최소비용문제의 퇴화 정점 최적해에 대한 감도분석[1)]

정 호 연* · 박 순 달**

Sensitivity Analysis on the Degenerate Tree Solution of the Minimum Cost Flow Problem

Ho-yeon Chung · Soon-dal Park

〈Abstract〉

The purpose of this paper is to develop a method of the sensitivity analysis that can be applicable to a degenerate tree solution of the minimum cost flow problem.

First, we introduce two types of sensitivity analysis. A sensitivity analysis of Type 1 is the well known method applicable to a spanning tree solution. However, this method have some difficulties in case of being applied to a degenerate tree solution. So we propose a sensitivity analysis of Type 2 that keeps solutions of upper bounds remaining at upper bounds, those of lower bounds at lower bounds, and those of intermediate values at intermediate values.

For the cost coefficient, we present a method that the sensitivity analysis of Type 2 is solved by using the method of a sensitivity analysis of Type 1. Besides we also show that the results of sensitivity analysis of Type 2 are union set of those of Type 1 sensitivity analysis.

For the right-hand side constant or the capacity, we present a simple method for the sensitivity analysis of Type 2 which uses arcs with intermediate values.

1. 서 론

이 논문에서는 다음과 같은 최소비용문제의 감도분석을 다루고자 한다.

$$\text{Min} \sum_{(i,j)\in A} c_{ij}x_{ij}$$

$$s.t \ \sum_j x_{ij} - \sum_j x_{ji} = b_i, \quad \forall\, i \in N$$

$$0 \leqq x_{ij} \leqq u_{ij}, \quad \forall\, (i,j) \in A$$

이 문제를 네트워크 단체법으로 풀면 최적해는 정점 최적해가 되며 나무(tree)구조의 최적기저를 갖게 된다. 이 때 감도분석은 이 최적기저를 유지하는 계수들의 범위를 찾는 것이다. 그러나 주어진 문제에 대한 최적해가 퇴화(degeneracy)인 경우에는 최적기저에 0이나 u_{ij}가 포함되므로 이 감도분석을 적용하면 0의

1) 이 논문은 1994학년도 전주대학교 학술 연구조성비에 의해 연구되었음

* 전주대학교 산업공학과

** 서울대학교 산업공학과

유통량이 흐르던 호에 비영의 유통량이 흐르게 되거나 u_{ij}의 유통량이 흐르던 호에 0의 유통량이 흐를 수 있게 된다. 이것은 유통량이 전혀 없던 호에 새로운 흐름을 허용하거나 최대의 유통량이 흐르던 호에 아무 유통량도 흐르지 못하게 하여 기존의 결정된 정책을 바꾸어야 하는 현실적인 어려움이 있다.

따라서 다음과 같은 새로운 감도분석의 개념을 도입하고자 한다. 먼저 최소비용문제의 최적해 x^*가 주어지면 각 호는 주어진 유통량에 따라 다음 세 가지 종류의 호로 나눌 수 있다.

$$B(X^*) = \{(i,j) \in A : 0 < x^*_{ij} < u_{ij}\}$$
$$L(X^*) = \{(i,j) \in A : x^*_{ij} = 0\}$$
$$U(X^*) = \{(i,j) \in A : x^*_{ij} = u_{ij}\}$$

이 때 종래의 감도분석을 제 1 종 감도분석이라 하고 새로운 감도분석을 제 2 종 감도분석이라 하여 다음과 같이 정의하자.

[정의 1] 제 2 종 감도분석

최소비용문제의 최적해가 주어졌을 때 각 호의 유통량에 따라 결정되는 최적해의 구조(B,L,U)를 유지하는 계수의 변화 범위를 구하는 것을 제 2 종 감도분석이라 한다.

따라서 제 2 종 감도분석은 0의 유통량이 흐르는 호는 계속 0의 유통량을 흐르게 하고, 용량상한값이 흐르는 호는 계속 용량상한값을 갖도록 하며, $0 < x_{ij} < u_{ij}$인 호는 계속 $0 < x_{ij} < u_{ij}$인 호로 유지하는 계수들의 범위를 구하는 감도분석이라 할 수 있다.

2. 목적함수계수에 대한 감도분석

최소비용문제에 대한 최적해 X^*가 주어졌다고 하자. 이 때 목적함수계수 c_{ij}가 c_{ij}'로 변하면 이에 대응되는 최적해와 최적해의 구조(B,L,U)도 변한다. 그러나 목적함수계수 c_{ij}가 c_{ij}'로 변하더라도 최적해의 구조(B,L,U)가 변하지 않고 그대로 유지되는 범위가 있는데 그러한 목적함수계수의 변화 범위를 알아보는 것이 목적함수계수에 대한 제 2 종 감도분석이다.

