

## 가변 고장메카니즘을 가진 가속수명시험 데이터 분석방법

An Analysis Method of Accelerated Life Test Data with a Change of  
Failure Mechanism

원영철(울산대), 공명복(울산대)

Y.C. Won, M.B. Kong

### Abstract

Almost all accelerated life tests assume that no basic failure mechanism changes within the test stresses. But accelerated life test, considering failure mechanism changes, is needed since failure mechanism changes when accelerating beyond the used stress. This paper studies the analysis when the failure mechanism changes within the test stresses. The piecewise linear regression, which the join point of two lines is estimated, is applied. In particular, two accelerated life tests, with and without a change in failure mechanism, are examined.

### 1. 서 론

급속히 발전하는 산업사회에서 신제품 개발은 촉각을 다투는 일이고, 대부분의 제품들이 고신뢰도를 가지게 되었다. 이러한 제품들의 가격, 보증기간, 판매후 서비스 문제 등을 해결하기 위해 제품의 수명을 신속하고 정확하게 예측하는 것은 제품시장 경쟁에서 중요한 역할을 한다. 또한 고신뢰도를 가지는 복잡한 제품들은 반영구적인 수명을 가지

는 부품들을 요구한다. 이러한 부품들의 출현은 요구되는 기간동안에, 필요한 표본크기를 가지고, 경제성을 고려해서 부품들을 시험하는데 어려움을 발생시켰으며, 정상적인 시험으로부터 고장 데이터를 얻기위해 마냥 기다릴 수는 없다. 왜냐하면 매우 긴 기대수명 때문에 요구되는 결과가 수집되기 전에 신제품 개발로 인하여 부품들을 쓸모 없이 만들기 때문이다. 따라서 제품의 수명을 시험할 경우 제품의 수명에 영향을 주는 온도,

전압, 진동, 회전율, 부하 또는 이들의 조합 등을 사용환경보다 가혹하게하여 제품이 빠른 시간에 고장이 나도록 하는 가속수명시험이 필요하다.

지금까지 연구된 많은 가속수명시험에서는 시험 스트레스 범위 내에서 고장메카니즘이 변하지 않는다는 가정을 하였다. 이러한 가정은 분석상의 편리함은 있지만 가끔 잘못된 수명예측을 하게 된다. 왜냐하면 가속수명시험은 시험환경을 사용환경보다 가혹한 조건으로 시험하는데, 가혹한 스트레스에서는 그 제품의 고장메카니즘이 변하여 제품수명에 이상적 영향을 주어 데이터를 정상상태로 보외시킬때 수명이 이상적으로 급변하는 지점 이후의 데이터들의 영향을 받아서 과대추정하게 되기때문이다. 그러므로 고장메카니즘이 변하는 것을 고려해서 가속수명시험 데이터를 분석해야하는데, 평균수명이 급변하는 지점을 추정하여 그 지점보다 더 높은 스트레스에서 얻어진 시험데이터는 사용환경에서의 수명을 추정할 때 제외시켜야 한다. 그러나 평균수명이 급변하는 지점이 없을 경우는 모든 데이터를 사용환경에서의 수명을 추정하는데 사용해야하므로 평균수명이 급변하는 지점이 있다고 판단할 수 있는 기준은 중요한 역할을 한다. 그리고 평균수명이 급변하는 지점 이후의 데이터를 제외한 회귀직선과 모든 데이터를 사용한 회귀직선 사이의 관계를 규명하여 사용환경에서의 수명이 어떻게 추정되는지 살펴보는것은 시험대상이 되는 제품의 정확한 수명추정을 위해 필요하다. 가속 수명시험에 대한 연구들로서, 중단없는 데이터에 대하여 스트레스를 온도로 했을 경우의 가속수명시험 데이터 분석방법을 그래프

를 이용하는 분석방법[11], Least Square Estimation을 이용한 분석방법[12], 그리고 위의 두가지 방법을 비교하고 온도가 스트레스로 주어지는 경우 아레니우스 모델 타당성을 보여주었다[13]. 스트레스와 제품수명사이의 관계를 추정하기위해 센서링된 수명데이터를 분석하기 위한 그래프를 이용하는 분석방법, Least Square Estimation방법, 그리고 Maximum Likelihood Estimation방법을 소개했다[2]. 고장분포가 지수분포를 이룰때 아레니우스 모델의 모수를 추정하고 신뢰구간을 구하는 절차를 제안했다[4]. 중단없는 데이터에 대하여 가속수명시험 모델로서 역승법칙 모델을 적용한 Least Square Estimation 방법을 사용하였다[18]. 서로 다른 부품이 직렬로 연결되어 2가지 고장형태가 존재하는 경우 가속수명시험 데이터를 그래프를 이용하여 분석하였다[19]. 고장메카니즘의 변화를 고려한 가속수명시험에 대한 연구는 거의 없는데, 제품의 수명 분포가 지수분포일 때 데이터들을 임의의 두 부분으로 그룹지어 각각의 회귀직선이 두 그룹사이에 만나도록하여 고장메카니즘이 변하는 점을 추정하였다[22].

본 논문에서는 일정 스트레스 범위내에서 고장메카니즘이 변하는 경우의 시험 데이터 분석방법을 다룬다. 스트레스 수준 사이에서 고장메카니즘이 변하는 지점이 추정 될 경우도 있고, 스트레스 두 수준 사이에서 고장메카니즘이 급변하는 지점을 적절한 변화를 주어 추정해야 하는 경우도 소개된다. 또한 이때의 고장현상을 규명한다. 변화를 주어 고장메카니즘이 급변하는 지점을 추정 할 경우는 스트레스 수준사이에서 보다는 그 스트레스 수준 바로 그 곳에서 고장메카니즘이 급

변한다는 것을 알 수 있었다. 이 경우 고장 메카니즘이 급변하는 스트레스 수준들을 제외한 스트레스 수준들의 직선의 기울기가 증가하는 것을 보여줄 수 있었다. 제품의 성질에 따라 낮은 스트레스에서 고장메카니즘이 변할 수 있고 또한 매우 높은 스트레스에서만 고장메카니즘이 변하는 경우도 있다. 그래서 본 논문에서는 시험하는 스트레스 범위의 모든 수준을 고려해서 고장메카니즘이 변하는 수준을 추정하는데, 각각의 스트레스 수준 사이에서 평균수명이 급변하는 지점을 추정하여 그 중에서 알맞은 지점을 선택한 후 통계적 검정을 한다.

