일반적 손실함수 하에서의 파라미터 설계방법

정 현 석* · 고 선 우** · 염 봉 진*

Parameter Design under General Loss Functions

Hyun-Seok Jeong* · Sun-Woo Ko** · Bong-Jin Yum*

〈Abstract〉

In a recent article, Leon et al. lucidly explained the ideas of the Taguchi two-stage procedure for parameter design optimization, and proposed alternative performance measures called PerMIA to the signal-to-noise ratios. On the other hand, Box proposed an empirical approach to the problem based upon monotone transformations of the performance characteristic(y). This paper develops procedures for parameter design optimization under the assumptions that the expected loss(not necessarily a mean squared error loss) is increasing with respect to the variance of the error in y, and that the mean of y satisfies certain conditions of adjustability. It turns out that the variance of the error in y can play the role of PerMIA, and it is further shown that the derived PerMIA can be adapted to the Box empirical procedure for the minimization of the expected loss in the original metric.

1. 서 론

다구치가 제안한 파라미터 설계 또는 로버스트 설계(robust design)의 목적은 제품이나 공정의 경제적 설계 또는 개선을 통해 일관성 있는 품질의 제품을 소비자에게 제공함으로써 기업의 생산성과 경쟁력 향상을 도모하자는 것이다. 여기서 '일관성 있는 품질'이란 사용환경으로 부터 발생하는 교란이나, 생산환경에서 접하게 되는 작업자, 기계, 원료의 차이와 같은 비안정적 요소나, 사용 부품이 노후화 또는 열화함으로써 그 값이 변화하는 것과 같은 다양한 '잡음'하에서도 제품의 성능특성치가 바람직한 값(목표치)을 가능한 한 가깝게 유지해 주는 것을 말한다. 다구치는 '일관성 있는 품질'의 척도로서 망목특성의 경우 다음의 2차 손실 함수 $L(y,t)$와 그 기대치 R을 제안하였다.

$$L(y,t) = k(y-t)^2$$
$$R = E\{L(y,t)\} = k\{\sigma_y^2 + (\mu_y - t)^2\} \quad (1)$$

y = 성능특성치
t = 목표치
k = 비례상수
μ_y = $E(y)$
σ_y^2 = $Var(y)$.

식 (1)에서 σ_y^2과 μ_y는 일반적으로 설계 파라미터 벡터(또는 설계변수 벡터) d의 함수이다. 다구치의 파라미터 설계의 원리는 σ_y^2이 작고 μ_y가 t에 일치하도록 d값을 결정하는 것이다. 다구치[1]는 설계변수 벡터

* 한국과학기술원 산업공학과
** 럭키금성 경영기술 지원센타.

d를 SN비 = $10\log(\mu_y^2/\sigma_y^2)$에 영향을 미치는 벡터 c와 μ_y에만 영향을 미치는 벡터 a로 분리한 다음, 위의 최적화 문제를 다음과 같은 2단계 과정을 거처 해결할 것을 제안하였다.

(1) SN비를 최대로 하는 c^*값을 결정한다.

(2) $c=c^*$에서 a를 이용하여 μ_y를 목표치 t로 조정한다.

실제 문제에서는 μ_y와 σ_y^2의 참값을 알 수 없기 때문에 실험 데이타로 부터 추정하여 위의 과정을 수행하게 된다.

Leon 등[2]은 위의 2단계 최적화 과정이 식 (1)과 같은 형태의 기대손실과 다음과 같은 전이함수(transfer function. 성능특성치 y, 설계변수, 잡음간의 관계식)하에서 정당화될 수 있음을 보였다.

$$y=\mu_y(c,a)\ \varepsilon(N,c) \tag{2}$$

$\varepsilon(N,c)$ = 확률오차

N = 잡음인자 벡터

$E\ \{\ \varepsilon(N,c)\} = 1$

$Var\ \{\ \varepsilon(N,c)\} = \sigma_\varepsilon^2(c).$

아울러, 전이함수가 (2)와 같지 않을 때에는 다구치의 SN비를 이용한 2단계 최적화 과정이 식 (1)의 기대손실을 최소화하는 데 실패할 수 있음을 지적하였으며, 주어진 문제에 따라 다른 형태의 SN비가 정의되어야 하는 데 이를 PerMIA(Performance Measure Independent of Adjustment)라고 불렀다. 한편, Box[3]는 특성치의 변환을 통해 a와 c를 분리하여 2단계 최적화를 수행하는 경험적 방법을 제안하였다.