먼저 최소비용문제에서 각 마디에 대응되는 쌍대변수를 w_i라 할 때 임의의 가능해 X가 최적해가 되기 위한 조건으로 다음과 같은 정리가 있다[3][8][9].

[정리 1] 최소비용문제에 대한 임의의 가능해 X가 주어졌을 때 이 가능해가 최적이기 위한 필요충분조건은 다음 식을 만족하는 것이다.

$$\overline{c_{ij}} = c_{ij} - w_i + w_j > 0 \text{ 이면 } x_{ij} = 0$$
$$\overline{c_{ij}} = c_{ij} - w_i + w_j < 0 \text{ 이면 } x_{ij} = u_{ij}$$
$$\overline{c_{ij}} = c_{ij} - w_i + w_j = 0 \text{ 이면 } 0 \le x_{ij} \le u_{ij}$$

(증명) 각 마디에 대한 쌍대변수를 $w_i, i \in N$ 라 하고 호의 상한제약과 하한제약에 대한 쌍대변수를 각각 $\delta_{ij}, (i,j) \in A$, $\alpha_{ij}, (i,j) \in A$라 하자. 이 때 임의의 가능해 X가 주어졌을 때 이 가능해가 최적이기 위해서는 Kuhn - Tucker 조건에 의해 다음 식을 만족시켜야 한다. 즉,

$$c_{ij} - w_i + w_j - \alpha_{ij} + \delta_{ij} = 0 \quad (1)$$
$$\alpha_{ij} \cdot x_{ij} = 0 \quad (2)$$
$$\delta_{ij}(u_{ij} - x_{ij}) = 0 \quad (3)$$
$$\sum_j x_{ij} - \sum_j x_{ji} = b_i \quad (4)$$
$$0 \le x_{ij} \le u_{ij} \quad (5)$$
$$\alpha_{ij} \ge 0 \quad (6)$$
$$\delta_{ij} \ge 0 \quad (7)$$
$$w_i : \text{비제약 변수} \quad (8)$$

먼저 위의 식(1)에 의해 $c_{ij} - w_i + w_j = \alpha_{ij} - \delta_{ij}$ 가 성립한다. 여기서 α_{ij}와 δ_{ij}는 동시에 0보다 클 수 없다. 즉, $\alpha_{ij} \cdot \delta_{ij} = 0$ 이다. 따라서 $c_{ij} - w_i + w_j$ 의 조건에 따라 다음 세 경우로 나누어 생각할 수 있다.

경우1 : 만일 $c_{ij} - w_i + w_j > 0$ 이라면 $\alpha_{ij} > 0$ 이 되고 식 (2)에 의해 $x_{ij} = 0$ 이 성립하며, 이 때 식 (3)에 의해 $\delta_{ij} = 0$ 이 된다.

경우2 : 만일 $c_{ij} - w_i + w_j < 0$ 이라면 $\delta_{ij} > 0$이 되고 식 (3)에 의해 $x_{ij} = u_{ij}$ 가 성립하며, 이 때 식 (2)에

의해 $\alpha_{ij}=0$ 이 된다.

경우3 : 만일 $c_{ij}-w_i+w_j=0$ 이라면 $\alpha_{ij}=\delta_{ij}$ 가 되어 만일 $\alpha_{ij}=\delta_{ij}>0$ 일 때는 $x_{ij}=0=u_{ij}$ 가 성립하며, 만일 $\alpha_{ij}=\delta_{ij}=0$ 일 때는 식(5)로 부터 $0\leq x_{ij}\leq u_{ij}$ 가 성립한다.

결국 주어진 가능해 x_{ij} 와 w_i, α_{ij}, δ_{ij} 가 최적이기 위해서는

$c_{ij}-w_i+w_j>0$ 일 때 $x_{ij}=0$

$c_{ij}-w_i+w_j<0$ 일 때 $x_{ij}=u_{ij}$

$c_{ij}-w_i+w_j=0$ 일 때 $0\leq x_{ij}\leq u_{ij}$

를 만족하면 된다.

역으로 증명해 보자.