## 2. 문제설명 및 가정

가속수명시험에서는 수명시험을 할 때에 사용환경에서 보다 가혹한 스트레스를 부가하기 때문에 수명시험을 하는 스트레스 범위 내에서 고장메카니즘이 변하는 것을 고려해야 한다. 고장메카니즘이 변하다는 것은 고장발생시간의 분포형태는 변하지 않는다는 가정을 하고 있다. 다만 스트레스의 변화에 따라 고장형태가 변하는데, 시험데이터를 분석함으로써 고장메카니즘이 급변하는 지점을 추정하고 제품의 사용 환경에서의 수명을 예측한다. 이때, 시험하는 스트레스 범위 내에 고장메카니즘이 급변하는 지점이 있다면 그 지점은 서로 다른 고장현상을 연결시키는 점이 된다. 이 지점을 추정하는 것이 우선 중요한 문제가 되는데, 시험스트레스 수준들을 연속적인 두 그룹으로 나누면 각각의 그룹에서 다른 고장현상이 나타나야 한다. 결과적으로 나누어진 두 그룹 사이에서 제품수명이

급변하는 지점이 존재해야 한다. 그렇지만 실제로 시험을 해서 분석을 하다보면 그렇지 않은 경우도 있다. 그이유는 실험자가 통제하기 어려운 시험 환경문제로 이상적인 시험이 되지 않기 때문이다. 따라서 통계적인 검정을 필요로 한다. 여기서는 주어진 각 스트레스 수준에서 시험하는 모든 제품이 고장이 나면 시험을 종결한다.

[가정]

- ① 제품의 수명분포는 대수정규분포를 이룬다.
- ② 이 분포의 매디안은 온도의 함수로서 아레니우스 모델(Arrhenius Model)에 의해 표현된다.
- ③ 이 분포의 로그분산은  $\sigma^2$ 로 일정하다.

## 3. 기호설명

이 절에서는 본 논문에서 표현상의 편의를 위해 사용한 기호를 설명한다.

$V_i$  :  $i$ 번째 스트레스(절대온도) 수준

$x_i$  :  $1/V_i$

$T_i$  :  $x_i$ 에서의 고장시간

$Y_i$  :  $\ln T_i$

$s$  : 고장메카니즘이 변하는 지점

SSE :  $(x_1, x_2, \dots, x_n), (x_{n+1}, \dots, x_N)$ 의  
간차 제곱합( $s$ 가 사이에 있을때)

SSE' :  $(x_1, x_2, \dots, x_n), (x_{n+1}, \dots, x_N)$ 의  
간차 제곱합( $s$ 가 경계에 있을때)

$\beta_{10}, \beta_{11}$  :  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 에서의 회귀직선  
모수

$\beta_{20}, \beta_{21}$  :  $(x_{n+1}, \dots, x_N)$ 에서의 회귀직선  
모수

$b_{10}, b_{11} : \beta_{10}, \beta_{11}$ 의 추정값

$b_{20}, b_{21} : \beta_{20}, \beta_{21}$ 의 추정값

$b_{10}^*, b_{11}^* : s$ 가 경계에 있을때  $\beta_{10}, \beta_{11}$ 의 추정값

$b_{20}^*, b_{21}^* : s$ 가 경계에 있을때  $\beta_{20}, \beta_{21}$ 의 추정값

$\lambda :$  라그랑쥐 승수

$$Y_{.1} : \sum_{i=1}^n Y_i \quad Y_{.2} : \sum_{i=1+n}^N Y_i$$

$$x_{.1} : \sum_{i=1}^n x_i \quad x_{.2} : \sum_{i=1+n}^N x_i$$

$$x_{.1}Y_{.1} : \sum_{i=1}^n x_i Y_i \quad x_{.2}Y_{.2} : \sum_{i=1+n}^N x_i Y_i$$

$$x_{.1}^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 \quad x_{.2}^2 = \sum_{i=1+n}^N x_i^2$$

$$A : \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_1)^2} \quad A' : \frac{\sum_{i=n+1}^N x_i^2}{(N-n) \sum_{i=n+1}^N (x_i - \bar{x}_2)^2}$$

$$B : \frac{-\bar{x}_1}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_1)^2} \quad B' : \frac{-\bar{x}_2}{\sum_{i=n+1}^N (x_i - \bar{x}_2)^2}$$

$$C : \frac{1}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_1)^2} \quad C' : \frac{1}{\sum_{i=n+1}^N (x_i - \bar{x}_2)^2}$$

#### 4. 모형 및 모수의 추정

고장시간을 아레니우스 모델(Arrhenius Model)에 적용하여 적어보면 다음과 같고,

$$T = \exp(\gamma - \delta / V) \quad (4-1)$$

양변에 로그를 취하면 다음과 같이 된다.

$$\ln T = \gamma - \delta / V \quad (4-2)$$

만약 고장시간 T가 대수정규분포이면  $\ln T$

는 정규분포가 된다. 따라서 T의 메디안고장시간은 스트레스(절대온도)의 역수인  $1/V$ 과 선형관계가 된다. 편의를 위해  $\ln T = Y, 1/V = x, \gamma = \beta_0, -\delta = \beta_1$ 라 놓으면 다음과 같다.

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x + \epsilon \quad (4-3)$$

여기서,  $\epsilon$ 는 오차항이다.