Wu[4]가 지적하였듯이, PerMIA를 이용한 *Leon* 등의 2단계 과정은 전이함수에 대한 지식을 필요로 하며, 손실함수의 정확한 형태를 알아야 하고, 실험 전에 조정인자 a가 무엇인가를 파악해야 한다는 제약이 있다. Box의 경험적 접근방법은 첫 번째와 세 번째는 필요로 하지 않으나 두 번째를 가정하고 있으며, 아울러 특성치 y의 평균과 분산에 대해 특수한 관계를 가정하고 있다.(식(7) 참조).

Nair와 Pregibon[5]이 지적한 바와 같이, 실제 문제에 있어서 손실함수를 엄밀히 규정하는 것은 어려울 때가 많으므로 다구치나 그밖의 연구자들이 상정하고 있는 2차 손실함수보다 덜 제한적인 손실함수하에서의 파라미터 설계방법을 개발할 필요가 있다. 아울러 특성치의 평균도 항상 목표치로 조정 가능한 것은 아니기 때문에 파라미터 설계시 이와같은 점도 충분히 고려되어야 한다 [4,6].

본 논문에서는 종래의 연구보다 일반화된 전이함수와 손실함수 하에서 파라미터 설계를 수행하기 위한 PerMIA를 개발하였다. 그리고, 유도된 PerMIA는 Box의 변환 방법을 통하여 기대손실을 최소화하는 데 활용될 수 있음을 보였다.

2. 모형과 PerMIA

먼저, 설계변수를 2개의 그룹, c와 a로 나누되, 특성치 y에 작용하는 확률오차 ε에는 c만이 영향을 미친다고 가정한다. 물론, ε은 잡음인자 N에 의해서도 영향을 받는다. 본 논문에서는 특정한 목표치 t가 정해져 있는 소위 望目特性을 다루고자 하며, 이 특성에 대한 손실함수를 $L(y,t)$라 할 때 기대손실은 다음과 같이 정의된다.

$$R(c,a)=E_N\ \{\ L(y,t)\}.$$

파라미터 설계 문제는 $R(c,a)$를 최소로하는 c와 a 값을 찾는 것이다.

실제 파라미터 설계에서는 설계변수 간의 상호 의존성, 또는 기술적 제한 때문에 어떤 설계변수가 취할 수 있는 값에 제한이 가해질 수 있다. 따라서, y의 평균을 원하는 값으로 조정하는 것이 때로는 불가능할 수도 있다. 본 논문에서 제시하고자 하는 PerMIA는 다음과 같은 조정의 개념에 근거를 두고 있다.

함수 $u: C\cdot A \rightarrow U$를 고려하자. 단,

$C = \{c\}$

$A = \{a|c\}$ =c가 주어졌을 때 a의 집합

$C\cdot A = \bigcup_{c\in C} c\times A = (c,a)$의 집합

$U = u$의 범위

정의. 어떤 $c(\in C)$에 대해 $u(c,a)=\alpha$인 $a(\in A)$가 존재하면, 함수 $u: C \cdot A \rightarrow U$는 c에서 '$\alpha-$ 조정가능'이라고 부른다.

