Journal of the Korean Institute
of Industrial Engineers
Vol.20, No.1, March., 1994.

지수 수명분포에 대한 Bayesian 합격판정 샘플링계획의 개발 및 비교에 관한 연구

Development and Comparisons of Bayesian Acceptance Sampling Plans for the Exponential Lifetime Distribution

정현석*, 진휘철**, 염봉진*

Hyun Seok Jeong*, Hwi Chul Jin**, Bong Jin Yum*

Abstract

The Bayesian approach to reliability acceptance sampling has several advantages over the non-Bayesian approach. For instance, the former usually requires less amount of testing time and smaller sample sizes than the latter. In this article, a Bayesian acceptance sampling plan(ASP) based on a failure-free period life test is developed under the assumption of exponential lifetime distribution, and is compared with the corresponding Bayesian hybrid ASP in terms of the expected completion time.

It is found that the proposed ASP tends to have a smaller expected completion time than the Bayesian hybrid ASP as the prior assessment of the reliability of a lot becomes optimistic, and *vice versa*. Tables of failure-free period Bayesian ASP's are also included.

1. 서 론

산업이 고도화되면서 제품의 신뢰도에 대한 요구가 크게 증대되었으며, 이를 보증하는데 드는 시간과 비용이 중요한 문제로 대두되고 있다. Bayesian 접근방법은 모수에 대한 사전정보를 이용함으로써 non-Bayesian 접근방법에 비해 수명시험에 요구되는 시간과 표본의 크기를 줄일 수 있다는 이점이 있다 [9]. 신뢰도를 대상으로 한 Bayesian 합격판

* 한국과학기술원 산업공학과
** 삼성 데이타 시스템

정 샘플링계획(Acceptance Sampling Plan, ASP)을 설계하려는 노력은 그동안 많은 연구자들에 의해 수행되어 왔는 데, 거의 대부분 지수 수명분포를 대상으로 하고 있으며, 크게 계수형 ASP(ASP by Attributes)와 계량형 축차 ASP(Sequential ASP by Variables)로 구분할 수 있다.

계수형 ASP로서 Schick과 Drnas[9]는 복원하에서 hybrid 수명시험에 바탕을 둔 ASP를 설계하였다. 평균수명에 대한 사전분포로서 역변환 감마분포(Inverted Gamma Distribution)를 가정하였고, 그 모수 선택절차를 제시하였다. 미리 정해진 생산자 사후위험률(Producer's Posterior Risk)과 소비자 사후위험률(Consumer's Posterior Risk)을 만족하도록 중도절단 고장개수, 중도절단 시간을 구하여 이를 표로 제시하였다. Guild[5]는 복원하에서 Median Failure Rate에 대한 ASP를 설계하였으며 고장률에 대한 사전분포로 감마분포를 가정하였다. 이 논문에서 제안한 ASP의 목적은 복원하에서 non-Bayesian hybrid 수명시험과 같은 검정력을 가지면서 표본의 크기를 줄이려는 데 있다. 그리고, Martz와 Waller[6]는 정해진 시간 내에서 고장이 일어나지 않았을 때 합격으로 판정하는 계획을 소비자 사후위험만을 고려하여 설계하였으며, 고장률에 대한 사전분포로서 감마분포를 가정하였다.

계량형 축차 ASP는 Schafer와 Singpurwalla[8]에 의해 처음으로 설계되었다. 평균수명에 대한 사전분포로서 역변환 감마분포를 가정하고 개발된 ASP를 표로 제시하였다. Barnett[3]도 계량형 축차 ASP를 설계하였으며 고장률에 대한 사전분포로서 감마분포를 가정하였다. 그리고 기존의 축차수명시험방법을 수정하여 유한번의 고장개수 전에 시험이 끝나도록 하였다. 기존의 ASP가 수명분포의 모수에 관심이 있었던 데 비하여 Bancroft와 Dunsmore[2]는 판매하는 제품의 미래수명에 대한 계량형 축차 ASP를 설계하였다.