N개의 가속요소,  $\{x_i\}, i = 1, 2, \dots, N,$ 에서 행하는 수명시험의 결과에 기초해서 주어지는 모델의 모수를 추정하여 고장메카니즘이 변하는 지점을 찾을 수 있다. 그리고  $x_i$ 에서 시험한 제품의 수명분포는

$$f(t) = \frac{1}{t\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\ln t - Y_i)^2}{2\sigma^2}\right] \quad (4-4)$$

$$, 0 < t, 0 < \sigma, 0 < Y_1 < \infty$$

이다.

그런데 이 시험에서 고장메카니즘이 변하는 지점이 존재하면 그 지점을 기점으로 서로 다른 두개의 회귀모형으로 표현 해서 시험데이터를 분석해야 한다. 스트레스 수준이  $s$ 라면 식 (4-3)을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$Y_1 = \beta_{10} + \beta_{11}x_1 + \epsilon_1, 0 < x_1 \leq s \\ = \beta_{20} + \beta_{21}x_1 + \epsilon_1, x_1 \geq s \quad (4-5)$$

그리고 고장현상이 변하는 지점에서 두 회귀직선이 만나야 하므로 다음과 같은 식이 성립한다.

$$\beta_{10} + \beta_{11}s = \beta_{20} + \beta_{21}s \quad (4-6)$$

또한 스트레스 수준  $s$ 가 두 그룹사이에 존재해야하기 때문에 다음과 같은 조건이 추가되어야 한다.

$$x_n \leq s \leq x_{n+1} \quad (4-7)$$

위 조건들을 만족하면서 잔차제곱합이 최소가 되게하는 모수들을 추정하기 위해 다음

과 같은 최소화 모형을 세울 수 있다.

$$\begin{aligned} \text{Minimize } & \left[ \sum_{i=1}^n (Y_i - \beta_{10} - \beta_{11}x_i)^2 \right. \\ & \left. + \sum_{i=n+1}^N (Y_i - \beta_{20} - \beta_{21}x_i)^2 \right] \\ \text{s.t } & \beta_{10} + \beta_{1n}s - \beta_{20} - \beta_{2n}s = 0 \\ & x_n \leq s \leq x_{n+1} \end{aligned} \quad (4-8)$$

위 비선형 문제를 해결하는 것은 쉽지 않기 때문에 두번째 제약조건을 일단은 무시하고 위의 비선형문제를 푼다. 이경우 다음과 같은 두가지 경우가 있을 수 있다. 첫째,  $s$ 가 (4-8)의 두번째 제약조건을 만족하는 경우, 이때는 주어진 해가 비선형문제 (4-8)의 해가된다. 다음으로  $s$ 가 (4-8)의 두번째 제약식을 만족하지 않는 경우, 이때는 (4-8)의 비선형 문제에 대한 해가  $s=x_n$  혹은  $s=x_{n+1}$ 이 된다. 두가지 경우에 대한 이유는 다음과 같다. 최적해의 필요조건을 구하기 위해 다음과 같이 라그랑주 방법을 쓴다.

$$\begin{aligned} L = & \left[ \sum_{i=1}^n (Y_i - \beta_{10} - \beta_{11}x_i)^2 \right. \\ & \left. + \sum_{i=n+1}^N (Y_i - \beta_{20} - \beta_{21}x_i)^2 \right] \\ & + \lambda(\beta_{20} + \beta_{2n}s - \beta_{10} - \beta_{1n}s) \end{aligned} \quad (4-9)$$

그리고 위 조건을 만족하는 필요조건은 다음과 같다.

$$\frac{\partial L}{\partial \beta_{10}} = -2 \sum_{i=1}^n (Y_i - \beta_{10} - \beta_{11}x_i) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \beta_{11}} = -2 \sum_{i=1}^n x_i (Y_i - \beta_{10} - \beta_{11}x_i) - s\lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \beta_{20}} = -2 \sum_{i=n+1}^N (Y_i - \beta_{20} - \beta_{21}x_i) + \lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \beta_{21}} = -2 \sum_{i=n+1}^N x_i (Y_i - \beta_{20} - \beta_{21}x_i) + s\lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = s(\beta_{21} - \beta_{11}) - \beta_{20} - \beta_{10} = 0 \quad (4-10)$$

위의 (4-10)을 풀면 해는 다음과 같다.

$$b_{11}^* = \frac{Y_{.1} + Y_{.2} - G - H - I'(x_{.1}Y_{.1} + x_{.2}Y_{.2} - J)}{x_{.1} + K - M'(x_{.1}^2 + V)}$$

$$b_{10}^* = \frac{sY_{.1} - x_{.1}Y_{.1}}{ns - x_{.1}} + \frac{x_{.1}^2 - sx_{.1}}{ns - x_{.1}} + b_{11}^*$$

$$b_{21}^* = \frac{Y_{.1} + Y_{.2} - G - H - I'(x_{.1}Y_{.1} + x_{.2}Y_{.2} - J)}{x_{.2} + K' - M'(x_{.2}^2 + V)}$$

$$b_{20}^* = \frac{sY_{.1} - x_{.1}Y_{.1}}{s(N-n) - x_{.2}} + \frac{x_{.1}^2 - sx_{.1}}{s(N-n) - x_{.1}} - b_{21}^* \quad (4-11)$$