위와 같은 정의를 바탕으로 다음과 같은 범주의 손실함수에 대해 PerMIA를 개발하고자 한다. 먼저 기대손실이 다음과 같이 표현가능하다고 하자.

$$R(c,a) = f\{\mu_y(c,a), \sigma_y^2(c,a)\} \tag{3}$$

단, $\mu_y(c,a)=E(y)$, $\sigma_y^2(c,a)=Var(y)$이다. 예를 들어,

$$L(y,t) = k[\exp\{q(y-t)\}-1]^2$$

이고(단, q는 양의 상수), y가 정규분포를 따른다면,

$$R(c,a) = k[\exp\{2q(\mu_y-t)+2q^2\sigma_y^2\} -2\exp\{q(\mu_y-t)+q^2\sigma_y^2/2\} + 1]$$

이 되어 (3)의 형태를 갖는다. 다구치와 그밖의 연구자들이 고려한 2차 손실함수의 기대손실(식(1) 참조)은 (3)의 특수한 경우이다.

특성치 y, 설계변수, 확률오차 간의 전이함수에 대해서는 어떤 특별한 형태를 가정하지는 않으나, 특성치 y의 분산에 관해 다음과 같은 형태를 갖는다고 가정한다.

$$\sigma_y^2(c,a) = g\{\mu_y(c,a), \sigma_\varepsilon^2(c)\} \tag{4}$$

여기서,

$$\sigma_\varepsilon^2(c) = Var\{\varepsilon(N,c)\}$$

이다. 식(3)과 (4)로 부터,

$$R(c,a) = h\{\mu_y(c,a), \sigma_\varepsilon^2(c)\} \tag{5}$$

이상의 모형에서, $c^*(\in C)$가 $\sigma_\varepsilon^2(c)$를 최소로 하는 값이고, 평균은 항상 목표치에 맞추는 것으로 할 때, 만일 식(5)의 $R(c,a)$가 $\sigma_\varepsilon^2(c)$의 증가함수이고 μ_y가 c^*에서 '목표치-조정가능'하면 $\sigma_\varepsilon^2(c)$는 PerMIA가 된다는 것을 다음과 같이 보일 수 있다. 먼저, μ_y가 목표치-조정가능하므로 $A=\{a|c^*\}$로 부터 다음을 만족하는 $a^*(c^*)$를 찾을 수 있다.

$$\mu_y\{c^*, a^*(c^*)\} = t.$$

그리고, $\mu_y(c,a)=t$ 를 만족하는 모든 $(c,a)\in C \cdot A$에 대해

$$\begin{aligned} R(c,a) &= h\{\mu_y(c,a)=t, \sigma_\varepsilon^2(c)\} \\ &\geq h\{\mu_y(c,a)=t, \sigma_\varepsilon^2(c^*)\} \\ &= h\{\mu_y(c^*,a^*(c^*))=t, \sigma_\varepsilon^2(c^*)\} \\ &= R(c^*,a^*(c^*)) \end{aligned}$$

가 성립하므로, 식 (5)의 $R(c,a)$는 다음의 2단계 과정을 거쳐 최소화할 수 있다.

1. $\sigma_\varepsilon^2(c)$를 최소로 하는 $c^*(\in C)$를 찾는다.
2. a를 $a^*(c^*)$로 조정하여 $\mu_y\{c^*,a^*(c^*)\}=t$가 되도록 한다.

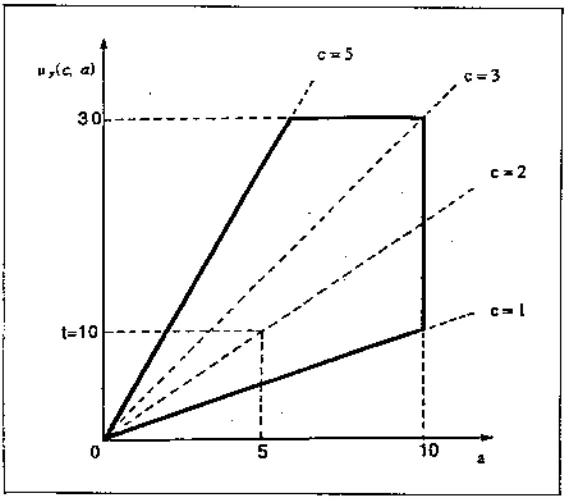
이상의 예로서, 식(2)의 전이함수와 2차 손실함수를 상정한 경우를 고려하면,

$$\begin{aligned} R(c,a) &\propto \sigma_y^2(c,a) + \{\mu_y(c,a)-t\}^2 \\ &= \{\mu_y\}^2(c,a)\,\sigma_\varepsilon^2(c) + \{\mu_y(c,a)-t\}^2 \end{aligned} \tag{6}$$