이 때에는 주어진 임의의 가능해 x_{ij} 와 $w_i, \alpha_{ij}, \delta_{ij}$ 가 아래 조건 즉,

$c_{ij}-w_i+w_j>0$ 일 때 $x_{ij}=0$

$c_{ij}-w_i+w_j<0$ 일 때 $x_{ij}=u_{ij}$

$c_{ij}-w_i+w_j=0$ 일 때 $0\leq x_{ij}\leq u_{ij}$

을 만족하면 식(1) - 식(8)까지의 Kuhn-Tucker 조건을 만족하게 되어 최적해가 된다는 것을 보이면 된다.

경우1 : $c_{ij}-w_i+w_j>0$ 일 때 $x_{ij}=0$ 이면 식(1)에 의해 $\alpha_{ij}-\delta_{ij}>0$ 이 되고, $x_{ij}=0$ 이라고 했으므로 식(3)에 의해 $\delta_{ij}=0$ 이 된다. 따라서 이 때 $\alpha_{ij}>0$ 이 성립하여 Kuhn-Tucker 조건을 만족한다.

경우2 : $c_{ij}-w_i+w_j<0$ 일 때 $x_{ij}=u_{ij}$ 이면 식(1)에 의해 $\alpha_{ij}-\delta_{ij}<0$ 이 되고 $x_{ij}=u_{ij}$ 이므로 식(2)에 의해 $\alpha_{ij}=0$ 가 된다. 따라서 이 때 $\delta_{ij}>0$ 이 성립하여 역시 Kuhn-Tucker 조건을 만족한다.

경우3 : $c_{ij}-w_i+w_j=0$ 일 때 $0\leq x_{ij}\leq u_{ij}$ 이면 식(1)에 의해 $\alpha_{ij}=\delta_{ij}$ 가 된다. 이 때 만일 $0<x_{ij}<u_{ij}$ 라면 식 (2)와 식(3)에 의해 $\alpha_{ij}=\delta_{ij}=0$ 이 성립한다.

만일 $x_{ij}=0$ 이라면 식(3)에 의해 $\delta_{ij}=0$ 이 되어 역시 $\alpha_{ij}=0$ 이 된다. 만일 $x_{ij}=u_{ij}$ 라면 식(2)에 의해 $\alpha_{ij}=0$ 이 되며 따라서 $\delta_{ij}=0$ 이 된다.

위의 세 경우 모두 Kuhn-Tucker 조건을 만족하므로 주어진 가능해 x_{ij} 와 $w_i, \alpha_{ij}, \delta_{ij}$ 는 주어진 문제의 최적해가 된다.

[정리 1]에 대하여 목적함수에 대한 제 2 종 감도분석의 조건은 다음과 같다.

[종정리 2] 최적해 X^*가 주어졌을 때 호(i,j)에 대한 목적함수계수에 대한 제 2 종 감도분석은 다음 조건을 만족하는 c_{ij}'의 범위를 찾는 것이다.

$x_{ij}^*=0$ 일 때 $c_{ij}'-w_i^*+w_j^*\geq 0$

$x_{ij}^*=u_{ij}$ 일 때 $c_{ij}'-w_i^*+w_j^*\leq 0$

$0<x_{ij}^*<u_{ij}$ 일 때 $c_{ij}'-w_i^*+w_j^*=0$

(증명) 최소비용문제에 대한 최적해 X^*는 Kuhn-Tucker조건에 의해 [정리 1]의 식(1)-(8)을 만족시킨다.

여기서 목적함수계수 c_{ij}가 $c_{ij}'=c_{ij}+\theta$ 로 변했다고 하자. 그러면 Kuhn-Tucker 조건식이 만족되지 않게 된다. 그러나 바뀐 목적함수계수 c_{ij}'에 대해서 식(1)이 여전히 성립하면 즉,

$$c_{ij}'-w_i^*+w_j^*-\alpha_{ij}^*+\delta_{ij}^*=0 \tag{9}$$

이면 Kuhn-Tucker조건을 만족하게 된다. [정리 1]에 의하여 Kuhn-Tucker 조건을 만족하는 해는 주어진 최적해의 구조(B,L,U)를 계속 유지할 수 있다. 따라서 목적함수계수에 대한 제 2 종 감도분석은 Kuhn-Tucker 조건을 계속 만족하는 c_{ij}'의 변화 범위를 찾는 것과 같다.