여기서,

$$G = \frac{(N-n)(sY_{.1} - x_{.1}Y_{.1})}{s(N-n) - x_{.2}}$$

$$H = \frac{n(sY_{.1} - x_{.1}Y_{.1})}{ns - x_{.1}}$$

$$I = \frac{n(x_{.1}^2 - sx_{.1}) + x_{.1}(ns - x_{.1})}{x_{.1}(x_{.1}^2 - sx_{.1}) + x_{.1}^2(ns - x_{.1})}$$

$$I' = \frac{(N-n)(x_{.2}^2 - sx_{.2}) + x_{.2}\{s(N-n) - x_{.2}\}}{x_{.2}(x_{.2}^2 - sx_{.2}) + x_{.2}^2\{s(N-n) - x_{.2}\}}$$

$$J = \frac{x_{.2}(sY_{.1} - x_{.1}Y_{.1}) + x_{.1}(sY_{.1} - x_{.1}Y_{.1})}{s(N-n) - x_{.2}} + \frac{x_{.1}(sY_{.1} - x_{.1}Y_{.1})}{ns - x_{.1}}$$

$$K = \frac{n(x_{.1}^2 - sx_{.1})}{ns - x_{.1}}$$

$$K' = \frac{(N-n)(x_{.2}^2 - sx_{.2})}{(N-n)s - x_{.2}}$$

$$M = \frac{n(x_{.1}^2 - sx_{.1}) + x_{.1}(sn - x_{.1})}{x_{.1}(x_{.1}^2 - sx_{.1}) + x_{.1}^2(sn - x_{.1})}$$

$$M' = \frac{(N-n)(x_{.2}^2 - sx_{.2}) + x_{.2}\{s(N-n) - x_{.2}\}}{x_{.2}(x_{.2}^2 - sx_{.2}) + x_{.2}^2\{s(N-n) - x_{.2}\}}$$

$$U = \frac{x_{.1}(x_{.1}^2 - sx_{.1})}{sn - x_{.1}}$$

$$U' = \frac{x_{.2}(x_{.2}^2 - sx_{.2})}{s(N-n) - x_{.2}} \quad (4-12)$$

또한 s의 추정치는 다음과 같고,

$$s^* = \frac{b_{10}^* - b_{20}^*}{b_{21}^* - b_{11}^*} \quad (4-13)$$

아래식에서 처럼 SSE는 s의 이차함수가 되며 중근을 가지게 된다.

$$SSE^* = SSE^* + \frac{(\beta_{10} + \beta_{20})^2 + 2(\beta_{10} + \beta_{20})(\beta_{11} + \beta_{21})s + (\beta_{11} + \beta_{21})^2 s^2}{A + A' + 2(B + B') + (C + C')s^2} \quad (4-14)$$

여기서 s가 (4-8)의 두번째 제약식을 만족하면 위식의 오른쪽에 더해준 식이 영이 되며, s가 (4-8)의 두번째 제약식을 만족하지 않을 경우 오른쪽에 더해준 식이 최소가 되는 s는 다음과 같으며,

$$s = \frac{(b_{10} - b_{20})(C + C') - (b_{11} - b_{21})(A + A')}{2\{(b_{11} - b_{12})(B + B') - (b_{10} - b_{11})(b_{11} - b_{21})(C - C')\}} \quad (4-15)$$

이때 다음 식이 성립한다.

$$2(b_{10} - b_{20})(b_{11} - b_{21})(A + A') - (b_{10} - b_{20})^2(B + B') -$$

$$\frac{(b_{11} - b_{21})^2(A + A') - (b_{10} - b_{20})^2(C + C')^2}{2\{(b_{11} - b_{21})^2(B + B') - (b_{10} - b_{20})(b_{11} - b_{21})(C - C')\}} = 0 \quad (4-16)$$

SSE와 s의 관계를 3가지로 나눌 수 있는데, 1) s가 두 그룹 사이에 존재 할 경우 2) s가 두 그룹 사이의 왼쪽에 존재 할 경우 3) s가 두 그룹 사이보다 오른쪽에 존재하는 경우이다. 1)의 경우는 s가 (4-8)의 두번째 제약조건을 만족하는 경우가 되고, 2), 3)의 경우는 s가 (4-8)의 두번째 제약조건을 만족하지 않는 경우이다. 이같은 s와 SSE의 관계를 그림 4.1로 나타낼 수 있다.

첫번째의 경우는 가장 간단한 경우로 SSE를 최소화 하는 s가 두 스트레스 수준 사이( $x_n$ 와  $x_{n+1}$ 사이)에 존재하는 경우로서, 두 회귀직선이 만나는 지점 s가 두 스트레스 수준 사이( $x_n$ 와  $x_{n+1}$ 사이)에 있게된다. 두번째와 세번째의 경우 SSE를 최소화 하는 s가 두 스트레스 수준 사이( $x_n$ 와  $x_{n+1}$ 사이)에 존재하지 않는 경우로 두 회귀직선이 만나는 지점 s가 두 스트레스 수준 사이( $x_n$ 와  $x_{n+1}$ 사이)에서 존재하지 않을 때이다. 여기서 중요한 사항은 두 스트레스 수준 사이에서 s가 존재하지 않을 때는, 위 그림에서 보는것 처럼 (4-8)의 두번째 제약조건에 속하게하는 s는 경계가 되는 바로 두 스트레스 수준 중 한군데가 된다는 것을 알수 있다. 왜냐하면 그 두 스트레스 수준 사이( $x_n$ 와  $x_{n+1}$ 사이)에 s가 존재하지 않는다는 것은 다른 스트레스 수준 사이에 s가 있는 것이다. 따라서 그 지점 s가 실제로는 SSE가 유일하게 최소가 되는 지점이기 때문이다. 그림 4.1에서 보이는것 처럼 그 지점 s를 기준으로 해서 SSE가 양쪽방향으로

