

# 화재실의 열유동 해석을 위한 수치해석 방법 (2)

## (Numerical Analysis Methods of Heat Flow in Fire Compartment)

김 광 선 / 한국기술교육대학교수, 공박·손 봉 세 / 경원전문대학교수

지난호의 계속

### (2) 유한요소방법(Finite Element Method)

유한 요소방법에 있어서는 해당영역(domain)이 작은 요소로 분해되며 실험해(trial solution)가 각 요소를 나타낸다. 이러한 해는 아래와 같이 우리가 결정하려고 하는 미지 함수의 각점의 값으로 나타내어 진다.

$$\{\varphi\} = [N]\{\varphi_e\} \quad (12)$$

여기서  $\{\varphi_e\}$ 는 함수의 각점(node)에서의 값이며  $[N]$ 은 형상함수 매트릭스라 불리운다. 요소형상함수는 요소내부 및 외부에서 영(zero)이 되도록 결정되어지며 점(node)에서만 영(zero)이 아니다. 유한 요소 방식을 유도하기전에 형상함수(shape function)를 구성해 본다.

#### ① 형상함수(Shape Function)

그림 1과 같은 직사각형 요소를 고려해보면,

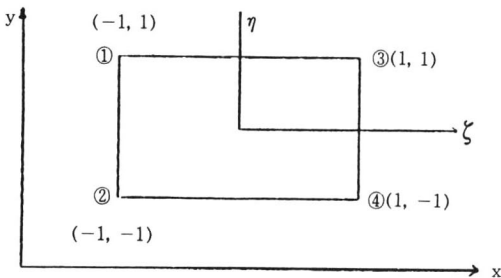


그림 1. 직사각형 요소

좌표시스템( $\xi, \eta$ )을 사용하면 직관적으로 요소내의  $\varphi$ 의 함수값이 식 (13)과 같이  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ 에 의존하는 것을 알 수 있다.

$$\varphi = \frac{1}{4} (1-\xi)(1+\eta)\varphi_1 + \frac{1}{4} (1-\xi)(1-\eta)\varphi_2 + \frac{1}{4} (1+\xi)(1-\eta)\varphi_3 + \frac{1}{4} (1+\xi)(1+\eta)\varphi_4 \quad (13)$$

따라서 형상함수는 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$N_i = \frac{1}{4} (1+\xi_i)(1+\eta_i) \quad (14)$$

여기서  $\xi_i$ 와  $\eta_i$ 는 점 1을 의미한다.

형상함수는 라그랑지안(Lagrangian) 보간법(interpolation)에 의하여 유도될 수도 있으며,  $N_i$ 는 1을 점 ( $i$ )에서 유지하고 다른 모든 점에서 영을 유지함으로써 형상함수가 된다. 더욱 편리한 요소는 삼각형의 유한요소이며 이러한 삼각형 내부에서  $\varphi$ 는 다음과 같이  $x$ 와  $y$ 의 선형함수로 취해질 수가 있다.

$$\varphi = a + bx + cy \quad (15)$$

의 값은 그림 2와 같이 삼각형의 각 노드(node)에서 얻어질 수 있다.

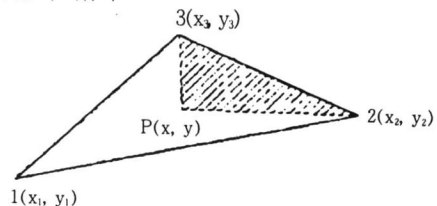


그림 2. 삼각형 유한요소

$$\varphi = L_1\varphi_1 + L_2\varphi_2 + L_3\varphi_3 \quad (16)$$

$$L_1 = \frac{x_2y_3 - x_3y_2}{2\Delta} - \frac{y_3 - y_2}{2\Delta}x + \frac{x_3 - x_2}{2\Delta}y$$

$$L_2 = \frac{x_1y_3 - y_1x_3}{2\Delta} + \frac{y_3 - y_1}{2\Delta}x + \frac{x_3 - x_1}{2\Delta}y$$

$$L_3 = \frac{x_1y_2 - y_1x_2}{2\Delta} - \frac{y_2 - y_1}{2\Delta}x + \frac{x_2 - x_1}{2\Delta}y$$

따라서,

$$L_1 = \frac{\text{면적 } p23}{\text{면적 } 123}, L_2 = \frac{\text{면적 } p13}{\text{면적 } 123}, L_3 = \frac{\text{면적 } p12}{\text{면적 } 123} \quad (17)$$

위의 식에서  $L_1, L_2, L_3$ 를 면적좌표라 하며 항상합 수는 단순히 면적좌표가 되는 것이다. 즉,

$$N_1 = L_1, N_2 = L_2, N_3 = L_3 \quad (18)$$

요소메트릭스가 평가되어질 때 삼각형에 대한 면적좌표에 의하여 정의되어지는 양의 적분이 필요하다. 같은 방식으로 3차원의 체적좌표를 정의하는데 적용된다.