이제 위의 Kuhn-Tucker 조건식 (2)-(9)식으로부터 만일 $x_{ij}^*=0$ 이면 식(2)에 의해 $\alpha_{ij}^*\geq 0$ 이 성립하고 식(3)에 의해 $x_{ij}^*\leq u_{ij}$ 가 되므로 $\delta_{ij}^*=0$이 된다. 이를 식(9)에 대입하면 $c_{ij}'-w_i^*+w_j^*\geq 0$ 가 성립한다. 만일 $x_{ij}^*=u_{ij}$ 이면 식(3)에 의해 $\delta_{ij}^*\geq 0$이 성립하고 식(2)에 의해 $x_{ij}^*\geq 0$ 이 되어 $\alpha_{ij}^*=0$ 이 된다. 이를 식(9)에 대입하면 $c_{ij}'-w_i^*+w_j^*\leq 0$ 가 성립한다. 만일 $0<x_{ij}^*<u_{ij}$ 이면 식(2)와 식(3)에 의해 $\alpha_{ij}^*=\delta_{ij}^*=0$ 이 성립하고 이를 식(9)에 대입하면 $c_{ij}'-w_i^*+w_j^*=0$ 이 성립한다. 따라서

$x_{ij}^*=0$ 이면 $c_{ij}'-w_i^*+w_j^*\geq 0$

$x_{ij}^*=u_{ij}$ 이면 $c_{ij}'-w_i^*+w_j^*\leq 0$

$0<x_{ij}^*<u_{ij}$ 이면 $c_{ij}'-w_i^*+w_j^*=0$

가 된다.

퇴화 정점 최적해가 주어져 있는 경우에는 $0<x_{ij}^*<u_{ij}$

인 호의 수가 n-1개 보다 적기 때문에 기저나무가 바로 정의되지 않는다. 기저나무가 바로 정의될 수 있는 경우는 정점 최적해에서 $0 < x^*_{ij} < u_{ij}$ 인 호의 수가 n-1개인 경우이다. 따라서 퇴화 정점 최적해가 주어진 경우에 기저나무를 만들려면 $0 < x^*_{ij} < u_{ij}$ 안 호에다 0 이나 용량상한값을 갖는 호를 포함시켜야 한다. 이때 포함될 수 있는 호의 모든 경우에 따라 형성되는 각각의 기저나무를 $T^1, \cdots, T^k$ 라 하자.

퇴화해가 주어진 경우에는 기저나무는 바뀌어도 최적해는 바뀌지 않기 때문에 $x^*_{kr} = 0$ 또는 $x^*_{kr} = u_{kr}$ 인 호(k, r)은 기저나무가 $T^1 \rightarrow T^2$로 $T^2 \rightarrow \cdots \rightarrow T^k$ 로 바뀌어도 계속 $x^*_{kr} = 0$ 또는 $x^*_{kr} = u_{kr}$ 인 값을 유지한다.

임의의 기저나무 T^j를 유지하는 제 1 종 감도분석의 범위를 θ^j라 할 때 이러한 개념을 이용하면 다음과 같은 정리를 유도할 수 있다.

[정리 3] 최소비용문제의 퇴화 정점 최적해가 주어졌을 때 $0 < x^*_{ij} < u_{ij}$인 호를 포함하여 만든 모든 기저나무를 $T^1, \cdots, T^k$라 하자. 이 때 목적함수계수 c_{ij}에 대한 제 2 종 감도분석 결과는 각 기저나무 T^k에서 구한 제 1 종 감도분석 결과인 θ^k 의 합집합이 된다. 즉, $\theta = \bigcup_{j=1}^{k} \theta^j$ 가 된다.

(증명) 최소비용문제에 대한 퇴화 정점 최적해 X^*가 주어졌을 때 목적함수계수 c_{ij} 에 대한 제 2 종 감도분석은 [종정리 2]를 만족하는 θ의 범위를 찾는 것이다.

지금 $0 < x^*_{ij} < u_{ij}$인 호를 포함하여 구성한 모든 기저나무를 $T^1, \cdots, T^k$ 라 하자. 여기서 T^k 에 대한 제 1 종 감도분석 결과를 θ^k라 하면 다음이 성립 됨을 보이면 된다.

$$\theta = \bigcup_{j=1}^{k} \theta^j$$

일반적인 선형계획문제 즉, m개의 제약식으로 구성된 문제에서, n-1개의 $\overline{c_{ij}} = 0$ 인 제약식과 m-(n-1)개의 $\overline{c_{ij}} \leq 0$ 또는 $\overline{c_{ij}} \geq 0$ 으로 구성된 문제의 해 공간은 n-1개 보다 적은 수의 $\overline{c_{ij}} = 0$ 인 제약식과 m-(n-1)개 보다 많은 수의 $\overline{c_{ij}} \leq 0$ 또는 $\overline{c_{ij}} \geq 0$ 으로 구성된 문제의 해 공간의 부분집합이 된다. 따라서 임의의 한 최적 기저나무T^k에 대한 제 1 종 감도분석 결과인 θ^k는 항상 $\theta \supseteq \theta^k, \forall k$가 성립한다. 따라서 $\theta \supseteq \bigcup_{j=1}^{k} \theta^j$가 된다.

