Journal of the Korean Institute
of Industrial Engineers
Vol.20, No.4, December., 1994

Moon-Moser 그래프와 완전그래프를 결합한 그래프의 극대독립집합의 개수

The Number of Maximal Independent sets of the Graph with joining Moon-Moser Graph and Complete Graph

정성진*, 이창수**
S.J. Chung*, C.S. Lee**

Abstract

An independent set of nodes is a set of nodes no two of which are joined by an edge. An independent set is called maximal if no more nodes can be added to the set without destroying its independence. The greatest number of maximal independent set is the maximum possible number of maximal independent set of a graph.

We consider the greatest number of maximal independent set in connected graphs with fixed numbers of edges and nodes. For arbitrary number of nodes with a certain class of number of edges, we present the connected graphs with the greatest number of maximal independent set.

For a given class of number of edges, the structure of graphs with the greatest number of maximal independent set is that the two components are completely joined; one consists of disjoint triangles as many as possible and the other is the complete graph with remaining nodes.

1. 서론

최대 개수의 극대독립집합을 갖는 그래프를 생성하는 문제는 그래프 이론분야에서 많은 이론적 흥미를 유발시켜 왔다. 이 문제는 마디의 부분집합 중 서로 이웃하지 않는 마

* 서울대학교 산업공학과
** 강릉대학교 산업공학과

디의 집합의 가능한 경우의 수를 가장 많이 가지는 그래프의 구조를 밝히고자 하는 것이다.

주어진 어떤 그래프에 대하여 마디가 서로 이웃하지 않도록 마디 집합을 구성하되 그 가능한 경우의 수가 가장 많도록 하는 것은 일반적으로 방대한 계산량을 필요로 한다. 더욱이 어떠한 특정 그래프가 주어진 것이 아니라 단지 임의의 마디의 개수와 호의 개수만 알려져 있을 때 최대 개수의 극대독립집합을 갖도록 그래프의 구조를 결정하는 것 또한 쉽지 않은 문제이다.

그러나 임의의 마디 개수에 대하여 최대 개수의 극대독립집합을 갖는 연결 그래프가 어떠한 구조를 갖는가에 대한 문제는 최근에 해결되었다. 이어서 임의의 마디와 호의 개수가 주어졌을 때 최대개수의 극대독립집합을 갖는 그래프를 생성하기 위한 노력들이 시도되고 있으나 아직까지 완전한 해결책은 제시되고 있지 못하다.

본 연구에서는 임의의 마디 개수에 대하여 일정 유형의 호의 개수가 주어졌을 때 극대독립집합의 개수를 최대로 갖는 연결 그래프를 생성한다.

2. 최대개수의 극대독립집합을 갖는 그래프

그래프(graph) $G=(V,E)$는 단순 그래프(즉, 방향을 갖지 않으며 자폐호(self-loop)와 복수호(multi-edge)가 없는)를 나타낸다. 그래프 G의 호(edge)의 개수를 $|E(G)|$ 또는 $e(G)$, G의 마디(node)의 개수를 $|V(G)|$ 또는 $v(G)$으로 표시한다. 노드 n개인 그래프 G의 극대독립집합의 최대개수를 $i(G)$로 표시하자.

마디의 독립 집합(independent set of nodes) $S(\subseteq V)$란 인접하지 않은(즉, 하나의 호를 공유하지 않은) 마디들의 집합이다. S에 임의의 마디를 하나 더 첨가하였을 때 G에서 더 이상 독립 집합이 되지 못하는 S를 극대독립집합 L이라 한다. 즉, L은 $S\cup\{v\}\ \forall v\in V-S$가 독립 집합이 되지 못하는 S이다.

2.1 비연결 그래프에서 최대 개수의 극대독립집합

Erdös와 Moser는 마디 개수가 n 개인 그래프에서 가능한 clique의 최대 개수를 묻는 문제를 제기하였으며 [9]에서는 이 문제를 해결하였다.