### ② 미분방정식에의 적용

예를들면 Navier-Stokes 방정식에 있어서 관성항(inertial terms)을 무시할 수 있는 작은 Reynolds수를 갖는 Stokes 유체흐름을 이용해 본다. 적용되는 방정식은,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (19)$$

$$x - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (20)$$

$$y - \frac{\partial P}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (21)$$

상기식에서  $x$ 와  $y$ 는 단위 체적당 중력(body force)을 의미한다. 유체흐름 범위를 유한요소로 구하고자 하는 함수를 노드(node)값으로 나타내면

$$P = [N]\{P_N\}, u = [N]\{u_N\}, v = [N]\{v_N\} \quad (22)$$

식 (22)에서  $[N]$ 은 변수의 연속성을 보장하는 형상함수이다.

Galerkin방법을 사용하면 형상함수  $N_m$ 을 갖고 있는 요소에서 연속방정식은

$$\int_v N_m \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dV = \int_v N_m \left( \frac{\partial [N]}{\partial x} (u_N) + \frac{\partial [N]}{\partial y} (v_N) \right) dV = 0 \quad (23)$$

어떤 삼각형에서도  $N_m$ 은 식(18)에 의하여 주어지며 다른 형태의 요소에서는 달라진다. 식(18)에 의하여  $x$ 와  $y$ 에 의한 미분이 필요하다. 다른 방정식도 메트릭스 형태로 다시쓰면

$$\{\varphi_m\} = \begin{Bmatrix} U_m \\ V_m \\ P_m \end{Bmatrix}$$

$$[K]\{\varphi\} + \{F\} = 0 \quad (24)$$

이 되며 메트릭스요소  $[K_{ij}]$ 와  $\{F_i\}$ 는 같은 방정식으로 구하여진다. 면적 적분시  $\frac{\partial u}{\partial n}$ 과  $\frac{\partial v}{\partial n}$ 이 정하여질때는 단지 외각 경계선을 따라 행하여지며,  $u$ 와  $v$ 가 주어질때는 경계점에서 방정식이 형성이 안 된다.

### (3) 제어체적(Control Volume)방식

Taylor 급수는 영역에 적용되는 미분방정식이 물리학적 법칙(physical law)인 보존의 법칙이 적당하고 옳은 형태로서 받아지면서 미분에 대한 대수 근사치를 유도하기 위한 단순한 수학적 도구로 사용되어진다. 물리학적 추론이 미분방정식 유도에 일단 사용되면 그 다음에는 물리학적 추론은 일단 체제 놓는다. Taylor급수는 오히려 기계적으로 미분방정식에 적용되는 것이다. 그러나 제어체적 방법에 있어서는 물리학적 법칙과 보존의 논리가 적용되면 일반적으로 미분방정식을 유한차 하는데 적용한다. 미분방정식이 유한체적에 걸쳐서 적분이되며 이것은 마치 감자가루로부터 반죽된 감자를 준비하는 것과 같은 것이다. 예를들어 2차원의 고체내에서 상수인 열전도율을 갖고 있는 전도방정식을 고려해 본다. 역흐름 벡터는 Fourier 법칙을 통하여 온도분포와 관련이 되며 점( $i, j$ )의 제어체적의 사방경계선을 통하여 흐르는 열흐름을 평가한다.

$$-k\Delta y - \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{i-\frac{1}{2}, j} + k\Delta y \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{i+\frac{1}{2}, j} - k\Delta x \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{i, j-\frac{1}{2}} - k\Delta x \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{i, j+\frac{1}{2}} = 0 \quad (25)$$

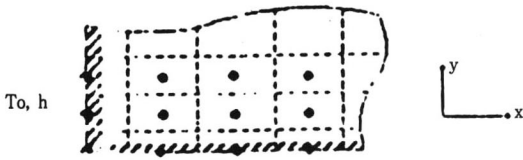


그림3. 제어체적 요소

식 (25)에서 1/2은 메쉬점 사이의 절반거리에 있는 제어체적의 경계에서의 값을 말한다. 만약 미분이 관련되는 경계에 있어서 알맞은 평균치를 나타낸다면 에너지 균형은 일치되는 것이다. 다음에는 경계에서의 제어체적을 검토하여 보면 경계조건으로 대류현상이 있으며 제어체적에 있어서의 에너지보존의 법칙은 사면경계를 지나가는 모든 전달량을 고려하며 단순한 전진차 방식과는 다르게 유도됨을 알 수 있다. 또다른 예로서 열전달, 유체흐름, 또는 다른 관련된 공정을 나타내는 일반적인 미분방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \phi) + \text{div}(\rho \vec{u} \phi) = \text{div}(\Gamma \text{ grad } \phi) + S \quad (26)$$