다음 $\theta \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} \theta^j$ 임을 보이자.

먼저 $\bigcup_{j=1}^{k} \theta^j$ 에 속하지 않는 임의의 θ 값을 θ' 라 하자. 그러면 θ'는 어떤 $\theta^k, \forall k$에도 속하지 않는다. 이때 $\theta' \notin \theta^k$ 인 경우에 대하여

$x_{ij} = 0$ 일 때,

$\overline{c_{ij}}' = (c_{ij} + \theta') - w_i + w_j \geq 0, \quad (i, j) \in L^k$

$x_{ij} = u_{ij}$ 일 때,

$\overline{c_{ij}}' = (c_{ij} + \theta') - w_i + w_j \leq 0, (i, j) \in U^k$

$0 < x_{ij} < u_{ij}$일 때

$\overline{c_{ij}}' = (c_{ij} + \theta') - w_i + w_j = 0, (i, j) \in T^k$

의 수식을 만족하는 w값이 존재하지 않는다.

위의 문제에서 θ'가 포함된 $\overline{c_{ij}}'$식을 만족하는 해집합을 $S_{\theta'}$라 하고, θ'가 포함되지 않는 나머지 $\overline{c_{ij}}$식을 만족하는 해집합을 S_{T^k} 라 하자. 그러면 위 문제의 수식을 만족하는 w값이 존재하지 않기 때문에 $S_{\theta'} \cap S_{T^k} = 0$가 된다. 이 식은 모든 기저나무 $T^k, \forall k$에 대해서도 성립하기 때문에 $S_{\theta'} \cap S_{T^k} = 0, \forall k$ 가 된다. 따라서 $S_{\theta'} \cap (\bigcup_{j=1}^{k} S_{T^j}) = 0$ 가 된다. 이것은 θ'가 포함된 $\overline{c_{ij}}'$식과 θ'가 포함되지 않는 나머지 모든 $\overline{c_{ij}}$식을 합한 문제에 대한 쌍대변수 w가 존재하지 않는다는 것을 의미한다. 따라서 $\theta' \notin \theta$이다. 즉 $\bigcup_{j=1}^{k} \theta^j$에 속하지 않는 θ'는 θ에도 속하지 않는다. 따라서 $\theta \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} \theta^j$ 가 성립된다.

그러므로 $\theta = \bigcup_{j=1}^{k} \theta^j$ 이다.

퇴화 정점 최적해 X^*가 주어져 있을 때 위의 [정리 3]을 이용하여 목적함수계수 c_{ij}에 대한 제 2 종 감도분석을 수행하는 방법은 다음과 같다.

■ 계산 방법

단계0 : ((B, L, U)의 분류)

최적해에서 주어진 유통량에 따라 다음 3 종류의 호로 분류한다.

$B(X^*) = \{(i,j) \in A : 0 < x_{ij}^* < u_{ij}\}$

$L(X^*) = \{(i,j) \in A : x_{ij}^* = 0\}$

$U(X^*) = \{(i,j) \in A : x_{ij}^* = u_{ij}\}$

단계1 : (기저나무 T^j 형성)

(1) B 에 $x_{ij}^* = 0$ 이나 $x_{ij}^* = u_{ij}$ 인 호를 포함시켜 기저나무 T^j를 만든다.

(2) 기저나무 T^j 에 대한 쌍대변수값 w를 계산한다.

(3) 기저나무 T^j를 유지하는 제 1 종 감도분석의 범위 θ^j를 구한다.

위의 과정을 가능한 모든 기저나무$T^1, \cdots, T^k$에 대하여 반복한다.

단계2 : (θ의 범위)

제 2 종 감도분석의 범위 $\theta = \bigcup_{j=1}^{k} \theta^j$ 가 된다.

3. 우변상수에 대한 감도분석

우변상수 b_i에 대한 제 2 종 감도분석은 최적해의 구조(B, L, U)를 유지하는 우변상수 θ의 범위를 구하는 것이다.