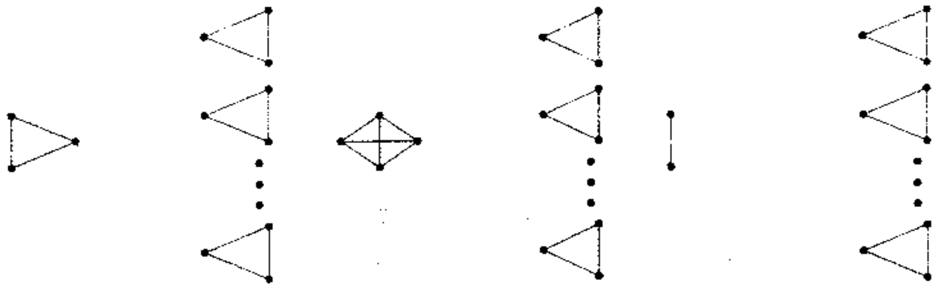
Moon-Moser의 그래프를 complement 취한 그래프 M_n은 비연결그래프에서 최대 개수의 극대독립집합을 갖는 그래프이며 그림 1에 나타내었다.

2.2 연결 그래프에서 최대 개수의 극대 독립 집합

[10]은 연결 그래프에서의 $i(G)$를 구하는 문제를 제시하였으며 [3], [4]는 [9]의 결과를 이용하여 각기 이 문제를 해결하였다. 임의의 마디 개수 n에 대하여 최대 개수의 극대 독립집합을 갖는 연결 그래프는 그림 2와 같다.

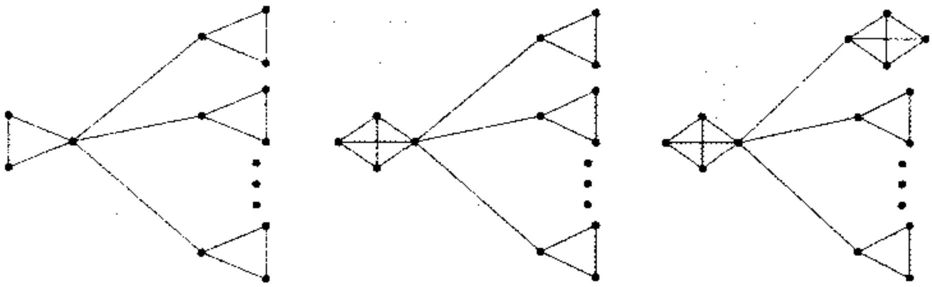
3. Moon-Moser 그래프와 완전그래프를 결합한 그래프의 극대독립집합의 개수

[3], [4]의 극단 그래프는 [9]의 극단 그래프를 부분그래프로 갖는다. 이는 [9]의 극



(a) (b) (c)

그림 1. $i(G)$를 갖는 비연결 그래프



(a) $n \equiv 0 \pmod 3$ (b) $n \equiv 1 \pmod 3$ (c) $n \equiv 2 \pmod 3$

그림 2. $i(G)$를 가지는 연결 그래프

단 그래프의 형태가 비연결 그래프에서 최대 개수의 극대독립집합을 갖는 구조이기 때문이다. 이러한 특성을 이용하면 호의 개수가 특정하게 제한된 군에 대해서는 마디와 호의 개수가 주어진 연결 그래프에서 최대 개수의 극대독립집합을 갖는 그래프를 생성할 수 있다.

[정리 1] 마디가 d개로 이루어진 Moon & Moser(1965)의 그래프인 M_d, 마디가 n-d개로 이루어진 완전 그래프(complete graph)인 K_{n-d}를 완전 결합(completely join)시킨 그래프를 $M_d K_{n-d}$라 하자. 그러면 $M_d K_{n-d}$는 극단 그래프이다. 차수가 n-1인 마디를 완전마디(complete node)라 하자. 그래프 G에서 한 마디 v와 그에 인접한 호를 삭제한 그래프 G-v가 비연결 그래프가 될 경우 이 v를 결점(cutpoint)이라 한다. 그래프 G의 극대독립집합의 개수를 $I(G)$라 하자.

[정의] $n \geq 6$에 대하여 $d(< n)$개의 마디가 M_d를 이루고 n-d개의 완전 마디가 K_{n-d}를 이룬다고 하자. $e(G)=(n-d-1)(n-d)/2+e(M_d)+(n-d)d=e(M_d K_{n-d})$이면 $h(n)=n-d+I(M_d)$이다. 단, $I(M_d)$는 다음과 같다.

$$I(M_d) = \begin{cases} 3^d, & d=3t \\ 4\cdot 3^{d-1}, & d=3t+1 \\ 2\cdot 3^d, & d=3t+2 \text{(단, } t\text{는 비음의 정수).} \end{cases}$$

[정리 2] 호의 개수가 $e(G)=(n-d-1)(n-d)/2+e(M_d)+(n-d)d$와 같이 주어진 그래프 군에 대하여 극대독립집합의 최대 개수를 $g(n)$으로 표시하자. 그러면 n ≥ 6에 대하여 $g(n)=h(n)$이 성립한다.

h(n)개의 극대독립집합을 갖는 그래프는 다음 그림 3과 같다.