이므로 식(5)의 형태를 따르고 $\sigma_\varepsilon^2(c)$의 증가함수가 된다. 따라서, $\mu_y(c,a)=t$ 가 되어야 한다는 제약하에서 μ_y가 c^*에서 '목표치-조정가능'하면 식 (6)의 $R(c,a)$는 위의 2단계 과정을 거쳐 최소화할 수 있다.

다른 예로서, 다음과 같은 경우를 생각해 보자.

$\sigma_\varepsilon^2(c) = (c-2)^2 + 1$
$\mu_y(c,a) = ac$
$C = \{1 \leq c \leq 5\}$
$A = \left\{ \begin{array}{l} \{0 \leq a \leq 10 \mid 1 \leq c \leq 3\} \\ \{0 \leq a \leq 30/c \mid 3 \leq c \leq 5\} \end{array} \right\}$
$t = 10.$



〈그림 1〉 평균의 조정성에 관한 예

그림 1에 $c, a, \mu_y(c, a)$간의 관계를 보였다. 만일 이 예제에서의 $R(c,a)$가 식 (5)와 같은 형태를 갖고 $\sigma_\varepsilon^2(c)$의 증가 함수이면 $R(c,a)$를 다음과 같이 2단계를 거쳐 최소화 할 수 있다.

1. $\sigma_\varepsilon^2(c)$를 최소로 하는 $c^*(\in C)$는 2이다.
2. $c^*=2$에서 μ_y는 '목표치-조정가능'하며(그림1 참조), 이는 a를 $a^*(c^*)=5$에 맞춤으로써 가능하다.

Box[3]와 Nair, Pregibon[7]은 2차 손실함수와

$$\sigma_y^2(c,a) = [\, f(\mu_y(c,a))\,]^2 P(c) \tag{7}$$

라는 가정아래 파라미터 설계절차를 논의하였는데, 이 가정 하에서

$$R(c,a) \propto [f(\mu_y(c,a))\,]^2 P(c) + \{\mu_y(c,a) - t\}^2 \tag{8}$$

이 되므로 $P(c)$를 $\sigma_\varepsilon^2(c)$로 해석한다면 식 (8)은 식 (5)의 특수한 경우로 볼 수 있다.

본 논문에서 제안한 2단계 과정을 수행하기 위해서는 대부분의 경우에 $\sigma_\varepsilon^2(c)$를 실험 데이타로 부터 추정해야 한다. 예를 들어, 전이함수가 식 (2)와 같다면 $\sigma_\varepsilon^2(c)$는 다구치의 SN비와 대등하며 $10log(\bar{y}^2/s^2)$로 추정가능 하다(단, $\bar{y}$는 표본평균, s^2은 표본분산). 그리고, 가장 간단한 가법 모형 $y=\mu_y(c,a)+\varepsilon(N,c)$가 성립한다면, $\sigma_\varepsilon^2(c)$는 y의 표본분산으로 추정된다. 이와 같이 전이함수에 관한 지식이 충분한 다행스런 경우에는 분산분석 등을 통해 c와 a를 분리하고, $\sigma_\varepsilon^2(c)$를 최소로 하는 c^*를 파악한 후, μ_y가 c^*에서 목표치-조정가능한가를 판정하여 $R(c,a)$를 최소로 하는 설계조건을 결정할 수 있다. 그러나, 전이함수에 관해 충분한 지식이 없는 경우에는 Box[3]에 의해 제안된 변환에 의한 경험적 방법을 활용할 수 있다.

