

p-Version 유한요소법에 의한 형상 최적화설계

Shape Optimal Design by P-version of Finite Element Method

김행준* · 우광성**
Kim, Haeng Joon · Woo, Kwang Sung

Abstract

In the shape optimal design based on h-version of FEM, the ideal mesh for the initial geometry most probably will not be suitable for the final analysis. Thus, it is necessary to remesh the geometry of the model at each stage of optimization. However, the p-version of FEM appears to be a very attractive alternative for use in shape optimization. The main advantages are as follows; firstly, the elements are not sensitive to distortion for interpolation polynomials of order $p \geq 3$; secondly, even singular problems can be solved more efficiently with p-version than with the h-version by proper mesh design; thirdly, the initial mesh design are identical. The 2-D p-version model for shape optimization is presented on the basis of Bezier's curve fitting, gradient projection method, and integrals of Legendre polynomials. The numerical results are performed by p-version software RASNA.

요 지

h-version 유한요소법에 근거를 둔 형상최적화 설계에서는 초기모델의 기하형상에 대한 이상적인 체눈설계가 최종해석시에는 적합하지 않을 수 있게 된다. 그러므로, 최적화의 반복단계마다 모델의 단면형상에 대한 새로운 체눈설계가 필요하게 된다. 그러나, p-version 유한요소법은 형상최적화 문제 해석을 위한 매우 매력적인 대안으로 제시될 수 있다. p-version 유한요소법은 h-version 유한요소법과 비교하여 다음과 같은 큰 장점을 갖고 있다. 첫째로, 보간함수의 차수가 3차이상이면 요소의 찌그러진 형상에 대한 유한요소 해에 별 영향을 미치지 않는다. 둘째로, 심지어 응력특이 문제도 h-version에 비해 p-version은 적절한 체눈설계를 하게되면 훨씬 효율적이다. 셋째로, 초기 체눈설계와 최종 체눈설계가 동일하므로 반복단계마다 새롭게 체눈설계를 할 필요가 없어진다. Bezier의 곡선보간법, 경사투사법과 적분형 르장드르 다항식에 기초를 둔 2차원 형상최적화를 위한 p-version 모델이 제시되었다. 수치해석 결과는 p-version 소프트웨어인 RASNA를 사용하여 수행되었다.

* 전남대학교 토목공학과 석사과정

** 정희원 · 전남대학교 토목공학과 조교수

1. 서 론

종래의 구조설계에서는 주로 기술자의 경험에 의해 가정된 구조형식 및 치수에 대해서 몇 개의 대안을 수립한 후, 그 중 가장 적합한 것을 최적설계로 채택하였다. 그러나, 이것은 기술자의 능력과 자질에 좌우되는 다소 비과학적인 방법이라 할 수 있고, 또 대안으로 제시한 몇 개의 설계가 반드시 최적설계라고 볼 수 있는가에 대한 회의도 있었다. 따라서, 고성능 컴퓨터의 출현과 아울러 최적화이론을 이용한 과학적이고 합리적인 설계가 요망되게 되었다.

구조물의 최적설계에 관한 기법은 크게 네 개의 영역에서 독립적으로 이루어져 왔다. 첫째, 배치이론(theory of layout)으로 구조물의 배열과 기하학적 형상을 고정하고 단면적을 최소화시키는 방법으로써 1854년 Maxwell⁽¹⁾에 의해 정립되었으며 주어진 하중과 재료에 대해서 구조물의 체적을 최소화 하였다. 둘째, 동시파괴 모우드이론(simultaneous mode of failure)로 전체 구조물의 각 구성요소가 각각의 강도의 한계에 도달하여 파괴되도록 설계하는 기법으로 1940년에서 50년대 사이에 Shanley⁽²⁾, Cox⁽³⁾에 의해 연구되었다. 셋째, 최적성 기준방법(criterion of optimality)으로 구조물의 형태나 하중조건 등 거동과 관련된 기준이 먼저 설정되고 난 후, 이 기준이 만족될 때까지 최적화가 이루어지도록 하는 기법으로 1960년초 Taylor⁽⁴⁾, Venkayya⁽⁵⁾ 등에 의해 연구되었다. 넷째, 수리계획법(mathematical programming method)으로 여러 개의 설계변수(design variables)로 표시되는 목적함수(objective function)를 최소화 또는 최대화하는 것이다. 설계변수는 등호 또는 부등호로 표시되는 제약조건(constraint conditions)을 갖는다. 수리계획법은 1950년 후반에 최초로 구조물 최적화에 도입되어 Livesley⁽⁶⁾, Pearson⁽⁷⁾은 선형계획문제(linear programming problem)에 국한하였으나 Schmit⁽⁸⁾에 의해 비선형계획문제(non-linear programming problem)까지 일반화되었다.