Bayesian ASP에 관한 기존 연구의 문제점은 non-Bayesian ASP에서와 같이 다양한 수명시험 방법을 고려한 ASP가 충분히 개발되어 있지 않다는 것과, 개발된 ASP의 성능에 관한 비교연구가 부족하다는 것이다. 본 연구에서는 Angus,Schafer,Rutemiller[1]가 non-Bayesian의 관점에서 제안한 무고장 기간(failure-free period) ASP를 확장하여 지수 수명분포에 대한 Bayesian 무고장 기간 ASP를 개발하고, 이를 Schick과 Drnas[9]가 제안한 Bayesian hybrid ASP와 기대 종료시간의 관점에서 비교하고자 한다.

2. 기호, 가정 및 기본개념

2.1 기호및 가정

본 논문에서 사용한 기호는 다음과 같다.

X : 제품의 수명

θ : 평균수명

α^* : 생산자 사후위험률(Producer's Posterior Risk)

β^* : 소비자 사후위험률(Consumer's Posterior Risk)

k, T_k : 무고장 기간 합격판정 샘플링계획의 결정변수

r_0 : hybrid 수명시험의 중도절단 고장개수

T_0 : hybrid 수명시험의 중도절단 시간

$g(\theta)$: θ의 사전분포

IG : 역변환 감마분포(Inverted Gamma Distribution)

U : 역변환 감마분포의 형상모수(Shape Parameter)

V : 역변환 감마분포의 척도모수(Scale Parameter)

G : 감마분포(Gamma Distribution)

T_f : 무고장 기간 합격판정 샘플링계획의 종료시간

T_h : hybrid 합격판정 샘플링계획의 종료시간

pdf : 확률밀도함수(probability density function)

A : 로트를 합격으로 판정함

R : 로트를 불합격으로 판정함

본 논문 전체를 통하여 다음과 같이 가정한다.

(1) 로트의 제품들은 안정된 제조공정으로부터 생산된다.

(2) 제품의 수명은 지수분포를 따른다.

(3) 각 제품의 수명은 서로 독립이다.

(4) 평균수명에 대한 사전분포로서 역변환 감마분포를 가정한다.

(5) 수명시험은 복원하에서(with replacement) 수행한다.

2.2 Bayesian 접근방법의 기본개념

ASP에 있어서, non-Bayesian과 Bayesian 접근방법의 차이점을 설명하고, 후자의 기본적인 개념에 대해서 살펴보고자 한다.

수명이 지수분포를 따르는 경우, 로트의 합격여부를 판정하기 위한 샘플링 계획을 설계할 때, non-Bayesian 접근방법에서는 평균수명 θ를 미지의 상수로 생각하며, 로트에 대한 합격여부의 판정은 다음과 같은 가설검정의 형태로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} & H_0 : \theta = \theta_0 \\ & H_1 : \theta = \theta_1, \qquad \theta_1 < \theta_0. \end{aligned} \tag{1}$$

여기서 θ_0, θ_1은 생산자와 소비자간에 합의된 양의 상수이다. 위의 가설검정을 수행하기 위한 수명시험 절차와 판정기준은 미리 정해진 다음의 생산자 위험률(α)과 소비자 위험률(β)을 만족하도록 설계되어야 한다.

$$\begin{aligned} \alpha &= \Pr(H_0 \text{ 기각} \mid \theta = \theta_0) \\ \beta &= \Pr(H_0 \text{ 채택} \mid \theta = \theta_1). \end{aligned}$$

Bayesian 접근방법에서는 평균수명 θ에 대한 사전분포를 고려하기 때문에 non-Bayesian 접근방법과는 달리 θ를 확률변수로 다룬다. Bayesian 접근방법에서 생산자와 소비자에 관련된 위험률은 일반적으로 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} \alpha^* &= \Pr(\theta \geq \theta_0 \mid R) \\ \beta^* &= \Pr(\theta \leq \theta_1 \mid A), \quad \theta_1 < \theta_0. \end{aligned}$$

즉, α는 불합격으로 판정된 로트가 실제로는 합격수준이었을 가능성을 나타내는 생산자 사후위험률이고, β^*는 합격된 로트가 실제로는 불합격수준이었을 가능성을 나타내는 소비자 사후위험률이다. Bayesian 접근방법을 채택했을 때에는, 위의 α^*와 β^*를 만족하도록 ASP를 설계해야 한다.