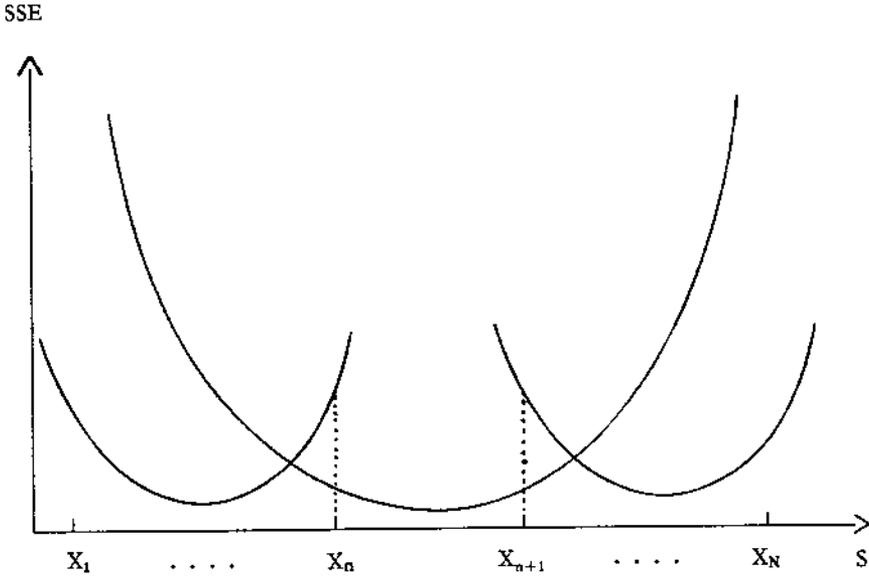


그림 4.1 s의 함수로서 잔차제곱합

동시에 증가하므로 그점에 가까울 수록 SSE가 작다. 그러므로 두 그룹으로 나누는데 위의 2)와 3)의 경우에 두 스트레스 수준 사이 (\$x\_n\$와 \$x\_{n+1}\$사이)에 \$s\$가 존재하도록 할 때에 SSE가 최소가 되는지점을 찾을 필요가 없다. 즉, 이때에는 바로 그 경계에 맞추면 된다. 그러므로 \$s\$는 두 그룹사이 혹은 경계가 되는 지점에 존재한다.

그러면 위 세가지 경우의 모수를 추정할때, 1) \$s\$가 두 그룹 사이에서 존재 할 경우는 다음과 같다.

$$b_{11} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_1)(Y_i - \bar{Y}_1)}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_1)^2}$$

$$b_{10} = \bar{Y}_1 - b_{11}\bar{x}_1$$

$$b_{21} = \frac{\sum_{i=n+1}^N (x_i - \bar{x}_2)(Y_i - \bar{Y}_2)}{\sum_{i=n+1}^N (x_i - \bar{x}_2)^2}$$

$$b_{20} = \bar{Y}_2 - b_{21}\bar{x}_2 \tag{4-17}$$

$$s^* = \frac{b_{10} - b_{20}}{b_{21} - b_{11}} \tag{4-18}$$

위에서 알 수 있듯이 이때는 전체의 모수가 두 부분 각각의 모수를 추정하는 것과 같은 결과를 얻는다.

2)의 경우인, \$s\$가 두 그룹의 왼쪽에 (\$s < x\_n\$) 존재 할 경우 모수를 추정하는 절차는 식 (4-9), (4-10)에서와 같고, 결과는 다음과 같다.

$$b_{11}^* = \frac{Y_{.1} + Y_{.2} - G - H - I(x_{.1}Y_{.1} + x_{.2}Y_{.2} - J)}{x_{.1} + K - M'(x_{.1}^2 + V)}$$

$$b_{10}^* = \frac{x_n Y_{.1} - x_{.1} Y_{.1}}{x_{.1} n - x_{.1}} + \frac{x_{.1}^2 - x_n x_{.1}}{x_{.1} n - x_{.1}} b_{11}^*$$

$$b_{21}^* = \frac{Y_{.1} + Y_{.2} - G - H - I(x_{.1}Y_{.1} + x_{.2}Y_{.2} - J)}{x_{.2} + K' - M'(x_{.2}^2 + V')}$$

$$b_{20}^* = \frac{x_n Y_{.1} - x_{.1} Y_{.1}}{x_n(N-n) - x_{.2}} + \frac{x_{.1}^2 - x_n x_{.2}}{x_n(N-n) - x_{.1}} b_{21}^* \quad (4-19)$$

여기서,

$$\begin{aligned} G &= \frac{(N-n)(x_n Y_{.1} - x_{.1} Y_{.1})}{x_n(N-n) - x_{.2}} \\ H &= \frac{n(x_n Y_{.1} - x_{.1} Y_{.1})}{n x_n - x_{.1}} \\ I &= \frac{n(x_{.1}^2 - x_n x_{.1}) + x_{.1}(n x_n - x_{.1})}{x_{.1}(x_{.1}^2 - x_n x_{.1}) + x_{.1}^2(x_n - x_{.1})} \\ I' &= \frac{(N-n)(x_{.2}^2 - x_n x_{.2}) + x_{.2}\{x_n(N-n) - x_{.2}\}}{x_{.2}(x_{.2}^2 - x_n x_{.2}) + x_{.2}^2\{x_n(N-n) - x_{.2}\}} \\ J &= \frac{x_{.2}(x_n Y_{.1} - x_{.2} Y_{.2})}{x_n(N-n) - x_{.2}} + \frac{x_{.1}(x_n Y_{.1} - x_{.1} Y_{.1})}{n x_n - x_{.1}} \\ K &= \frac{n(x_{.1}^2 - x_n x_{.1})}{n x_n - x_{.1}} \\ K' &= \frac{(N-n)(x_{.2}^2 - x_n x_{.2})}{(N-n)x_n - x_{.2}} \\ M &= \frac{n(x_{.1}^2 - x_n x_{.1}) + x_{.1}(x_n - x_{.1})}{x_{.1}(x_{.1}^2 - x_n x_{.1}) + (x_{.1}^2 x_n - x_{.1})} \\ M' &= \frac{(N-n)(x_{.2}^2 - x_n x_{.2}) + x_{.2}\{x_n(N-n) - x_{.2}\}}{x_{.2}(x_{.2}^2 - x_n x_{.2}) + x_{.2}^2\{x_n(N-n) - x_{.2}\}} \\ U &= \frac{x_{.1}(P - x_n x_{.1})}{x_n n - x_{.1}}, \quad U' = \frac{x_{.2}(x_{.2}^2 - x_n x_{.1})}{x_n(N-n) - x_{.2}} \quad (4-20) \end{aligned}$$

그리고

$$\begin{aligned} s^* &= \frac{b_{10}^* - b_{20}^*}{b_{21}^* - b_{11}^*} \\ &= x_n \quad (4-21) \end{aligned}$$

처럼된다.

