭한다.

예를 들면 그림 2-2와 같은 경우를 1절6차 진동이라 한다.

2행정 사이클 디젤기관에서는 1회전에 1회 점화폭발을 하므로 그림 2-2와 같이 1의 정수배 하모닉스로 나누어진다. 4행정 사이클 디젤기관에서는 2회전에 1회 점화폭발을 하므로 그림 2-3과 같이 1/2의 정수배 하모닉스로 나누어진다. 이러한 정수배 하모닉스의 하나와 토크의 주파수가 일치하면 공진상태가 되므로 고유진동수, 차수 및 공진회전수 사이에는 다음의 관계가 있다.

$$\frac{\text{고유진동수}}{\text{차수}} = \text{공진회전수(위험회전수)}$$

즉 4행정 사이클기관에서 크랭크축이 360rpm 할 때 2절4차의 진동이 나타났다고 하며 이 축계의 그절에 대한 고유진동수는 360×4=1440vpm (vibration per minute)로 된다. 또한 그절의 고유진동수가 1800vpm 일때 2절 4 1/2차의 회전수는 1800/4.5=400vpm이 된다.

만일(회전수×차수)가 그축의 고유진동수와 일치하는 경우, 즉 회전력의 어떤 차수의 주기가 그 축의 1절, 2절, …의 여러가지 형식의 진동 중의 어떤 고유진동수와 일치할 경우 위험회전수로 되므로 기관에 따라서는 위험회전수는 몇개라도 있

을 수 있다. 이들 많은 위험회전수 중에서 진동의 차수가 크랭크축의 1회전 중에 발생하는 회전력(폭발)의 수와 같은 위험회전수와 그의 배수를 주위험회전수(Major critical revolution)라 하고 여타의 것을 부위험회전수라 한다. 즉 고유진동수 f와 실린더수 N의 경우에 그의 주위험회전수는 4행정 사이클 기관에서 2f(N의 배수)로 되고 2행정 사이클 기관에서는 f/(N의 배수)로 된다.

예를들면 4행정 사이클 6실린더 기관에서는 3차, 6차, 9차의 위험회전수가 주위험회전수로 되고 2행정 사이클 4실린더 기관에서는 4차, 8차, 12차가 주위험회전수로 된다.

3. 고유비틀림진동

축의 고유비틀림진동은 기관의 설계에 있어 축의 안전회전을 검토하는 기초로 된다. 또한 그의 수치도 미리 계산해야 하므로 축을 스프링정수(비틀림강성계수)만을 갖는 무질점의 등근축으로 또한 축에 붙어 있는 질량은 같은 관성모멘트를 갖는 등가원판으로 바꾸어서 고유비틀림 진동을 구하는 것이 보통이다.

가. 비틀림진동의 운동방정식

1) 간단한 1자유도계(진동계를 규정하는데 필요한 독립좌표수를 자유도⟨degree of freedom⟩라 한다)의 비틀림진동을 생각해 보기로 하자.

그림 3-1에서 직경 d(mm), 길이 l(mm)의 환봉축의 일단이 고정되고 타단에는 W(kg)의 원판이 설치되어 있다.여기에 처음 어떤 비틀림각을 준 다음 놓으면 원판은 각 진동을 하게 되는데 여기에 따라서 봉자신도 비틀림진동을 되풀이 하게 된다. 이 경우의 원판의 관성모멘트 J는 회전반경이 r(mm)인 경우에 $J = Wr^2/g(kg \cdot mms^2)$로 되고 임의의 순간에 있어서의 비틀림각의 a(rad)인 경우에는 각가속도 $d^2\alpha/dt^2$에 J를 곱한 $J\,d^2\alpha/dt^2$는 축을 비틀려고 하는 원판이 갖는 토크이다.

축의 비틀림스프링정수를 k라 하고 원판이 α만

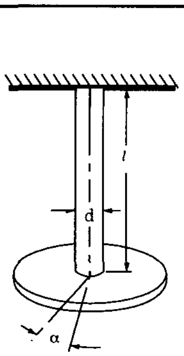


그림 3-1 1자유도계의 고유비틀림진동

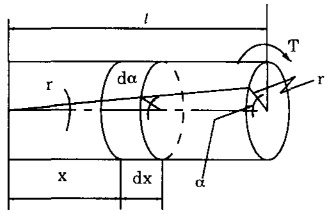


그림 3-2

큼 회전했다고 하면 축을 본래의 위치로 되돌려 보내려는 복원 토크가 발생한다. 따라서 이 원판의 운동방정식은 Newton의 운동의 제2법칙(운동량의 시간적 변화는 여기에 작용하는 힘에 비례하고 2의 방향은 같은 방향이다)에 의하여 다음과 같이 된다.

$$J\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -k\alpha \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3\text{-}1)$$

즉, 축을 비틀어서 놓아 주었을 때 회전축 주위의 불평형토크는 관성모멘트와 각 가속도와의 곱과 같다. 한편 비틀림 스프링정수 k는 그림 3-2에서 환봉축의 극단면 2차모멘트 $I_p = \pi d^4/32(mm^4/rad)$ 횡탄성계수 $G(kg/mm^2)$이라 할 때 재료 역학에 의하여 다음과 같이 계산된다.