식(26)에서  $\Gamma$ 는 전도상수(diffusion coefficient)이고  $S$ 는 생성항(source term)이며 종속변수는 화학물질의 질량비례(mass fraction)를 나타내거나 엔탈피나 온도 속도 혹은 와류의 동적 에너지나 와류의 Length Scale 을 나타낸다.

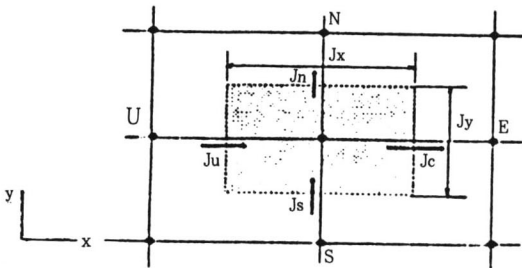


그림4. 2차원 제어체적 요소

그림 4에서의 같이 2차원의 제어체적에 적용하면 전체(전도+대류) 흐름은 다음과 같이 유도된다.

$$J_x = \rho u \phi - \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad J_y = \rho v \phi - \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

여기서  $u$ 와  $v$ 는 앞절에서와 같이  $x$ 와  $y$ 방향의 속도를 나타낸다.

제어체적에 대하여 적분을 취하면

$$\frac{(\rho_P \phi_P - \rho_P^o \phi_P^o) \Delta x \Delta y}{\Delta t} + J_e - J_w + J_n - J_s = S \Delta x \Delta y \quad (27)$$

같은 방정식으로 연속방정식  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{u}) = 0$ 를 제어체적에 걸쳐서 적분하면 다음과 같으며

$$\frac{(\rho_P - \rho_P^o) \Delta x \Delta y}{\Delta t} + F_e - F_w + F_n - F_s = 0 \quad (28)$$

여기서  $F_e, F_w, F_n, F_s$ 는 제어체적면을 통하여 흐르는 질량 흐름율을 나타낸다. 2차원의 유한차 방정식은 다음과 같이 유도된다.

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W + a_N \phi_N + a_S \phi_S + b \quad (29)$$

#### (4) 유한해석(Finite Analytic)방법

유한해석 방법의 기본 개념은 편미분 방정식의 수치해석에다 해석적해(analytic solution)를 도입한 것이다. 유한해석 방식의 기본원리를 이해하기 위하여  $L\phi = f$ 의 경우를 예로 든다.  $L$ 은 선형 혹은 비선형의 편미방의 오퍼레이터를 나타내며  $f$ 는 독립변수  $x, y, t$ 의 함수를 나타낸다. 편미방 방정식은 적당한 경계치 조건과 초기조건과 함께 해가 구하여지며 편미방 방정식이 전달미분방정식과 같이 비선형일 경우 비선형방정식이 각 요소에서 선형화 될 수 있는 것이다. 이러한 방식으로 전반적인 비선형 효과가 지역적인 해석적해의 도입으로 보존될 수 있는 것이다. Stream함수로 표시되는 비 압축성 2차원 Navier-Stokes 방정식을 예를 들면 다음과 같다.

$$\zeta_t = -\nabla \cdot (\vec{u} \zeta) + \nabla^2 \zeta / \text{Re} \quad (30)$$

$$\nabla^2 \psi = -\zeta \quad (31)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = u, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -v, \quad \zeta = |\nabla \vec{u}| = \frac{\partial v}{\partial x} -$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} \quad (32)$$

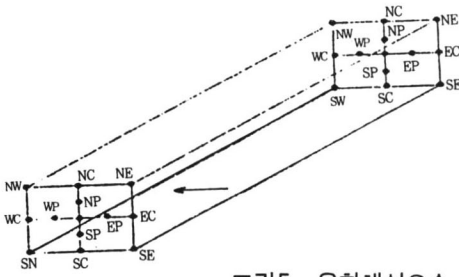


그림 5. 유한해석요소

요소에 있어서 Navier-Stokes 방정식을 선형화하기 위하여

$$U = U_p + U'; V = V_p + V', 2A = \text{Re}U_p, 2B = \text{Re}V_p \quad (33)$$

라 하고  $U_p$ 와  $V_p$ 는 점 P에 있어서 속도를 나타내며 점 P에 있어서 속도편차를  $U$ 와  $V$ 로 정의한 것이다. 일반적으로  $U'$ 와  $V'$ 는 매우 작은 양을 나타낸다. 레이놀드수에 의하여 곱하여질때는 큰양을 나타내기도 한다. 식(30)을 이러한 가정하에 다시 쓰면 다음과 같다.