여기서 1)의 경우와 2)의 경우에 추정한 모수들을 서로 비교해보면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \text{left} &= \frac{\beta_{10} - \beta_{20} + (\beta_{11} + \beta_{21})s}{A + A' + 2(B + B')s + (C + C')s^2} \\ b_{10}^* &= b_{10} - \text{left} (A + Bs) \\ b_{11}^* &= b_{11} - \text{left} (B + Cs) \\ b_{20}^* &= b_{20} - \text{left} (A' + B's) \\ b_{21}^* &= b_{21} - \text{left} (B' + C's) \quad (4-22) \end{aligned}$$

마지막으로 3)의 경우는 s가 두 그룹사이 보다 오른쪽 ( $s > x_{n+1}$ ) 에 있을때인데, 이때는  $x_n$ 대신에  $x_{n+1}$ 를 고려하면 두번째의 경우와 동일하다. 이때는  $s = x_{n+1}$  이 된다.

### 5. 사용 조건에서의 수명추정

가속수명시험 데이터를 분석하는 최종 목적은 제품의 사용조건에서의 수명이 얼마나 되는가를 예측하는 것이다. 따라서 먼저 고장메카니즘의 변화를 고려했을 경우와 고려하지 않았을 경우를 서로 비교해서 사용조건에서의 수명에 어떤 영향을 주는지 살펴볼 필요가 있다. s가 두 그룹사이에서 만날때, 만약 고장메카니즘의 변화를 고려하지 않으면 높은 스트레스에서 고장메카니즘이 변하는 것을 고려하지 못하게 되어 과대추정 하게 된다. 이것은 s 보다 높은 스트레스를 제외시켰을때의 직선의 기울기 보다 제외시키지 않았을때의 기울기가 크게 되는 점을 미루어 알 수 있다. 또한 s가 경계에서 만날 경우 어떻게 변하는지를 알아 보면, s 보다 높은 스트레스는 제품의 고장메카니즘을 변화 시키기 때문에 s보다 높은 스트레스 수준에서 얻은 데이터를 제외시켜 추정한  $b_{11}^*$ 와  $b_{21}$ 를 비

교해 보면 다음과 같다.

$$b_{11}^* = b_{11} \frac{\{(\beta_{10} + \beta_{20}) - (\beta_{11} + \beta_{21})s\} (B + Cs)}{A + A + 2(B + B')s + (C + C')s^2} \quad (5-1)$$

위 식을 분석해 보면,

$$(\beta_{10} + \beta_{20}) - (\beta_{11} + \beta_{21})s = (\beta_{10} + \beta_{11}s) - (\beta_{20} + \beta_{21}s) \geq 0 \quad (5-2)$$

처럼 되는 것은 당연하다. 왜냐하면 이것이 바로 낮은 스트레스에서의 평균고장시간과 높은 스트레스에서의 평균고장시간의 차를 나타내기 때문이다. 그리고 분자의 나머지 식은 다음과 같이  $s$ 가  $\bar{x}_1$ 보다 큰 범위에서 양수가 된다.

$$B + Cs = \frac{-\bar{x}_1 + s}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_1)^2} \quad (5-3)$$

그리고 분모의 경우도 아래와 같이 되어 양수가 된다.

$$\begin{aligned} \text{분모} &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 - 2ns\bar{x}_1 + ns^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_1)^2} \\ &+ \frac{\sum_{i=n+1}^N x_i^2 (N-n)s\bar{x}_2 + (N-n)s^2}{\sum_{i=n+1}^N (x_i - \bar{x}_2)^2} \\ &= \frac{n[s^2 - 2s\bar{x}_1] + \sum_{i=1}^n (x_i)^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_1)^2} \\ &+ \frac{(N-n)[s^2 - 2s\bar{x}_2] + \sum_{i=n+1}^N (x_i)^2}{\sum_{i=n+1}^N (x_i - \bar{x}_2)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{n(s - \bar{x}_1)^2 + \sum_{i=1}^n (x_i)^2 - n(\bar{x}_1)^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_1)^2} \\ &+ \frac{(N-n)(s - \bar{x}_2)^2 + \sum_{i=n+1}^N (x_i)^2 - (N+n)(\bar{x}_2)^2}{\sum_{i=n+1}^N (x_i - \bar{x}_2)^2} \\ &= \frac{n(s - \bar{x}_1)^2 + \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_1)^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_1)^2} + \frac{(s - \bar{x}_2)^2 + \sum_{i=n+1}^N (x_i - \bar{x}_2)^2}{\sum_{i=n+1}^N (x_i - \bar{x}_2)^2} \end{aligned}$$

따라서 변형시킨 경우에 기울기가 더 급해 진다는 것을 알 수 있다. 이것은 실험자가 고려하는 스트레스와 더불어 고려하지 못하는 환경적인 영향을 받아 이상적인 시험을 하지 못한 것에 대한 결과라고 할 수 있다.

또 고려해야 되는 중요한 사항은  $s^*$ 를 추정 했을때 그것들이 정말 고장메카니즘이 변하는 지점인지 판단하는 기준이 있어야 한다는 것이다. 여기서는 그 기준을 통계적 검정으로 정한다.