3. 변 환

Box[3]는 설계변수를 특성치의 평균에만 영향을 미치는 a와 분산에 영향을 미치는 c로 분리하기 위해 다음과 같은 변환을 제안하였다.

$$Y = \left\{ \begin{array}{ll} y^\lambda, & \lambda \neq 0 \\ ln\, y, & \lambda = 0 \end{array} \right.$$

매개변수 λ는 분리를 극대화하고 Y의 평균과 분산에 대한 모형이 단순화되도록 선택된다. 그다음 Y의 분산을 최소로 하는 c 값을 결정하고 a를 이용하여 μ_Y를 목표치로 조정하여 2차 손실함수의 기대치를 최소화 한다. 본 논문에서 제안한 모형에 대한 파라미터 설계는 Box와 유사한 절차를 거쳐 수행될 수 있다.

선택된 λ에서 μ_Y와 σ_Y^2을 Y의 평균과 분산이라고 하면, 다음이 성립함을 보일 수 있다.

$$\mu_y \simeq \left\{ \begin{array}{ll} \{\mu_Y(c,a)\}^{1/\lambda}, & \lambda \neq 0 \\ exp\{\mu_Y(c,a)\}, & \lambda = 0 \end{array} \right.$$

$$\sigma_y^2 \simeq \left\{ \begin{array}{ll} \lambda^{-2}\{\mu_Y(c,a)\}^{2(1-\lambda)/\lambda}\sigma_Y^2(c), & \lambda \neq 0 \\ exp\{2\mu_Y(c,a)\}\,\sigma_Y^2(c), & \lambda = 0 \end{array} \right.$$

따라서, 식 (3)의 R을 근사적으로 $\mu_Y(c,a)$와$\sigma_Y^2(c)$의 함수로 나타낼 수 있다. R이 $\sigma_Y^2(c)$의 증가함수라고 가정하자. 그리고,$\sigma_Y^2(c)$를 최소로하는 c^*에서 μ_y

가 목표치-조정가능하다면, 다시말하여 μ_Y가

$$\begin{cases} t^{\lambda}, & \lambda \neq 0 \\ lnt, & \lambda = 0 \end{cases} \quad (9)$$

로 조정가능하다면, 2절의 결과에 의해 $\sigma_Y^2\ (c)$는 R의 2단계 최적화를 위한 PerMIA로 이용될 수 있다. 실제로는 $ln\ s_Y$를 분석하여(단, s_Y는 Y의 표본 표준편차) c^*를 결정하는 것이 보통이며[3], 그 다음 a를 $a^*\ (c^*)$로 조정하여 (9)의 값에 맞추게 된다.

Box([3], p.6)가 고려한 예에 위의 절차를 적용하면 다음과 같다. 우선, 데이타는 2^{8-4} 일부실시법을 사용하여 A부터 H까지 8개의 설계변수에 대한 실험을 통해 얻은 것인데, 각 실험점에서 특성치를 4번 반복 관측하였다. 평균과 산포의 효과에 대한 λ−plot으로부터 y의 역변환(즉, $\lambda = -1$)을 통해 설계변수의 분리와 모형의 단순화를 달성할 수 있었으며, 이 변환하에서 설계변수 D가 Y의산포에, B, D, G가 Y의 평균에 영향을 미치는 것으로 판정되었다. 본 논문의 기호로 바꾸어 표현하면,

$$c = D$$
$$a = (B,\ G)$$

가 된다. 위 예에서 모든 설계변수는 연속적이며,

$$C = \{c\} = \{D: -1 \leqq D \leqq 1\}$$
$$A = \{a \mid c\} = \{(B,\ G): -1 \leqq B \leqq 1, -1 \leqq G \leqq 1\}$$

이고, $t = 0.02$, 그리고 R은 $\sigma_Y^2\ (c)$의 증가함수라고 가정하자. R을 최소로 하는 설계변수의 값은 다음 2단계 절차를 거쳐 결정할 수 있다. 먼저, σ_Y^2를 최소로 하는 c^*, 즉, D^*값은 Box의 결과로 부터 -1임을 알 수 있다. 이 값에서 Y의 평균은 다음과 같이 추정할 수 있다.