2.3 사전분포와 모수의 선택

평균수명 θ에 대한 사전분포로서 대부분

역변환 감마분포를 가정하는 데, Schick과 Drnas[9]에 의하면 그 이유는 다음과 같다.

(1) 실제 전자 시스템의 평균수명 θ에 대한 사전지식을 잘 반영할 수 있다.

(2) 수학적으로 다루기 쉽다. 즉, 사후분포를 계산하기가 용이하다.

(3) 모수의 선택이 용이하다.

θ의 사전분포가 역변환 감마일 때, 그 pdf $g(\theta)$, 평균, 분산은 다음과 같다[7].

$$\begin{aligned} g(\theta) &= V^U \exp(-V/\theta) / \{\Gamma(U)\theta^{U+1}\} \\ E(\theta) &= V/(U-1),\ U>1 \\ Var(\theta) &= V^2 / \{(U-1)^2(U-2)\},\ U>2. \end{aligned}$$

그리고, 역변환 감마분포와 감마분포는 다음과 같은 관계에 있다.

$$\theta \sim IG(U,V) \Leftrightarrow 1/\theta \sim G(U,1/V).$$

따라서,이미 알려진 감마분포의 성질로부터 다음과 같이 역변환 감마분포의 성질을 파악할 수 있다. 역변환 감마분포의 모양은 형상모수인 U에 의해 결정되며, U 값이 클수록 왼쪽으로 치우친 형태를 갖고 , U가 작을수록 분포의 최빈치(Mode)가 오른쪽으로 이동하여 결국 좌우대칭인 형태를 갖는다. 척도모수 V는 θ의 사전분포가 얼마나 넓게 퍼져 있는가를 나타내며, V가 클수록 분포는 넓게 퍼진 형태를 갖는다. 역변환 감마분포의 모수선택 절차에 관해서는 Schick과 Drnas[9]를 참조하기 바란다.

3. 무고장 기간 합격판정 샘플링계획의 개발

3.1 모형

무고장 기간에 근거한 로트의 합격여부는 다음과 같이 결정한다. 로트에서 랜덤하게 표본을 한개 추출하여 고장날 때까지의 시간을 측정한다. 이 시간이 T_k 보다 크거나 같은 경우에는 로트를 받아들이고 그렇지 않은 경우에는 로트에서 다시 랜덤하게 표본을 한개 추출하여 위의 과정을 반복한다. 만일 표본을 k개까지 추출하여도 각각의 고장시간이 T_k 보다 작은 경우에는 로트를 불합격 시킨다. X_i를 i번째 표본이 고장날 때까지 걸리는 시간이라고 한다면 로트의 합격여부는 다음과 같이 결정한다.

(1) 모든 $i(1 \le i \le k)$에 대하여, $X_i < T_k$이면 로트를 불합격시킨다.

(2) 어떤 $i(1 \le i \le k)$에 대하여, $X_i \ge T_k$이면 로트를 합격시킨다.

제품의 수명 X는 지수분포를 따르므로, 그 pdf는 다음과 같다.

$$f(x) = (1/\theta)\exp(-x/\theta), \qquad \theta > 0$$

위의 합격판정 기준하에서 평균수명이 θ인 로트를 불합격시킬 확률은 다음과 같은 기하분포(Geometric Distribution)로 표현할 수 있다[1].

$$\Pr(R \mid \theta) = [1-\exp(-T_k/\theta)]^k.$$

Bayesian 합격판정 샘플링계획은 다음의 사후위험률이 만족되도록 결정되어야 한다.

$$\alpha^* = \Pr(\theta \geq \theta_o \mid R) \quad (2)$$
$$\beta^* = \Pr(\theta \leq \theta_1 \mid A). \quad (3)$$