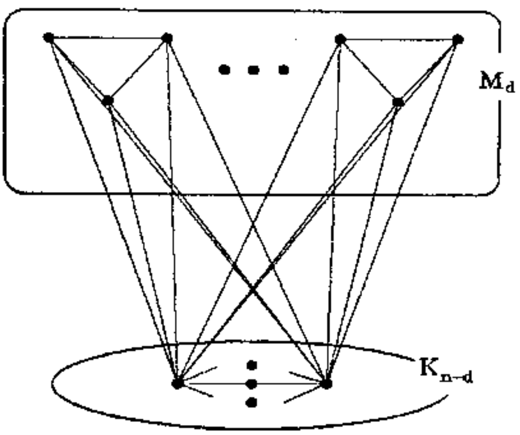


그림 3. $h(n)$개의 극대독립집합을 갖는 연결그래프

그림 3은 다음과 같은 특성 $P1$을 갖는다.

P1 : n-d=1일 경우 완전 마디가 결점이 되며 n-d ≥ 2일 때는 결점이 존재하지 않는다. 차수가 n-1인 마디의 개수는 n-d개로 이들은 K_{n-d}를 이룬다. G-K_{n-d}는 Moon-Moser의 그래프인 그림 1과 동일하다.

즉 n-d=1인 경우 K_{n-d}의 마디와 이에 인접한 호를 삭제하면 Moon-Moser의 그래프가 되므로 결국 K_{n-d}자체가 결점이 된다. n-d ≥ 2인 경우는 K_{n-d}에서 어떤 마디를 삭제하더라도 항상 연결 그래프로 남게 되어 결점은 존재하지 않는다.

[정리 2]를 증명하기 위해서는 마디와 호의 개수가 주어졌을 때, 최대 개수의 극대독립집합을 갖는 그래프는 항상 특성 $P1$을 갖는다는 것을 보이면 된다.

$v \in V(G)$에 대하여 $\Gamma(v;G)$를 v와 v에 인접한 모든 마디 집합이라 하자. v를 포함한 G의 극대독립집합 X 중 X-v가 G-v의 극대독립집합이 되지 못하는 것의 개수를 $\beta(v;G)$라 하면 $\gamma(v;G)=\alpha(v;G)+\beta(v;G)$는 v를 포함한 극대 독립집합의 개수이다. 그러면 $I(G-v)=I(G)-\beta(v;G)$이 성립한다[9].

[Moon-Moser 변환] 그래프 G에서 마디 v와 w는 서로 인접하고 각각 완전 마디가 아니라고 가정하자. v에 인접한 호를 모두 지우고 v를 $\Gamma(w;G-v)$의 각 마디에 연결시킨 그래프를 G($v;w$)라 한다.

G에 Moon-Moser 변환을 적용시키면 $\alpha(v;G(v;w))=0$, $I(G(v;w))=I(G)+\gamma(w;G)-\gamma(v;G)+\alpha(v;G)$이 성립한다. 또한 연결그래프 G가 최대 개수의 극대독립 집합을 가지면 v와 w가 완전마디가 아니면서 인접하다면 $G(v;w)$도 최대 개수의 극대독립집합을 갖는 그래프이다[9].

[보조 정리 1] 최대 개수의 극대독립집합을 갖는 그래프 G에 Moon-Moser 변환을 반

복하여 적용시킨 결과를 G'이라 하면 G'은 다음과 같은 특성 $P2$를 갖는다:

$P2$: w와 v가 G'에서 인접한 마디이며 각각 완전 마디가 아니라면 $\Gamma(v;G')=\Gamma(w;G')$.

(증명) G에서 완전 마디가 아닌 마디 w_1에 인접한 마디를 $v_1,\cdots,v_k$라 하자. 즉, $G^1_0=G$로 두고 양인 모든 i에 대하여 v_i가 G^1_{i-1}의 완전 마디가 아니면 $G^1_i=G^1_{i-1}(v_i;w_1)$, v_i가 G^1_{i-1}의 완전마디면 $G^1_i=G^1_{i-1}$이라 하자. 그러면 $I(G^1_k)=I(G)$이고, $v\in\Gamma(w_1;G^1_k)$이면 v는 G^1_k의 완전 마디이거나 $\Gamma(v;G^1_k)=\Gamma(w_1;G^1_k)$이다.