$$\hat{\mu}_Y = 60 + 13.51\ B + 10.14\ G$$

그리고, 영역 $A = \{(B,G) \mid D^*\}$에서 $\hat{\mu}_Y$의 범위는 (36.85, 83.65)이다. 목표치 t^{λ} (= 50)이 이 범위안에 포함되므로 $\hat{\mu}_Y$는 목표치-조정가능하며, 이는 B,G를 다음 관계식을 만족하도록 결정함으로써 달성할 수 있다.

$$13.51\ B + 10.14\ G = -10.$$

위 예에서 R은 원래 Box가 가정한 2차 손실함수의 기대치가 아닌 보다 일반적인 식 (3)을 가정하였다는데 유의할 필요가 있다.

4. 결 론

본 논문에서는 다구치나 그 밖의 연구자에 의해 가정된 2차 손실함수보다 일반화된 손실함수 하에서 PerMIA와 이를 활용한 2단계 파라미터 설계 최적화 방법을 개발하였다. 그리고, Box의 변환절차를 통해 위 방법을 어떻게 수행할 것인가를 보였다.

위 방법의 한 가지 문제점은 평균을 조정하기 위한 a가 존재하지 않거나, 존재하더라도 μ_Y를 식 (9)의 값에 일치시키도록 하는 $a^*\ (c^*)$값이 $A = \{a \mid c^*\}$에 존재하지 않을 때에는 실패할 수 있다는 것이다. 이문제점은 본 논문의 방법 뿐만 아니라 다구치와 그 밖의 연구자들이 제안한 방법에서도 마찬가지로 등장한다. 이러한 경우에 설계변수 영역의 탐색을 통해 R을 직접 최소화하는 방법등이 연구되어야 한다고 생각된다.

참고문헌

[1] Taguchi, G. and Phadke, M. S., "Quality Engineering through Design Optimization," *GLOBECOM '84 IEEE Global Telecommunications Conferences*, Atlanta, Georgia, pp.1106-1113, 1984.

[2] Leon, R. V., Shoemaker, A. C., and Kackar, R. N., "Performance Measures Independent of Adjustment, An Explanation and Extension of Taguchi's Signal-to-noise Ratios," *Technometrics*, Vol.29, pp.253-265. Response, pp.283-285, 1987.

[3] Box, G. E. P., "Signal-to-noise Ratios, Performance Criteria, and Transformations," *Technometrics*, Vol. 30, pp.1-17, 1988.

[4] Wu, C. F. J. Discussion to Leon et al. (1987)", *Technometrics*, Vol.29, pp.279-281, 1987.

[5] Nair, V. N. and Pregibon, D.,"Discussion to Box (1988)", *Technometrics*, Vol.30, pp.24-29, 1988.

[6] Dehnad, K., "Discussion to Leon, et al.(1987)", *Technometrics*, Vol.29, pp.271-273, 1987.

[7] Nair, V. N. and Pregibon, D., "A Data Analysis Strategy for Quality Engineering Experiments," *AT&T Technical Journal*, Vol.65, pp.73-84, 1986.

정현석

연세대학교 응용통계학과에서 학사, KAIST 산업공학과에서 석사를 마치고, 현재 박사과정에 재학중이다. 주요 관심분야는 품질관리, 신뢰성공학 등 이다.

고선우

현재 럭키금성 경영기술 지원센타에 재직중이며, 고려대학교 산업공학과에서 학사 그리고 KAIST에서 석사 및 박사 학위를 취득하였다. 주요 관심분야는 품질공학, 실험계획, 다구찌 방법 등이다.

염봉진

현재 한국과학기술원 산업공학과 교수로 재직중이며, 서울대학교 전자공학과에서 학사, 오레곤 주립대 산업공학과에서 석사, 그리고 오하이오 주립대 산업공학과에서 박사학위를 취득하였다. 주요 관심분야는 품질공학, 신뢰성공학, 계측관리 등이다.