θ의 사전분포로서 역변환 감마를 가정했으므로, 위의 사후위험률은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\Pr(\theta \geq \theta_o | R) = \frac{\int_{\theta_o}^{\infty} \Pr(R|\theta) g(\theta) d\theta}{\int_0^{\infty} \Pr(R|\theta) g(\theta) d\theta}$$

$$= \frac{\int_{\theta_o}^{\infty} [1-\exp(-T_k/\theta)]^k [1/\Gamma(U)] V^U (1/\theta)^{U+1} \exp(-V/\theta) d\theta}{\int_0^{\infty} [1-\exp(-T_k/\theta)]^k [1/\Gamma(U)] V^U (1/\theta)^{U+1} \exp(-V/\theta) d\theta}$$

$$\Pr(\theta \leq \theta_1 | A) = \frac{\int_0^{\theta_1} \Pr(A|\theta) g(\theta) d\theta}{\int_0^{\infty} \Pr(A|\theta) g(\theta) d\theta}$$

$$= \frac{\int_0^{\theta_1} [1-\{1-\exp(-T_k/\theta)\}^k][1/\Gamma(U)] V^U (1/\theta)^{U+1} \exp(-V/\theta) d\theta}{\int_0^{\infty} [1-\{1-\exp(-T_k/\theta)\}^k][1/\Gamma(U)] V^U (1/\theta)^{U+1} \exp(-V/\theta) d\theta}$$

k 값은 정수이어야 하므로 식 (2)와 (3)을 정확하게 만족시키는 합격판정 샘플링계획 (k, T_k)는 일반적으로 존재하지 않는다. 따라서, 사후위험률을 다음과 같이 만족시키는 샘플링계획을 구성했다.

$$\alpha^* \geq \Pr(\theta \geq \theta_o \mid R) \quad (4)$$
$$\beta^* = \Pr(\theta \leq \theta_1 \mid A). \quad (5)$$

식(4), (5)의 우변은 IMSL[10]의 수치적분 부프로그램 DGAMDF, DQDAGI, DQDAG를 이용하여 계산했다.

합격판정 샘플링계획(k, T_k)의 기대 종료시간은 다음과 같이 구할 수 있다. 먼저, T_f를 무고장 기간 합격판정 샘플링계획에서 어떤 결정이 내려질 때까지의 시간을 나타내는 확률변수라 하자. θ가 주어졌을 때, 기대 종료시간은 Angus, Schafer, Rutemiller [1]에 의해 다음과 같이 구해질 수 있다.

$$E(T_f \mid \theta)$$
$$= \sum_{y=0}^{k-1} [y[\theta - T_k \{\exp(T_k/\theta)-1\}^{-1}] + T_k]$$
$$\exp(-T_k/\theta) \{1-\exp(-T_k/\theta)\}^y$$
$$+ [k[\theta - T_k \{\exp(T_k/\theta)-1\}^{-1}]] \{1-\exp(-T_k/\theta)\}^k$$

Bayesian 접근방법에서는 θ를 확률변수로 다루므로 위의 조건부기대 종료시간을 θ에 대해 적분함으로써 다음과 같이 최종 기대 종료시간을 구할 수 있다.

$$E(T_f) = \int_0^{\infty} E(T_f|\theta) g(\theta) d\theta.$$

Bayesian 합격 판정 샘플링계획에서는 사전분포가 바람직하면 수명시험을 거치지 않고 로트를 합격시킬 수 있다. 즉, 식 (5)를 만족하는 T_k를 구하려고 할때, 임의의 k에 대하여 식 (5)의 우변은 T_k의 감소함수이므로 k=1에서 T_k=0인 경우의 소비자 사후위험률이 β^*보다 작거나 같으면 소비자 사후위험률이 만족되며, 이때 언제나 로트를 합격시키므로 생산자 사후위험률도 만족된다. 그리고, T_k=0이므로 시험을 할 필요가 없음을 의미한다. 즉, 무고장 기간에 근거한 Bayesian 합격판정 샘플링계획에서는 사전분포가 다음과 같은 조건을 만족시키면 시험없이 로트를 합격시킬 수 있다.

$$\beta^* \geq \int_0^{\theta_1} g(\theta)d\theta.$$

3.2 표준화된 계획표

무고장 기간에 근거한 Bayesian 합격판정 샘플링계획은 시간에 관계된 모든 모수를 θ_0로 Scaling함으로써 표준화할 수 있다. 즉, (1)의 가설검정 형태는 다음과 같이 표준화 된다.

$$H_o : \theta = 1,$$
$$H_1 : \theta = \theta_1' \ (= \theta_1/\theta_o)$$

이때, 사전분포의 형상모수는 변하지 않으나 척도모수는 V/θ_0로 표준화 된다. 위와 같이 표준화하여 구한 샘플링계획의 T_k값은 다시 θ_0를 곱해줌으로써 원래의 무고장 기간으로 환산할 수 있다.