G^1_k에 이웃하지 않으면서 완전 마디가 아닌 마디 w_2의 인접 마디들에 대하여 같은 방법을 적용하면 G^2_l이 생긴다. $v\in\Gamma(w_1;G^1_k)$이고 v가 G^1_k의 완전 마디가 아니면 v의 이웃은 이 Moon-Moser 변환을 수행하여도 변하지 않는다.

이를 보이려면 먼저 $u\in\Gamma(w_1;G^1_k)$임을 가정하자. G^1_k이 G^2_l로 변환되는 과정에서 없어지는 호를 살펴보면, w_2의 이웃 중에서 완전 마디가 아닌 마디 w와 w의 인접 마디들간의 호가 없어진다. 호 (u,v)가 없어졌다면 v는 w_2에 인접하지 않으므로 u는 w_2의 이웃 중 완전 마디가 아닌 마디이다.

그러나 G^1_k에서, v와 w_1은 u에 인접한다. u가 G^1_k에서 완전 마디가 아니고, u와 w_1이 같은 이웃을 가지므로 w_1과 w_2는 인접하다. 이는 모순이다. 다음에 $u\notin\Gamma(v;G^1_k)$임을 가정하자. G^1_k이 G^2_l로 변환되는 과정에서 첨가되는 호를 살펴보면, w_2의 이웃들 간에서만 호가 더해진다.

그러나 v는 w_2에 인접하지 않기 때문에 v에 인접한 호가 더해지는 경우는 없다. G^2_l에서 완전마디가 아니면서 w_1이나 w_2에 인접하지 않은 마디 w_3가 존재하면 w_3에 대해서도 이 과정을 반복한다. 남은 마디들에 대하여 차례로 이 방법을 적용하면 특성 $P2$를 갖는 그래프 G'을 얻게 된다. (증명 끝)

[보조 정리 2] w를 완전 마디가 아니라고 가정하면

$I(G)=I(K_{n-d})+|N(w;G)\setminus\{$완전 마디$\}|\cdot I(G\text{-}K_{n-d}\text{-}\Gamma(w;G))$

$\leq n\text{-}d+|N(w;G)\setminus\{$완전 마디$\}|\cdot m(d-|\Gamma(w;G)\text{-}\{$완전 마디$\}|)$.

(증명) w를 포함한 극대독립집합의 개수는 $G\text{-}K_{n-d}$ - $\Gamma(w,G)$의 극대독립집합의 개수와 같으며 가능한 w의 개수는 $|N(w;G)\setminus\{$완전 마디$\}|$이다. K_{n-d}의 극대독립집합의 개수는 $n\text{-}d$이며 마디의 개수가 $d-|\Gamma(w;G)\text{-}\{$완전 마디$\}|$인 그래프로 만들 수 있는 최대 개수의 극대 독립집합을 갖는 그래프는 $m(d-|\Gamma(w;G)\text{-}\{$완전 마디$\}|)$이다. (증명 끝)

block들 $\{B_i\}$와 결점들 $\{c_j\}$를 갖는 연결 그래프 G에 대하여 G의 block-결점 그래프를 bc(G)로 표시하고 마디 집합 $\{B_i\}\cup\{c_j\}$를 갖는 그래프로 정의한다. 단 한 마디는 *block* B_i에 다른 한 마디는 결점 c_j(c_j는 B_i에 포함되는)에 대응되는 두 마디가 인접하도록 한다.

[보조 정리 3][5] 그래프 G가 어떤 그래프 H의 block-결점 그래프이려면 G는 임의의 두 끝 마디 사이의 거리가 짝수인 트리이어야 하며 역도 성립한다.

G에서의 결점은 $bc(G)$에서 점의 차수가 최소한 2 이상이어서 $bc(G)$에서 차수가 1인 마디는 G의 block이다: 이러한 block을 pendant block이라 부른다.

[보조 정리 4] 그래프 G가 특성 $P2$를 가지는 연결 그래프라면 G의 모든 pendant block은 G의 완전 부분그래프이다.