이 때 최적해의 구조(B,L,U)를 유지하는 우변상수의 변화는 하한값을 갖는 호는 계속 하한값으로, 상한값을 갖는 호는 계속 상한값으로 유지해야 하기 때문에 공급지 s에서 수요지 t까지 가는 어떤 경로에 하나라도 $x_{ij} = 0$ 이나 $x_{ij} = u_{ij}$ 인 호가 포함되어 있으면 이 경로를 통해서는 아무 유통량도 보낼 수 없게 된다. 그러나 공급지 s에서 수요지 t까지 가는 어떤 경로가 모두 $0 < x_{ij} < u_{ij}$인 호로 구성되어 있으면 이 경로를 통해서는 최적해의 구조(B,L,U)를 유지하는 유통량의 변화량을 구할 수 있다.

지금 공급지s에서 수요지t까지 $0 < x_{ij} < u_{ij}$인 호(i,j)로 구성되는 경로 $P(s,t)$가 존재한다고 하자. 이 때 우변상수에 대한 제 2 종 감도분석은 다음 정리로 나타낼 수 있다.

[정리 4] 최소비용문제에 대한 퇴화 정점 최적해 X^*가 주어져 있을 때 공급지 s에서 수요지 t까지 $0 < x_{ij} < u_{ij}$인 호로 구성되는 경로 $P(s,t)$가 존재하면 우변상수에 대한 제 2 종 감도분석 결과는 $\theta_l < \theta < \theta_u$가 된다. 그러나 공급지 s에서 수요지 t까지 $0 < x_{ij} < u_{ij}$인 호로 구성되는 경로 $P(s,t)$가 존재하지 않으면 $\theta = 0$ 이다.

여기서,

$$\theta_l = \mathrm{Max}\Big[\max_{(i,j) \in 순방향}\{-x_{ij}\}, \max_{(i,j) \in 역방향}\{x_{ij} - u_{ij}\} \mid \forall (i,j) \in P(s,t)\Big]$$

$$\theta_u = \mathrm{Min}\Big[\min_{(i,j) \in 순방향}\{u_{ij} - x_{ij}\}, \min_{(i,j) \in 역방향}\{x_{ij}\} \mid \forall (i,j) \in P(s,t)\Big]$$

(증명)

우변상수에 대한 제 2 종 감도분석은 공급지 s에서 수요지 t까지 $0 < x_{ij} < u_{ij}$인 호(i,j)로 구성되는 경로 $P(s,t)$가 존재할 때 가능하다.

먼저 경로 $P(s,t)$에 속한 순방향호(i,j)에 대하여 $\theta_1 = \mathrm{Min}\{u_{ij} - x_{ij}\}$, 역방향호$(i,j)$에 대해서 $\theta_2 = \mathrm{Min}\{x_{ij}\}$ 만큼을 보낼 수 있다. 이 때 가능성을 유지하는 범위 내에서 경로 $P(s,t)$를 통해서 보낼 수 있는 최대 증가량 θ_u 는 $\theta_u = \mathrm{Min}\{\theta_1, \theta_2\}$가 된다.

우변상수의 최대 감소량 θ_l은 이러한 경로 $P(s,t)$를 통해서 음의 유통량을 보내는 것으로 생각하면 된다. 따라서 순방향호(i,j)에 대하여 $\theta_1 = \mathrm{Max}\{-x_{ij}\}$, 역방향호$(i,j)$에 대해서 $\theta_2 = \mathrm{Max}\{x_{ij} - u_{ij}\}$ 만큼을 보낼 수 있게 된다. 따라서 가능성을 유지시키는 범위내에서 경로 $P(s,t)$를 통해서 보낼 수 있는 최대 감소량 θ_l은 $\theta_l = \mathrm{Max}\{\theta_1, \theta_2\}$가 된다.

그러나 $0 < x_{ij} < u_{ij}$인 호로 구성되는 경로 $P(s,t)$가 존재하지 않으면 어떠한 양의 변화에도 최적해의 구조(B,L,U)가 변하기 때문에 최적해의 구조(B,L,U)를 유지하는 제 2 종 감도분석의 범위는 $\theta=0$ 이 된다.

4. 용량 상하한에 대한 감도분석

용량 상하한에 대한 제 2 종 감도분석은 최적해의

구조(B,L,U)를 유지하는 용량 상하한의 범위를 구하는 것이다.