표준화된 합격 판정 샘플링계획은 표 1, 2와 같다. 샘플링계획표에서 공란은 사전분포가 바람직하여 수명시험을 거치지 않고 로트를 합격시키는 경우를 나타낸다. 사전분포의 모수 U, V값의 범위는 Schick과 Drnas[9]를 따랐다.

3.3 예제

θ_0 = 1000시간, θ_1 = 500시간이며 미리 정해진 생산자 사후위험률 α^*, 소비자 사후위험률 β^*는 각각 0.1, 0.1 이라고 하자. 평균수명 θ에 대한 사전분포인 역변환 감마분포의 형상모수, 척도모수는 각각 U=4, V=2000 이라고 할 때, 위의 사후위험을 만족시키는 무고장 기간 Bayesian 합격판정 샘플링 계획을 설계하는 문제를 생각해 보자. 먼저, 표준화된 계획표를 사용하기 위해 판별비를 구하면 θ_1/θ_0=0.5이다. V/θ_o=2이므로 표 1

표 1. 무고장 기간 Bayesian 합격판정 샘플링계획 (α^*=0.1, β^*=0.1).

(a) U = 3.

V/θ_o	θ_1/θ_o			
	0.8	0.7	0.5	0.3
4.4				
4.0	10[a] 1.2500[b]			
3.6	14 1.8906	6 0.6875		
3.2	18 2.3906	8 1.3281		
2.8	20 2.7734	9 1.7500		
2.4	19 3.0469	9 2.1250	3 0.5156	
2.0	16 3.2578	8 2.3516	3 0.9063	
1.6	9 3.2969	6 2.5703	2 1.1797	
1.2	2 3.1719	1 2.5313	1 1.4648	1 0.3984
0.8	1 3.4688	1 2.9297	1 1.8672	1 0.7969
0.4	1 3.8594	1 3.3281	1 2.2656	1 1.1992

a:k　　b: T_k/θ_o

(b) U = 4.

V/θ_o	θ_1/θ_o			
	0.8	0.7	0.5	0.3
5.5				
5.0	13 1.5156			
4.5	19 2.2344	7 0.8438		
4.0	24 2.7813	10 1.5703		
3.5	27 3.2109	11 2.0313		
3.0	25 3.5234	11 2.4219	3 0.5938	
2.5	17 3.6875	8 2.6875	3 1.0625	
2.0	6 3.6875	3 2.8438	2 1.4375	1 0.0078
1.5	1 3.8516	1 3.1875	1 1.8438	1 0.5078
1.0	1 4.3516	1 3.6875	1 2.3438	1 1.0078
0.5	1 4.8516	1 4.1875	1 2.8438	1 1.5078

(c) U = 6.

V/θ_o	θ_1/θ_o			
	0.8	0.7	0.5	0.3
7.8				
7.1	15 1.5781			
6.4	27 2.5781	7 0.7188		
5.7	36 3.2578	11 1.7031		
5.0	41 3.7969	13 2.3281		
4.4	36 4.1250	13 2.7734	3 0.4844	
3.8	22 4.3281	9 3.1094	2 0.9609	
3.2	2 4.2813	1 3.2969	1 1.4375	
2.6	1 4.8281	1 3.8984	1 2.0391	1 0.1875
2.0	1 5.4219	1 4.5000	1 2.6406	1 0.7852

(d) U = 13.

V/θ_o	θ_1/θ_o			
	0.8	0.7	0.5	0.3
15.0				
14.0	18 1.5625			
13.0	42 2.9688			
12.0	67 3.8750	10 1.3281		
11.0	86 4.5938	14 2.2656		
9.9	76 5.2188	14 3.0625		
8.7	4 5.5781	1 3.7500	1 0.2031	
7.6	1 6.6406	1 4.8594	1 1.2969	
6.5	1 7.7344	1 5.9531	1 2.3984	

표 2. 무고장 기간 Bayesian 합격판정 샘플링계획 (α^*=0.05, β^*=0.05).