(증명) B를 pendant block으로 두자. 그러면 B는 G의 결점 v를 하나 가지며 B-v는 G의 연결 부분그래프이다. 특성 $P2$에 의하여 B-v의 임의의 두 인접 마디는 같은 이웃을 가지며 B-v가 연결되어있고 G의 결점을 갖지 않기 때문에 B-v의 모든 두 마디는 같은 이웃을 갖는다. 따라서 pendant block들은 G의 완전부분그래프이다. 어떤 그래프 G에서 G의 임의의 두 마디가 같은 이웃을 갖는다면 G는 완전그래프이기 때문이다.(증명 끝)

[보조 정리 5] $n \geq 6$인 연결 그래프 G가 $g(n)$개의 극대독립집합과 특성 $P2$를 가지면 n-d=1일 때 $bc(G)$는 star이다.

(증명) n-d=1이면 결점은 오직 한 개만 존재하며 나머지 마디들은 block에 속하게 된다. 결점이 하나이고 block이 여러 개인 구조를 가지는 그래프는 star이다.(증명 끝)

[보조 정리 6] $n \geq 6$인 연결 그래프 G가 $g(n)$개의 극대독립집합과 특성 $P2$를 가지면 n-$d \geq 2$일 때 $bc(G)$는 star가 아니다.

(증명) $bc(G)$가 star라면 G에서 하나의 결점 v가 있게 되고 모든 block들은 pendant block이다. 그러면 v는 G의 모든 다른 마디에 인접하게 된다. [보조 정리 1]에 의해

$I(G) = I(G\text{-}v) + \beta(v;G) \leq m(n\text{-}1)+1.$

$6 \leq n$이므로 $m(n\text{-}1)+1 < h(n)$임을 쉽게 알 수 있으며 $I(G) = g(n)$이므로 이는 모순이다. (증명 끝)

[보조 정리 7] $n \geq 6$인 연결그래프 G가 $g(n)$개의 극대독립집합과 특성 $P2$를 갖는다면 G는 특성 $P1$을 갖는다.

(증명) n-d=1인 경우는 자명하다. n-$d \geq 2$인 경우를 살펴보자. 그래프 G는 결점을 갖지 않는다. 만약 결점이 존재한다면 특성 $P2$는 G가 완전 그래프라는 것을 의미하기 때문에 완전 그래프에는 결점이 존재하지 않는다는 사실과 모순이다. 따라서 특성 $P2$를 갖는 그래프는 특성 $P1$을 갖는다. (증명 끝)

[보조 정리 8] $n\text{-}d = |\Gamma(w;G)\text{-}\{$완전 마디$\}| \cdot m(d\text{-}|\Gamma(w;G)\text{-}\{$완전 마디$\}|) \leq h(n)$.

(증명) 먼저 $n \equiv 2 \pmod 3$인 경우를 살펴보자.

$n = 3t+2$, 단 $t \geq 2$, 로 두자.

n-d=1이면

$|\Gamma(w;G)\text{-}\{$완전 마디$\}| = 1$일 때,

$1+1 \cdot m(n\text{-}1\text{-}1) = 1+1 \cdot m(3t) = 1+3^t < h(n)$

$|\Gamma(w;G)\text{-}\{$완전 마디$\}| = 2$일 때,

$1+2 \cdot m(n\text{-}1\text{-}2) = 1+2 \cdot m(3(t\text{-}1)+2) = 1+2 \cdot 2 \cdot 3^{t\text{-}1} = h(n)$

$|\Gamma(w;G)\text{-}\{$완전 마디$\}| = 3$일 때,

$1+3 \cdot m(n-1-3)=1+3 \cdot m(3(t-1)+1)= 1+3 \cdot 4 \cdot 3^{t-2}=h(n)$

$|\Gamma(w;G)$-{완전 마디}$|=4$일 때,

$1+4 \cdot m(n-1-4)=1+4 \cdot m(3(t-1))=1+4 \cdot 3^{t-1}=h(n)$

$|\Gamma(w;G)$-{완전 마디}$|=5$일 때,

$1+5 \cdot m(n-1-5)=1+5 \cdot m(3(t-2)+2)= 1+5 \cdot 2 \cdot 3^{t-2} < h(n)$

$|\Gamma(w;G)$-{완전 마디}$| > 5$일 때, 항상 $<$ 이 성립한다.