한편, 본 논문에서 연구하고자 하는 형상최적화(shape optimization)는 최적화설계시 목적함수로 체적, 또는 von Mises의 등가응력으로 정의하고 설계변수는 절점좌표의 이동으로 설정하여 구조물의 기하학적 형상에 기인한 응력집중(stress concentration) 또는 응력특이(stress singularity) 현상이 발

생되는 초기모델을 형상최적화를 통한 재설계과정을 통하여 응력집중을 크게 완화시켜서 국부적인 응력준위(stress level)의 감소에 따른 국부적인 파괴, 즉 항복이나 균열등에 구조적 안전성을 확보하여 내구성을 높이는 것이 주요한 개념이 된다. 이러한 응력집중을 발생시키는 기하학적 요인으로는 요각모서리(reentrant corner), 사각형 또는 원형개구부(opening), 손상단면(cut-outs) 등을 생각할 수 있으며 경계조건에 의해서도 응력준위가 평균응력에 비해 상대적으로 높아질 수 있다. 본 연구에서는 수치해석 예제로 요각모서리를 갖는 필렛문제(fillet problem), 원공(circular hole)을 갖는 평판문제, 그리고 양단이 고정단의 경계조건을 갖는 보문제를 채택하여 형상최적화를 수행하였다.

초기설계된 구조물의 해석에 사용되는 해석자(analyzer)로는 통상 유한요소법이 사용되는데 주지하다시피 유한요소해석법에는 표준해석법인 h-version 유한요소법과 새롭게 제안되고 있는 p-version 유한요소법으로 크게 분류해 볼 수 있다. 초기설계된 구조형상을 갖고 h-version 유한요소법은 통상 Lagrange 저차($p=1, 2$) 형상함수를 고정시키고 요소를 잘게 분할하여 체눈설계(mesh design)를 마치게 된다. 반면에 p-version 유한요소법은 구조물의 기하형상을 나타낼 수 있는 최소갯수의 요소로 고정시키고 대신에 고차 Legendre(보통 $P=5$) 형상함수의 차수를 증가시키면서 체눈설계를 완료하게 된다. 물론, 초기설계 상태에서 동일한 수준의 정확도를 확보하기 위해 h-version은 요소의 갯수를, p-version은 형상함수의 차수를 먼저 결정하여야 한다. 그러나, 초기설계상태에서 기하학적인 형상에 기인하여 발생하는 응력집중을 완화시키기 위해 구조물을 둘러싸고 있는 외부경계(exterior boundary) 영역을 설계민감도해석(design sensitivity analysis)을 통해 조정해야 하며 조정된 형상단면을 갖고 반복해석을 수행하며 이에 따른 재설계(redesign)가 이루어진다. 응력의 함수나 체적으로 정의되는 목적함수가 최소화될 때까지 반복수행되는 과정이 형상최적화의 일반적인 해석절차가 된다. 여기서 반복단계마다 재설계할 때 요소분할은 결정적인 역할을 하게 된다. 즉, 간단한 구조문제에서도 분할된 요소의 형상은 해의 정확도에 직접적인 영향을 주게 되기 때문이다. 다시 말하면, h-version 유한요소