(a) U = 3.

V/θ_o	θ_1/θ_o			
	0.8	0.7	0.5	0.3
5.2				
4.8	23[a] 1.7813[b]			
4.4	41 2.6250	8 0.5000		
4.0	66 3.3125	18 1.6875		
3.6	94 3.8594	26 2.2813		
3.2	126 4.3438	33 2.7500		
2.8	154 4.7500	40 3.1563	7 0.9063	
2.4	166 5.0625	43 3.4688	8 1.3281	
2.0	149 5.2500	43 3.7500	8 1.6563	
1.6	100 5.2656	33 3.9063	7 1.9453	2 0.3906
1.2	36 4.9844	16 3.9063	5 2.2031	2 0.7656
0.8	1 4.2500	1 3.6250	1 2.3594	1 1.0938
0.4	1 4.6563	1 4.0156	1 2.7500	1 1.4922

a : k b : T_k/θ_o

(b) U = 4.

V/θ_o	θ_1/θ_o			
	0.8	0.7	0.5	0.3
6.5				
6.0	24 1.7500			
5.5	52 2.8438			
5.0	92 3.6563	20 1.7656		
4.5	141 4.2969	31 2.4688		
4.0	196 4.8438	41 3.0000		
3.5	246 5.3125	51 3.4688	7 0.9375	
3.0	253 5.6250	56 3.8594	8 1.4219	
2.5	207 5.8125	52 4.1563	8 1.8281	
2.0	102 5.7188	33 4.3125	6 2.1563	2 0.4219
1.5	11 5.1250	6 4.1719	2 2.4375	1 0.8281
1.0	1 5.2188	1 4.4375	1 2.8906	1 1.3281
0.5	1 5.7188	1 4.9375	1 3.3906	1 1.8281

(c) U = 6.

V/θ_0	θ_1/θ_0			
	0.8	0.7	0.5	0.3
8.5				
7.8	57 2.8125			
7.1	125 3.9063	19 1.5313		
6.4	230 4.7813	35 2.5313		
5.7	361 5.5000	54 3.2813		
5.0	470 6.0625	71 3.8750	6 0.7500	
4.4	480 6.4063	79 4.3125	7 1.3359	
3.8	368 6.5938	71 4.6563	7 1.8125	
3.2	152 6.5000	40 4.8438	6 2.2813	
2.6	1 5.8125	1 4.7813	1 2.6719	1 0.5625
2.0	1 6.4375	1 5.3750	1 3.2656	1 1.1563

(d) U = 13.

V/θ_0	θ_1/θ_0			
	0.8	0.7	0.5	0.3
16.0				
15.0	75 2.9375			
14.0	223 4.4063			
13.0	482 5.4688	30 2.1250		
12.0	890 6.3750	57 3.1875		
11.0	1436 7.1875	88 4.0000		
9.9	1723 7.8438	120 4.8125		
8.7	1047 8.2500	104 5.5625	4 1.2813	
7.6	1 7.9688	1 6.0313	1 2.1250	
6.5	1 9.0625	1 7.1250	1 3.2344	

(b)로 부터 $(k, T_k/\theta_0) = (2,\ 1.4336)$을 얻는다. 즉, $(k, T_k) = (2,\ 1433.6)$이 된다. 이 계획하에 수명시험을 실시하여 첫 번째와 두 번째 제품의 수명이 모두 1433.6시간보다 작으면 로트를 불합격시키고, 첫 번째 또는 두 번째 제품의 수명이 1433.6시간 이상이면 합격시킨다.

4. 합격판정 샘플링계획의 비교

앞 절에서 개발한 샘플링계획과 Schick과 Drnas[9]가 개발한 Bayesian hybrid샘플링계획을 기대 종료시간의 관점에서 비교하고자 한다. 식 (1)의 가설검정을 위한 hybrid 샘플링계획은 다음과 같다. 주어진 시간(T_o)까지의 고장개수가 r_o개 미만이면 H_o를 수락하고, T_o이전에 r_o개의 고장이 발생하면 H_o를 기각한다.