검정절차를 보면 다음과 같다. 먼저 두 직선의 기대값은 아래와 같고,

$$E(Y_{1i}) = b_{10} + b_{11}x_{1i}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$E(Y_{2i}) = b_{20} + b_{21}x_{2i}, \quad i = n+1, \dots, N$$

$$H_0 : b_{10} = b_{20}, b_{11} = b_{21}$$

$$H_1 : \text{not } H_0 \text{ 라고 했을때,}$$

검정 통계량은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} F^* &= \frac{\left\{ \frac{SSE(x_{1i}) - SSE(x_{2i})}{(n-2) - (N-n-2)} \right\}}{\left\{ \frac{SSE(x_{2i})}{N-n-2} \right\}} \\ &= \frac{\left\{ \frac{SSR(x_{2i} | x_{1i})}{2n-N} \right\}}{\left\{ \frac{SSE(x_{2i})}{N-n-2} \right\}} \quad (5-4) \end{aligned}$$

만약,  $F^* \leq F(1-\alpha; 2n-N, N-n-2)$  이면  $(1-\alpha)\%$ 의 확률로  $H_0$ 를 기각 할 수 없고,  $s^*$ 를 구한다 하더라도 고장메카니즘이 변하는 지점이 있다고 할 수 없다. 그렇지만,  $F^* > F(1-\alpha; 2n-N, N-n-2)$  라면  $(1-\alpha)\%$ 의 확률로  $H_0$ 를 채택 할 수 없다. 그래서 고장 메카니즘이 변하는 지점이  $s^*$ 가 되기 때문에 그것 보다 높은 스트레스 수준에서 얻어진 데이터들은 사용조건에서의 수명을 추정할 때 제외시켜야 한다.

6. 예제

어떤 제품의 사용 환경은 150 °C 이고, 그 조건에서 40,000 시간의 수명을 가진다고 하고, 가속조건 160 °C, 190 °C, 220 °C, 240 °C, 270 °C, 300 °C 에서 각각 3 개의 제품이 모두 고장이 나면 시험을 종결하는 가속수명시험을 하여 얻어진 데이터는 표 6.1과 같다.

표 6.1 고장시간 데이터

단위 : 시간

160°C	190°C	220°C	240°C	270°C	300°C
16853	8630	2594	1040	327	127
27040	8690	2600	1042	329	127
27227	8750	2606	1045	331	128

위 고장시간 데이터가 대수정규분포를 이룬다는 가정과, 아레니우스 모델을 적용하기 위해 편의상 온도를 1000/절대온도로 표시하고 고장시간은 밀이 10인 로그를 취하여 정리하면 표 6.2와 같다.

고장메카니즘 변하는 지점을 찾기위해 위 어느 스트레스 수준 사이에  $s$ 가 존재한다고

표 6.2 로그수명 데이터

2.039( $x_1$ )	2.159( $x_2$ )	2.028( $x_3$ )	1.949( $x_4$ )	1.842( $x_5$ )	1.754( $x_6$ )
4.429	3.936	3.414	3.017	2.514	2.103
4.432	3.939	3.415	3.018	2.517	2.105
4.435	3.942	3.416	3.019	2.520	2.107

가정하고  $s$ 를 기준으로 두 그룹으로 나누어 분석하여 SSE 혹은 SSE'를 구한다. 이런 과정을 모든 스트레스 범위 ( $x_1, \dots, x_6$ )에서 반복하여 SSE 혹은 SSE' 중 최소가 되는 두 그룹 사이에  $s^*$ 가 존재한다고 판단한다. 예를들면  $x_3$ 와  $x_4$  사이에  $s$ 가 존재한다고 가정하면  $x_1, x_2, x_3$ 가 그룹을 이루고  $x_4, x_5, x_6$ 이 나머지 그룹을 이룬다. 여기서 각 그룹은 최소한 두개이상의 데이터가 있어야 분석할 만 하다. 분석결과  $x_4$ 와  $x_5$  사이에  $s$ 가 존재한다고 가정을 해서 두 그룹의 회귀직선을 연결해 보면  $x_3$ 과  $x_4$  사이에서 만난다. 이런 경우 가까운  $x_4$ 에  $s$ 가 존재할 때 SSE가 최소값을 가지며  $A=19.989, A'=278.451, B=-9.427, B'=-154.787, C=4.466, C'=86.088, \beta_{10}-\beta_{20}=1.59, \beta_{11}-\beta_{21}=-0.789$ 가 된다. 주어진 데이터들을 분석한 후 필요한 정보를 요약하면 표 6.3과 같다.

표 6.3에서 알 수 있듯이  $s^*=2.098$ 이다. 그리고 이때 사용조건인 150 °C에서의 수명은 41,110 시간이 된다. 그런데 한가지 고려해야 할 중요한 사항은 수명시험을 할 때  $s$ 가 모두 그룹으로 나누는 스트레스 수준 바로 그 경계에 있을 경우가 있다는 것이다. 이때는 각 SSE들중 최소가 되는  $s$ 를  $s^*$ 로 선택해야 한다.

표 6.3 분석 결과

s의 범위	Y <sub>1</sub>	Y <sub>2</sub>	s	SSE(SSE')
x <sub>2</sub> (s(x <sub>3</sub> ))	-3.157 + 3.287x <sub>1</sub>	-6.26 + 4.766x <sub>2</sub>	2.098	0.000822
s = x <sub>3</sub>	-4.015 + 3.666x <sub>1</sub>	-6.378 + 4.831x <sub>2</sub>	2.028	0.006408
s = x <sub>4</sub>	-4.554 + 4.303x <sub>1</sub>	-6.632 + 4.976x <sub>2</sub>	1.949	5.752321

마지막으로 위와 같은 방법으로 구한 s가 고장메카니즘이 변하는 지점이라고 판단하기 위한 통계적 검정을 한다. 이때 통계량은 다음과 같이 구한다.

$$F^* = \frac{\left( \frac{SSE(x_{2j}) - SSE(x_{1j})}{(N-n-2) - (n-2)} \right)}{\left( \frac{SSE(x_{1j})}{n-2} \right)}$$

$$= \frac{\left( \frac{0.00078 - 0.000042}{6} \right)}{\left( \frac{0.000042}{4} \right)}$$

$$= 11.714$$

위의 값은 F(0.95 ; 6, 4) = 6.26 보다 크기 때문에 95 % 의 확률로 s\* 가 고장메카니즘이 변하는 지점이라고 말할 수 있다.