계속하여 $n-d > 1$일 때도 같은 식이 성립하며(즉, $|\Gamma(w;G)$-{완전 마디}$|$이 2,3,4일 때만 등식이 성립하며 나머지는 부등식이 성립한다.) $n \equiv 0 \pmod 3$인 경우와 $n \equiv 1 \pmod 3$인 경우에도 마찬가지로 성립한다. (증명 끝)

이제 M_d와 K_{n-d}를 완전결합시킨 그래프 M_dK_{n-d}가 극단 그래프임을 다음과 같이 증명할 수 있다.

(정리 2의 증명) 마디와 호의 개수가 주어졌을 때 최대 개수의 극대독립집합은 $g(n)$이므로 $g(n) \geq h(n)$.

이제 $g(n) \leq h(n)$임을 보이자. 보조정리 1-8에 의해 $g(n) = I(G)$

$= I(G')$

$\leq n-d+|N(w;G)/$ {완전 마디}$|$

$\cdot m(d-|\Gamma(w;G)$-{완전 마디}$|)$

$\leq h(n)$. (증명 끝)

(정리 1의 증명) M_dK_{n-d}는 $h(n)$과 같은 그래프이므로 성립한다. (증명 끝)

따라서 M_dK_{n-d}라는 호의 개수가 이 그래프만큼 있을 때 극대독립집합의 개수가 최대가 되는 그래프이다.

4. 결론

본 연구는 마디와 호의 개수가 주어졌을 때 극대 독립 집합의 개수가 최대인 연결 그래프에 대하여 다루었다. 호의 개수가 $|E|=(n-d-1)(n-2)/2+(n-d)d+|E(M_d)|$, 단 d는 n보다 작은 양의 정수로 주어질 경우는 최대 개수의 극대 독립 집합을 갖는 그래프는 Moon-Moser의 그래프 M_d와 완전 그래프 K_{n-d}가 완전 연결된 구조를 갖는다. 이는 [4]의 그래프와 Moon-Moser의 그래프를 부분 그래프로 갖는 구조이다.

그러나 임의의 호의 개수를 가지는 그래프에 대하여 최대 개수의 극대 독립 집합을 갖는 그래프가 항상 이들 그래프를 부분 그래프로 갖는 것은 아니다. 만약 극대 독립 집합내에 포함되는 마디들이 최소 차수를 갖는다면 최대 개수의 극대 독립 집합을 갖는 그래프의 구조는 대단히 간단해 진다. 이것이 성립하지 않기 때문에 호의 개수가 임의일 때에는 최대 개수의 극대 독립 집합을 갖는 그래프의 형태가 일정하지 않게 된다.

어떤 연결 그래프 G에서 임의의 호를 하나 더 붙였을 때(또는 호를 하나 삭제하였을 때) 극대 독립 집합의 개수가 항상 증가(또는 감소)하는 특성을 갖도록 호를 선택하는 방법에 대한 연구가 필요하다.

참 고 문 헌

[1] 이창수, 마디와 호의 개수가 주어졌을 때 최대개수의 극대독립집합을 갖는 연결그래프에 관한 연구, 서울대학교 박사학위 논문, 1994

[2] L.I. Burke, A neural design for solution of the maximal independent set problem, *EJOR* vol. 62, pp186-193, 1992

[3] Z. Füredi, The number of maximal independent sets in coonected graphs, *J. Graph Theory* vol. 11, pp463-470, 1987

[4] J.R. Griggs, C.M. Grinsted and D.R. Guichard, The maximum number of maximal independent sets in a connected graph, *Discrete Mathematics* vol. 68, pp211-220, 1988

[5] F. Harary, *Graph Theory*, Addison-Wesley, Mass., 1969

[6] Q. Huang, On the decomposition of K_n into complete m-partite graphs, *J.Graph Theory* vol. 15, pp1-6, 1991

[7] D.S. Johnson, M. Yannakakis and H. Papadimitriou, On generating all maximal independent sets, *Inf. Proc. Letters* vol. 27, pp119-123, 1988

[8] E.L. Lawler, J.K. Lenstra and A.H.G. Rinnooy Kan, Generating all maximal independent sets:NP-hardness & polynomial-time algorithms, *SIAM J. Comput.* vol. 9, pp553-565, 1980

[9] J.W. Moon and L. Moser, On cliques in graphs, *Israel J. of Math.* vol. 3, pp23-28, 1965

[10] B.E. Sagan, A note on independent sets in trees, *SIAM J. Discrete Math.* vol 1, pp105-108, 1988

[11] H.S. Wilf, The number of maximal independent sets in a tree, *SIAM J. Alg. Discrete Methods* vol. 7, pp125-130, 1986