무고장 기간 샘플링계획과 동일한 조건에서 비교하기 위하여 hybrid 샘플링계획의 표본의 크기 n을 1로 하고 복원하에서 시험을 수행하는 것으로 한다.

Bayesian hybrid 샘플링계획의 기대 종료시간은 다음과 같이 구한다. 먼저 T_h를 hybrid 샘플링계획에서 어떤 결정이 내려질 때까지의 시간을 나타내는 확률변수라고 하자. 그러면 θ가 주어졌을 때 기대 종료시간은 다음과 같이 주어진다[4].

$$
\begin{aligned}
& E(T_h \mid \theta) \\
&= \theta E(r \mid \theta) \\
&= \theta \sum_{i=o}^{r_o} i \Pr(r = i \mid \theta)
\end{aligned}
$$

여기서,

$r = T_0$ 시간 이전에 고장난 제품의 개수

$$\Pr(r=i|\theta) = \frac{\exp(-T_o/\theta)(T_o/\theta)^i}{i!},$$
$$i = 0, 1, \cdots, r_o-1$$
$$\Pr(r=r_o|\theta) = 1-\sum_{i=0}^{r_o-1}\Pr(r=i|\theta)$$

Bayesian 접근방법에서는 θ를 확률변수로 다루므로 위의 조건부 기대 종료시간을 θ에 대해 적분하면 다음과 같이 최종 기대 종료시간을 구할 수 있다.

$$E(T_h) = \int_0^{\infty} E(T_h|\theta)g(\theta)d\theta.$$

4.1 기대 종료시간의 비교

비교는 다음의 2가지 방법으로 수행하였다. 첫 번째는, 사전분포의 형상모수 U를 고정시키고 척도모수 V를 변화시켰으며, 두 번째는, 척도모수 V를 고정시키고 형상모수 U를 변화시켜 비교하였다. 결과의 일부는 표3, 4와 같다. 표에서 공란은 사전분포가 바람직하여 시험을 거치지 않고 로트를 합격시키는 경우이며, V/θ_o 값 중에서 * 표시한 것은 사전분포의 평균값($V/(U-1)$)이 $\theta_o(=1)$와 같아지는 곳을 의미한다. 다양한 U값에 대해 표3과 같은 비교를 수행한 결과, 형상모수 U를 고정시키고, 척도모수 V를 변화시켰을 경우, 척도모수의 값이 클 때 무고장 기간 샘플링계획의 기대 종료시간이 hybrid 샘플링계획의 기대 종료시간보다 작은 경향을 보이는 것을 파악할 수 있었다. 그리고, 어떤 V/θ_o 값 이상일 때 위와 같은 경향을 보이는 가는 α^*, β^*, θ_1/θ_o 등에 의존한다. 마찬가지로, 다양한 V 값에 대해 표4와 같은 비교를 수행한 결과 척도모수 V를 고정시키고, 형상모수 U를 변화시켰을 때는 형상모수값이 작을 때 무고장 기간 샘플링계획의 기대 종료시간이 hybrid 샘플링계획의 기대 종료시간보다 작은 경향을 보이는 것을 알 수 있었으며, 어떤 U 값 이하에서 이런 경향을 보이는 가는 α^*, β^*, θ_1/θ_o 값 등에 의존한다.

5. 결론

본 연구에서는 무고장 기간에 근거한 Bayesian 합격판정 샘플링계획을 개발하였으며, 이를 Schick과 Drnas[9]가 제안한 Bayesian hybrid 합격판정 샘플링계획과 기대 종료시간을 기준으로 비교하였다.

비교 결과, θ의 사전분포(역변환 감마분포)에서, 형상모수 U가 작고 척도모수 V가 클수록 무고장 기간 샘플링계획의 기대 종료시간이 더 작은 경향을 보인다는 것을 파악할 수 있었다. 즉, 로트의 신뢰도에 대해 낙관적인 평가를 할 수 있을 때(즉, V가 크고 U가 작을때), 무고장 샘플링계획이 기대 종료시간의 관점에서 유리하다는 것을 알 수 있다. 이 때, 어느 정도의 낙관적 평가에서 이와 같은 판단을 할 수 있는 가는 α^*, β^*, θ_1/θ_o 등에 의존하므로 본 연구에서 제시된 방법에 의해 기대 종료시간을 계산하여 비교해 보아야 한다. 한편, 로트의 신뢰도에 대해 낙관적인 평가를 할 수 없을 때에는 hybrid 샘플링계획이 유리하며 이때 무고장 기간 샘플링계획은 기대 종료시간의 관점에서 매우 비능률적일 수도 있다는 것을 염두에 두어야 한다.