먼저 $0 < x_{ij} < u_{ij}$인 호(i,j)에 대하여 최적해의 구조(B,L,U)를 유지하는 용량 상하한의 변화 범위를 구해보자. 지금 $0 < x_{ij} < u_{ij}$인 호에 대한 용량하한이 $l_{ij}' = 0 + \theta$로 변하였다고 하자. 이 때 용량하한의 변화는 주어진 유통량 x_{ij} 보다 더 커지지 않는 범위내에서 가능(feasible)하기 때문에 $l_{ij}' = 0 + \theta < x_{ij}$ 가 성립되면 된다. 따라서 $\theta < x_{ij}, (i,j) \in B$ 가 된다. $0 < x_{ij} < u_{ij}$인 호에 대한 용량상한이 $u_{ij}' = u_{ij} + \theta$ 로 변할 경우에는 주어진 유통량 x_{ij}보다 더 작아지지 않는 범위내에서 가능하기 때문에 $x_{ij} < u_{ij}' = u_{ij} + \theta$ 가 성립되면 된다. 따라서 $\theta > x_{ij} - u_{ij}, (i,j) \in B$ 가 된다.

다음으로 $x_{ij} = 0$ 인 호(i,j)에 대하여 최적해의 구조(B,L,U)를 유지하는 용량 상하한의 변화 범위를 구해보자. 먼저 $x_{ij} = 0$ 인 호(i,j)에 대한 용량상한의 변화는 앞의 경우에서 처럼 $x_{ij} < u_{ij}' = u_{ij} + \theta$ 가 성립되면 된다. 따라서 $\theta > x_{ij} - u_{ij}, (i,j) \in L$ 가 된다. 그러나 $x_{ij} = 0$ 인 호(i,j)에 대한 용량하한이 $l_{ij}' = 0 + \theta$로 변할 경우에는 호(i,j)의 유통량을 계속 하한값으로 유지해야 하기 때문에 현재 흐르고 있는 유통량 x_{ij}도 l_{ij}'로 변하게 된다. 이렇게 x_{ij}가 l_{ij}'로 변하게 되면 이전에 만족되었던 유량 보존 법칙이 만족되지 않게 된다. 따라서 이 때에는 유량 보존 법칙이 만족될 수 있도록 유통량을 수정해 주어야 한다. 그런데 하한값을 갖는 호는 계속 하한값으로, 상한값을 갖는 호는 계속 상한값으로 유지해야 하기 때문에 반드시 $0 < x_{ij} < u_{ij}$인 호를 통해서만 유통량이 수정될 수 있다.

이를 위해 호(i,j)의 시작점을 i, 끝점을 j라고 하자. 그리고 마디 j에서 시작하여 마디 i까지 $0 < x_{ij} < u_{ij}$인 호로 구성되는 경로를 $P(j,i)$라 하고, 마디 i에서 호(i,j)와 $P(j,i)$로 구성된 순환로를 $C(i)$라고 하자. 그러면 순환로 $C(i) = \{i, (i,j), P(j,i)\}$가 된다.

따라서 $x_{ij} = 0$인 호(i,j)의 용량하한이 $l_{ij}' = 0 + \theta$로 변할 때 경로 $P(j,i)$에 속한 호(p,q)의 유통량을 다음과 같이 바꾸어 주게 되면 순환로 $C(i)$에서 유량 보존 법칙이 만족되게 된다.

만일 호$(p,q) \in P(j,i)$이면서 순방향호이면

$x_{pq}' = x_{pq} + \theta$

만일 호$(p,q) \in P(j,i)$이면서 역방향호이면

$x_{pq}' = x_{pq} - \theta$

이 때 $P(j,i)$에 속한 호(p,q)의 유통량은 각 호에 주어진 용량 상하한 조건을 만족해야 하므로 $0 < x_{pq}' < u_{pq}$를 만족하는 범위내에서 변화될 수 있다.

[정리 5] 최소비용문제에 대한 퇴화 정점 최적해 X^*가 주어졌을 때 $x_{ij} = 0$인 호에 대한 용량하한값이 $l_{ij}' = 0 + \theta$ 로 변했다고 하자. 이 때 순환로 $C(i)$가 존재하면 용량하한에 대한 제 2 종 감도분석 결과는 $\theta_l < \theta < \theta_u$ 가 되고, 순환로 $C(i)$가 존재하지 않으면 $\theta = 0$ 이 된다.