법은 초기설계된 체눈이 최적화단계마다 외부경계의 단면형상이 변하게 되면서 매우 불규칙한 기하형상을 보이게 된다. 그러므로, 초기설계된 체눈을 그대로 사용하게 되면 요소의 형상은 매우 큰 형상비(aspect ratio)를 갖게 되든가 평행사변형이나 사다리꼴 형태로 요소의 저그러짐에 의한 왜곡도(skewness)가 발생되어 유한요소해가 수치오차에 근거하여 매우 불안정하게 된다. Robinson⁽⁹⁾의 연구에 의하면 요소의 형상비가 3 이하가 되어야 변위 및 응력값의 신뢰성을 갖을 수 있다고 하였으며, Woo⁽¹⁰⁾의 연구에서도 전단력과 인장력을 받는 간단한 쉘틸러문체에서 형상비와 왜곡도 등에 따른 해의 민감도 비교분석이 h-version과 p-version에 의해 수행되었는데 h-version 유한요소법은 예상대로 요소의 기하학적인 형상에 매우 민감한 것이 밝혀졌으며, 반면에 p-version 유한요소법은 $p \geq 3$ 차 이상이 되면 크게 영향을 받지 않음을 알 수 있었다. 그러므로, h-version 유한요소법에서는 최적화를 위한 반복단계마다 이러한 요소형상에서 형상비나 왜곡도 등을 줄이기 위해서는 초기 체눈설계를 변경하여 새로운 체눈설계(remeshing)를 하여야 동일한 수준의 정확도를 계속 유지할 수 있다. 그러나, 이 작업은 형상최적화를 완료하는데 10회 이상의 반복이 필요하다고 가정한다면 매우 번거로운 데이터 작성작업이 요구되며 요소의 갯수도 반복단계마다 달라질 수 있게 된다. 그런 이유로 h-version 유한요소법에는 적응적 요소분할(adaptive mesh refinement)기법이 도입되어야 정해(exact solution)에 대한 유한요소해의 오차를 일정수준으로 유지하면서 형상최적화의 반복수행을 완료할 수 있게 된다.

그러면, 본 연구에서 제안되는 p-version 유한요소법은 다음과 같은 장점때문에 이러한 문제를 극복할 수 있게 된다. 첫째, 요소의 형상비나 왜곡도가 형상함수의 차수가 $p=3$ 이상이 되면 큰 영향을 받지 않게 된다. 둘째, 초기모델의 요소분할이 최종설계에 까지 변화되지 않으므로 반복단계마다 새로운 요소분할이 필요하지 않게 된다. 셋째, 응력특이 문제나 응력집중문제에서 h-version 유한요소법에 비해 빠른 수렴성을 보여주며 높은 정확도를 갖게 한다. 즉, 인장력을 받는 2차원 균열판해석에서 균등요소분할(uniform mesh refinement)을 통한 h-version 유한요소법에 비해 2배가량 빠른 수렴성을

보여준다.

따라서, 본 연구의 목적은 응력집중이 존재하는 구조물의 응력해석에 해석자로 적분형 르장드르함수에 근거를 둔 p-version 유한요소법을 사용하며 형상최적화의 반복수행시 얻어지는 최적화 단면은 통상 직선 경계영역으로부터 곡선 경계영역이 되도록 적절한 사상기법(mapping technique)이 요구되는데 이를 위해 초유한사상(transfinite mapping)이 사용되었다. 한편, 최적화 단면은 응력집중이 발생하는 외부 경계영역의 절점을 이동시킴으로써 얻을 수 있는데 이 절점과 절점을 연결한 것이 최종 최적화단면이 된다. 그러나, 이 단면은 평활곡선(smooth curve)이 되지 않는 까닭에 본 연구에서는 이 절점들을 유기적으로 연결해 주는 보간기법(interpolation technique)인 Bezier Curve Fitting을 사용하여 그 문제점을 해결하였다. 또한, 최적화 이론으로는 비선형계획법인 경사투사법(gradient projection method)을 사용하였으며 본 연구를 위해 p-version 소프트웨어인 RASNA⁽¹¹⁾를 사용하여 효율적인 형상최적화를 완료하였다.

2. 구조물의 형상 최적화 과정

2.1 문제의 정식화

형상최적화를 수행하기 위한 수리적계획법(mathematical programming method) 문제는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \text{Minimize} && F(X) \\ & \text{Subject to} && g_i(X) \leq 0 \quad i=1, \dots, m \end{aligned} \quad (1)$$

여기에서 $F(X)$ 는 목적함수로 보통 스칼라함수(scalar function)로 나타낸다. 목적함수는 주로 중량이나 체적의 값을 가지며 본 연구에서는 목적함수로 체적과 von Mises 응력을 취하였다. $g_i(X)$ 는 제약조건을 나타내는데 제약조건은 등호제약조건과 부등호제약조건으로 표시될 수 있으며, 또한 한계제약조건(side constraints)과 거동제약조건(behaviour constraints)으로 분류할 수 있다. 한계제약조건은 보통 명시적인 형태로 주어지며, 단면의 최소치수, 평판의 최소두께, 셸 구조물의 최소높이 등이 이에 해당한다. 거동제약조건은 구조물의 거동과 관련된 제약조건으로써 보통 암함수적(implicit function)형

태로 주어지며, 구조물의 응력과 변위, 기둥에서의 좌굴 등이 이에 해당한다. 본 연구에서 제약조건으로는 등호제약조건과 부등호제약조건을 모두 고려하였으며, 한계제약조건으로는 구조물의 최소치수와 최대치수, 거동제약조건으로는 구조물의 응력을 고려하였다.