표 3. 기대 종료시간 비교표($\alpha^*=\beta^*=0.1$, $U=6$).

V/θ_o	θ_1/θ_o			
	0.8	0.7	0.5	0.3
7.8				
7.1	3.2898[a] 5.5244[b]			
6.4	9.3284 8.5209	1.0188 1.7443		
5.7	16.5562 10.0814	3.8467 4.4352		
5.0*	22.7987 9.6332	6.3645 5.1500		
4.4	22.2371 8.0048	7.4659 4.7020	0.5980 0.7970	
3.8	14.1623 5.4978	5.6090 3.3072	0.8796 0.9264	
3.2	1.2535 1.2515	0.6214 0.6214	0.5399 0.5399	
2.6	0.5173 0.5173	0.5147 0.5147	0.4912 0.4912	0.1529 0.1529
2.0	0.3994 0.3994	0.3989 0.3989	0.3941 0.3941	0.3236 0.3236

a : 무고장 기간 샘플링계획의 기대종료시간$/\theta_o$

b : hybrid 샘플링계획의 기대종료시간$/\theta_o$

표 4. 기대 종료시간 비교표($\alpha^*=\beta^*=0.1$, $V/\theta_o=3$).

U	θ_1/θ_o			
	0.8	0.7	0.5	0.3
2.0	1.0522 1.9611			
3.0	7.8295 6.7583	3.0235 3.7754		
4.0*	14.0888 7.1192	5.7266 4.5049	0.7334 0.9434	
5.0	10.0263 4.6712	4.2865 3.1991	0.9428 0.9836	
6.0	0.5935 0.5935	0.5874 0.5874	0.5323 0.5323	
7.0	0.4990 0.4990	0.4977 0.4977	0.4831 0.4831	0.1367 0.1367
8.0	0.4284 0.4284	0.4282 0.4282	0.4248 0.4248	0.2927 0.2927
9.0	0.3750 0.3750	0.3749 0.3749	0.3742 0.3742	0.3289 0.3289

참 고 문 헌

[1] Angus, J.E., Schafer, R.E. and Rutemiller, H.C., " An Acceptance Life Tests For High-Reliability Products," *Naval Research Logistics Quarterly*, Vol.31, pp.483-492, 1984.

[2] Bancroft, G.A. and Dunsmore, I.R., " Predictive Sequential Life Testing," *Biometrica*, Vol.65, pp.609-613, 1978.

[3] Barnett, V.D., " A Bayesian Sequential Life Tests," *Technometrics*, Vol.14, pp.453-468, 1972.

[4] Epstein, B., " Truncated Life Tests in the Exponential Case," *Annals of Mathematical Statistics*, Vol.25, pp.555-564,1954.

[5] Guild, R.D., " Bayesian MFR Life Test Sampling Plans," *Journal of Quality Technology*, Vol.5, pp.11-15, 1973.

[6] Martz, H.F. and Waller, R.A., " A Bayesian Zero-Failure(BAZE) Reliability Demonstration Testing Procedure," *Journal of Quality Technology*, Vol.11, pp.128-138, 1979.

[7] Martz, H.F. and Waller, R.A., *Bayesian Reliability Analysis*, John Wiley and Sons, New York, 1982.

[8] Schafer, R.E. and Singpurwalla, N.D., " A Sequential Bayes Procedure for Reliability Demonstration," *Naval Research Logistics Quarterly*, Vol.17, pp.55-67, 1970.

[9] Schick, G.J. and Drnas, T.M., " Bayesian Reliability Demonstration," *AIIE Transactions*, Vol.14, pp.92-104, 1972.

[10] IMSL, STAT/LIBRARY User's Manual, Vol. 3, IMSL Inc., Houston, Texas, 1987.