$$2A \zeta_x + 2B \zeta_y - \zeta_{xx} - \zeta_{yy} = -\text{Re}(u' \zeta)_x + (v' \zeta)_y + \zeta = f \quad (34)$$

여기서  $\zeta$ 는 Vorticity를 나타내며  $f$ 는 요소에 있어서 상수로 간주되고 시간  $t$ 에서 적당한 경계조건과 식(34)로부터 단순한 해석적해가 얻어질 수 있는 것이다. 식(34)의 타원성(ellipticity)으로부터 경계치조건  $\zeta_N, \zeta_S, \zeta_W, \zeta_E$ 가 정해져야만 한다. 또한 상수와 선형함수  $(Ay - Bx)$  혹은 지수함수  $\exp(2Ax + 2By)$ 가 식(34)의  $f=0$ 인 경우를 만족하므로 이러한 함수를 다른 여러 함수중에서 식(34)의 해를 위한 자연적이고 기본적인 모드(mode)로 간주된다. 식(34)의  $f$ 항은 사실상 대류 및 시강에 의존하는 항을 포함하고 있으며 해석적해를 구할때는 상수로 취급한다. 그러면 사각형 내부의 선형화된 방정식은  $\zeta$ 의 노드값으로 해가 구해진다. 즉,

$$\zeta_p^k = \left[ \sum_{n=1}^{\infty} C_n \zeta_n^k - C_p F_p^{k-1} + \frac{C_p \text{Re} \zeta_p^{k-1}}{\Delta t} \right] / (1 + C_p \text{Re} / \Delta t) \quad (35)$$

위 식에서  $n$ 은 경계점인 EC, NE, NC 등을 나타낸다.  $\zeta_{EN}, \zeta_{WN}, \zeta_{NE}, \zeta_{SE}$ 의 값도 경계치 가정치에서 사용된 가정된 함수로부터 같은 방식으로 얻어진다. 이와같이 모든 요소를 위한 대수방정식은 적당한 경

계치조건과 같이 해가 구해지는 것이다. Vorticity함수가 일단 구하여지면 식(31)로부터 Stream 함수가 구해지는 것이다.  $2h \times 2k$  요소에 있어서 Stream 함수의 해석적해는 식(31)이 식(34)의 특별한 경우라는 사실을 이해한다면 쉽게 구해될 것이다.  $\zeta$ 를  $\psi$ 로 대체하고  $f$ 를  $\zeta$ 로 대체한 다음  $A=B=0$ 로 하면 점 P에 있어서 Stream 함수  $\psi_p$ 의 해석적 표현은 다음과 같다.

$$\psi_p = \sum_{n=1}^{\infty} C_n' \psi_n + C_p' \zeta_p \quad (36)$$

## 5. 맺음말

최근에 에너지 및 질량전달의 수치해석분야의 연구활동이 급속도로 발전하고 있는 추세에 따라 각 연구자들은 수행하고 있는 분야에서 새로운 컴퓨터 시스템 알고리즘 도입과 응용 프로그램의 적용으로 새로운 분야의 해석추구 및 컴퓨터 운용비 절감을 위하여 노력해오고 있다. 필자는 수치해석 방법으로 널리 이용되고 있는 유한차, 유한요소, 제어체적, 유한해석방법의 기본개념 및 이론에 중점을 두어 검토하였다. (FIM)

## 참고문헌

- (1) Desai, C. S., 1979, "Elementary Finite Element Method," Prentice-Hall,
- (2) Chen, C. J. and Chen, H. C., 1982, "The Finite Analytic Method," IJHR No. 232-IV, University of Iowa
- (3) Hovanessian, S. A., 1976, "Computational Mathematics in Engineering," Elsevier, 1976
- (4) Anderson, D. A. et al., 1984, "Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer," Hemisphere.
- (5) Zienkiewicz, O. C., 1971, "The Finite Element Method in Engineering Science," McGraw-Hill
- (6) Pantankar, S. V., 1980, "Numerical Heat Transfer and Fluid Flow," Hemisphere
- (7) Chen, C. J. and Chen, H. C., 1984, "Finite Analytic Numerical Method for Unsteady Two-Dimensional Navier Stokes Equations," J. of Comp Physics 53. PP 200-226