비틀림 각 α, 축의 반경을 r이라 하면

$$\tan\gamma = \frac{r\alpha}{l} \fallingdotseq \gamma$$

Hook's Law에 의하면 비틀림응력 $\tau = G\gamma$

미소비틀림각

$$d\alpha = \frac{\gamma dx}{r} = \frac{\gamma dx}{Gr} = \frac{Tdx}{GI_p}$$

(비틀림모멘트 $T=\tau I_p/r=\tau Z_p$이므로)
결국 축 전체 길이 l에서의 비틀림각은

$$\alpha=\int_0^l \frac{Tdx}{GI_p}, \quad T와\ I_p가\ 일정하면$$

$$\alpha=\frac{T\cdot l}{GI_p}$$

그러므로 비틀림 모멘트 $T=GI_p/l\cdot\alpha$, GI_p/l를 k라 하면 $T=k\alpha$로 된다.

따라서 k를 재료의 비틀림 스프링정수라고 한다.

2) 기계에서는 그림 3-3과 같이 2개의 회전질량을 스프링정수 k되는 축으로 결합하여 회전시키는 경우가 많다.

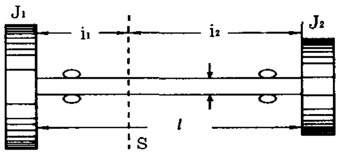


그림 3-3 2개의 회전질량을 갖는 계

지금 J_1의 회전각 변위를 α_1, J_2의 회전각변위를 α_2라 할때 J_1 원판에 작용하고 있는 토크는 축이 $(\alpha_1-\alpha_2)$만큼 비틀려 있기 때문에 $k(\alpha_1-\alpha_2)$이며 둘레의 저항을 무시하면 그의 운동방식은

$$-k(\alpha_1-\alpha_2)=J_1\frac{d^2\alpha_1}{dt^2}\ 이고$$

J_2원판에 작용하고 있는 토크는 $-k(\alpha_2-\alpha_1)$이므로

$$-k(\alpha_2-\alpha_1)=J_2\frac{d^2\alpha_2}{dt^2}\ 이다.$$

α_1, α_2는 고정하고 있는 좌표계에 대한 J_1, J_2의 회전각이며, J_1, J_2가 회전운동을 하고 있다고 하면 어떤 회전속도로 함께 회전하면서 서로 간에 앞서거나 처지거나 하므로 진동만을 생각한다면 $\alpha_1-\alpha_2$만을 고려하면 된다.

위 식에서

$$-k(\alpha_1-\alpha_2)(J_1+J_2)=J_1J_2\left(\frac{d^2\alpha_1}{dt^2}-\frac{d^2\alpha_2}{dt^2}\right)$$

상대적 비틀림각을 $\alpha_1-\alpha_2=\alpha$라 놓으면

$$-k\alpha=\frac{J_1J_2}{J_1+J_2}\frac{d^2\alpha}{dt^2}$$

$J_1J_2/(J_1+J_2)$를 J라고 놓으면 $-k\alpha=d^2\alpha/dt^2$로 되고, 이 식을 앞서 살명한 운동방정식과 같게 된다.

3) 비틀림진동의 운동방정식 $J=(d^2\alpha/dt^2)+k\alpha=0$에서 양변을 J로 나누고 $k/J=w^2$이라 하면

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2}+w^2\alpha=0$$

이 선형 미분방정식의 일반 해는 다음과 같이 된다.

$$\alpha=A\sin(wt+\varepsilon),\quad \frac{d\alpha}{dt^2}=\sqrt{J/k}$$

상식에서 A, ε은 초기조건에 의하여 결정되는 정수이다.

지금 정지의 위치를 기점으로 하여 시간과 각을 산출한다고 하면 $t=0$일 때 $\alpha=0$, 따라서 $\varepsilon=0$이 되며 $\alpha=A\sin wt$에서 A는 $\sin wt=1$일 때의 α의 값, 즉 최대비틀림각(비틀림진동은 각 진동이며 이 비틀림각의 크기를 진폭이라 한다)을 보이는 것이며 이것을 α_0라 하면 $\alpha=\alpha_0\sin wt$으로 된다.

이것은 조화진동을 나타내며 전혀 감쇠작용을 수반하지 않는 것이다. 실제에 있어서는 이것을 고려하는 것이 당연히 필요하나 복잡하게 되므로 진동수만을 계산할 때는 별영향이 없기 때문에 무시한다. 일반적으로 수학적인 형식에서는 감쇠력이 속도에 정비례한다고 보고 다루는 일이 많다. 지금 $w=\sqrt{k/J}$(rad/s)이기 때문에 원판이 1각 진동에 요하는 시간, 즉 주기 $T=2\pi\sqrt{J/k}$(s)라 하고 고유진동수 f는 다음과 같이 구해진다.

$$f=\frac{w}{2\pi}=\frac{1}{T}=\frac{1}{2\pi}\ k/J=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{G\pi d^4}{32J\,l}}(\text{vps})$$
$$=9.55w(\text{vpm})$$

〈다음호에 연재〉