단,

$$\theta_l = \mathrm{Max}\Big[\underset{(p,q)\in 순방향}{\mathrm{Max}}\{-x_{pq}\}, \underset{(p,q)\in 역방향}{\mathrm{Max}}\{x_{pq} - u_{pq}\},$$
$$\{-u_{ij}\} \mid \forall (p,q) \in P(j,i)\Big]$$

$$\theta_u = \mathrm{Min}\Big[\underset{(p,q)\in 순방향}{\mathrm{Min}}\{u_{pq} - x_{pq}\}, \underset{(p,q)\in 역방향}{\mathrm{Min}}\{x_{pq}\},$$
$$\{u_{ij}\} \mid \forall (p,q) \in P(j,i)\Big]$$

(증명)

[정리 4]의 증명 참조

마지막으로 $x_{ij} = u_{ij}$인 호(i,j)에 대하여 최적해의 구조(B,L,U)를 유지하는 용량 상하한의 변화는 용량하한값을 갖는 경우에 적용했던 방법과 동일하게 수행하면 된다.

5. 결 론

제 2 종 감도분석은 최적해의 구조(B,L,U)에서 0의 유통량이 흐르는 호는 계속 0의 유통량을 흐르게 하고, 용량상한값이 흐르는 호는 계속 용량상한값을 갖도록 하며, $0 < x_{ij} < u_{ij}$인 호는 계속 $0 < x_{ij} < u_{ij}$인 호로 유지하는 계수의 범위를 구하는 감도분석이다.

이 논문에서는 목적함수계수에 대하여 퇴화 정점 최적해가 주어졌을 때 가능한 모든 최적기저나무를 구하여 이 최적기저나무로부터 제 2 종 감도분석을

구할 수 있는 방법을 제시하였다. 이 때 제 2 종 감도분석의 결과는 각 최적기저나무를 유지하는 제 1 종 감도분석 결과의 합집합이 되었다.

우변상수나 용량상하한에 대해서는 $0 < x_{ij} < u_{ij}$인 호로 구성되는 경로를 통하여 보낼 수 있는 최대(최소) 유통량이 제 2 종 감도분석의 결과가 되었다.

【참고문헌】

[1] 박순달, OR(경영과학), 민영사, 1991, pp 232-236

[2] 양병학, "선형계획법에서 비정점 최적해의 민감도 분석에 관한 연구", 서울대학교 공학박사 학위논문, 1990. 8

[3] R. K. Ahuja, T. L. Magnanti, and J. B. Orlin, Network Flows, Prentice-Hall, Inc., 1993

[4] W. H. Cunningham, "Theoretical Properties of the Network Simplex Method", Mathematics of Oper. Res., Vol. 4, No.2(1979), pp 196-208

[5] Tomas Gal, Postoptimal Analyses, Parametric Programming, and Related Topics, McGraw-Hill, 1979

[6] Dan Gusfield, "A Note on Arc Tolerances in Sparse Shortest Path and Network Flow Problems", Networks, Vol. 13 (1983), pp 191-196

[7] In-soo Lee , "Shortest Path Problems : A Parametric Study", J. of the Korean OR/MS Society, Vol. 16, No.2 (1991) pp 103-117

[8] Katta G. Murty, Network Programming, Prentice-Hall, Inc., 1992

[9] Nemhauser and Kan, Handbooks in Operations Research and Management Sci., Vol. 1, North-Holland, 1989

[10] N. Ravi and R.E. Wendell, "The Tolerance Approach to Sensitivity Analysis in Network Linear Programming", Networks ,Vol. 18 (1988), pp 159-171

[11] D. R. Shier and Christoph Witzgall, "Arc Tolerances in Shortest Path and Network Flow Problems", Networks, Vol. 10(1980), pp 227 - 291

[12] Robert Endre Tarjan, "Sensitivity Analysis of Minimun Spanning Trees and Shortest Path Trees", Information Processing Letters, Vol. 14 , No.1 (1982) , pp 30-33

박순달(朴淳達)

현재 서울대학교 산업공학과 교수로 재직 중이다. Univ. of Cincinnati에서 이학박사 학위를 취득하였고, 독일 Ruhr-Universitaet에서 연구원으로 근무하기도 하였다. '88 아세아 태평양 경영과학 학술대회 준비위원장과 한국경영과학회 회장을 역임한 바 있다. 주요 관심 분야는 Deterministic OR과 컴퓨터 활용 분야이다.

정호연(鄭昊淵)

현재 전주대학교 산업공학과 조교수로 재직 중이다. 전남대학교 산업공학과에서 공학사, 서울대학교 산업공학과에서 공학석사와 공학박사학위를 취득하였다. 주요 관심분야는 경영과학과 컴퓨터 활용분야이다.