7. 결론

제품의 수명을 빠른 시간 내에 예측해야 하는 경우 가속수명시험을 해야한다. 본 논문은 고장메카니즘이 변하는 것을 고려해서 가속수명시험 데이터를 분석하는 방법을 다루었다. 이때 고장메카니즘이 변하는 지점이 간단하게 예측되는 경우도 있지만 조건에 맞도록 변형시켜 예측해야하는 경우도 있었다. 각각의 경우 그 모델들의 모수를 비교하여 보았으며, 제약조건에 맞추어야 하는 경우는

그렇지 않을때 보다 기울기가 증가하는 것을 확인 할 수 있었다. 이 차이는 시험 할 때에 실험자가 통제할수 없는 환경의 영향때문에 발생한다.

또한 지금까지는 고장메카니즘이 변하는 지점을 예측한다 하더라도 그 지점에서 어느 정도 고장메카니즘이 변하는지 결정하는 방법이 없었다. 본 논문은 고장메카니즘이 변하는 지점을 예측한 후 통계적 검정을 한다.

사용환경보다 가혹한 조건에서는 제품의 고장메카니즘이 변하기 때문에 그런상황을 고려하지 않는다면, 고장메카니즘이 급변하는 스트레스의 영향을 받아 사용환경에서의 수명을 예측할 때 과대추정하게 된다.

참 고 문 헌

[1] Chang, D. S. "Analysis of Accelerated Degradation Data in a Two-Way Design", *Reliability Engineering and System Safety*, Vol.39, pp.65-69, 1993.

[2] Gerald, J. H. & Nelson, W. "A Comparison of Methods for Analyzing censored Life Data to Estimate Relationships Between Stress and Product Life," *IEEE Transactions on Reliability*, Vol.R-23, No.1, pp.2-10, 1974.

[3] Goodman, A. F. "Extended Iterative Weighted Least Square: Estimation of a Linear Model in the Presence of Complications", *Naval Research Logist.Quart.*, Vol.18, No.2, pp.243-276, 1971.

[4] Hartler, G. "Parameter Estimation for Arrhenius Model", *IEEE Transations on*

- Reliability*, Vol.35, pp.414-418, 1986.
- [5] Hooper, P. M. "Iterative Weighted Least Squares Estimation in Heteroscedastic Linear Models", *Journal of the American Statistical Association*, Vol.88, pp.179-184, 1993.
- [6] Hudson, D. J. "Fitting Segmented Curves Whose Join Points Have to Be Estimated", *Journal of American Statistical Association*, Vol.61, pp.1097-1129, 1966.
- [7] Lawless, J. F. "Statistical Methods in Reliability", *Technometrics*, Vol.25, pp. 305-335, 1983.
- [8] Mann, N. R. "Design of Over-Stress Life-Test Experiments When Failure Times Have the Two-Parameter Weibull Distribution", *Technometrics*, Vol.14, pp.437-451, 1972.
- [9] Mcgee, V. E. & Carleton, W. T. "Piecewise Regression", *Journal of the American Statistical Association*, Vol.65, pp.1109-1124, 1970.
- [10] Nelson, W. "Hazard Plotting Methods for Analysis of Life Data with Different Failure Modes", *Journal of Quality Technology*, Vol.2, pp.126-149, 1970.
- [11] Nelson, W. "Analysis of Accelerated Life Test Data-Part1: The Arrhenius Model and Graphical Methods", *IEEE Transactions on Reliability*, Vol.EI-6, No.4, pp. 165-181, 1971.
- [12] Nelson, W. "Analysis of Accelerated Life Test Data-Part2: Numerical Method and Test Planning", *IEEE Transactions on Reliability*, Vol.EI-7, No.1, pp.36-55, 1972.
- [13] Nelson, W. "Analysis of Accelerated Life Test Data-Part3: Product Comparisons and Checks on the Validity of the Model and Data", *IEEE Transactions on Reliability*, Vol.EI-7, No.2, pp.99-119, 1972.
- [14] Nelson, W. "Graphical Analysis of Accelerated Life Test Data With the Inverse Power Law Model", *IEEE Transactions on Reliability*, Vol.R-21, No.1, pp.2-11, 1972.
- [15] Nelson, W. "Theory and Applications of Hazard Plotting for Censored Failure Data", *Technometrics*, Vol.14, pp.945-966, 1972.
- [16] Nelson, W. & Hahn, G. J. "Linear Estimation of a Regression Relationship from Censored Data - Part 1", *Technometrics*, Vol.14, pp.247-269, 1972.
- [17] Nelson, W. & Gerald J. Hahn, "Linear Estimation of a Regression Relationship from Censored Data - Part 2", *Technometrics*, Vol.15, pp.133-150, 1973.
- [18] Nelson, W. "Analysis of Accelerated Life Test Data-Least Squares Methods for the Inverse Power Law Model", *IEEE Transactions on Reliability*, Vol.R-24, No.2, pp.103-107, 1975.
- [19] Nelson, W. "Graphical Analysis of Accelerated Life Test Data With a Mix of Failure Modes", *IEEE Transactions on Reliability*, Vol.R-24, No.4, pp.230-237, 1975.

- [20] Rajogopal, A. K. & Teitler, S. "Parameter Compatibility Relations for Accelerated", *IEEE Transactions on Reliability*, Vol.39, pp.110-113, 1990.
- [21] Richard, E. Q. "The Estimation of the Parameters of a Linear Regression System Obeying Two Separate Regimes", *American Statistical Association Journal*, Vol. 53, pp.873-880, 1958.
- [22] Singpurwalla, N. D. "Estimation of the Join Point in a Heteroscedastic Regression Model Arising in Accelerated Life Tests", *Communications in Statistics*, Vol.3, No. 9, pp.853-863, 1974.
- [23] Thomas, J. K. & Nelson, W. "Optimum Censored Accelerated Life Tests for Normal and Lognormal Life Distributions", *IEEE Transactions on Reliability*, Vol. R-24, No.5, pp.310-320, 1975.