2.2 설계민감도 해석

설계변수의 조정을 위해서는 변위 또는 응력에 대한 설계민감도 해석이 필요하게 된다. p-version 유한요소법의 변위법에 의하면

$$[K]\{D_i\} = \{F_i\} \quad (2)$$

여기서 $\{D_i\}$ 는 변위벡터, $\{F_i\}$ 는 하중벡터, $[K]$ 는 전체 강성도 행렬이다. 식 (2)의 양변을 설계변수 X_i 에 관해 미분하면

$$[K] = \frac{dD_i}{dX_i} + \frac{dK}{dX_i}\{D_i\} = \frac{dF_i}{dX_i} \quad (3)$$

여기서 하중벡터는 상수로 취급하면, $\frac{dF_i}{dX_i} = 0$ 이므로

$$[K] \frac{dD_i}{dX_i} = - \frac{dK}{dX_i}\{D_i\} \quad (4)$$

그런데 $\frac{dK}{dX_i} = \frac{K_{(K_i+\Delta X)} - K_{(X_i)}}{\Delta X_i}$, $\{g_i\} = [K] \frac{dD_i}{dX_i}$ 로 놓으면

$$\{g_i\} = - \frac{[K_{(K_i+\Delta X)}]\{D_i\} - \{F_i\}}{\Delta X_i} \quad (5)$$

또한 $\{\frac{dD_i}{dX_i}\} = [K]^{-1}\{g_i\}$ 이므로 변위의 설계민감도

$\{\frac{dD_i}{dX_i}\}$ 는 우측항인 $\{g_i\}$ 벡터의 계산으로부터

구할 수 있다. 이러한 설계민감도 해석을 통하여 주어진 제약조건을 위배하지 않는 범위내에서 설계변수를 조절해 나갈 수 있다.

2.3 경사투사법(gradient projection method)

본 연구에서 사용한 경사투사법은 무제약조건을 갖는 최적경사법을 개선하여 제약조건을 갖는 경우의 최적화 문제에 적당한 방법이다. 보통 목적함수를

최소화 또는 최대화하는 과정에서 수 회의 반복과정이 필요하게 된다. 만일 제약조건을 갖는 최적화 문제의 경우, 설계변수가 적절한 탐사방향을 따라 움직이면 다음의 설계변수가 가능해의 영역을 벗어날 수 있다. 이러한 경우 경사방향을 가능해의 영역안에 투사될 수 있도록 설계변수를 조절하는 것이 필요하며 이러한 조정방법이 경사투사법이다.

선형제약조건을 갖는 경우의 경사투사법에 의한 목적함수의 최소화 문제는 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} &\text{Minimize} && F(X) \\ &\text{Subject to} && Ax = b \end{aligned} \quad (6)$$

k번째 반복후의 설계변수 X^k 가 가능해의 영역에 있다면 k+1번째의 설계변수 X^{k+1} 은 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$X^{k+1} = X^k + \Delta X^k \quad (7)$$

여기서, X^{k+1} 이 가능해의 영역에 존재하기 위해서는 식 (6)으로부터 $A \Delta X^k = 0$ 이 성립해야 한다. 최적해에 접근할 수 있는 가장 적당한 탐사방향은 목적함수의 변화율이 최대로 되는 경로로 되므로

$$\frac{dF}{ds} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial X_i} \frac{dX_i}{ds} \quad (8)$$

여기서 $(ds)^2 = \sum_{i=1}^n (dX_i)^2$ 이며 최적화의 문제는 다음과 같이 변형시킬 수 있다.

$$\begin{aligned} &\text{Minimize} && \frac{dF}{ds} \\ &\text{Subject to} && (ds)^2 = \sum_{i=1}^n (dX_i)^2 \\ &&& A \frac{dF}{ds} = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

식 (9)를 라그랑주 승계수법(Lagrange multiplier method)을 이용하여 풀면 경사투사법의 알고리즘은 다음과 같이 정리된다.

$$X^{k+1} = X^k + \lambda_k \cdot P \cdot \nabla F(X^k) \quad (10)$$

여기서 $P = [I - A^T(A \cdot A^T)^{-1} \cdot A]$ 는 정규화된 투사행렬(normalized projection matrix)이며, λ_k 는 단위거리로서 $\lambda_k < 0$ 이면 최소화 문제로 된다.

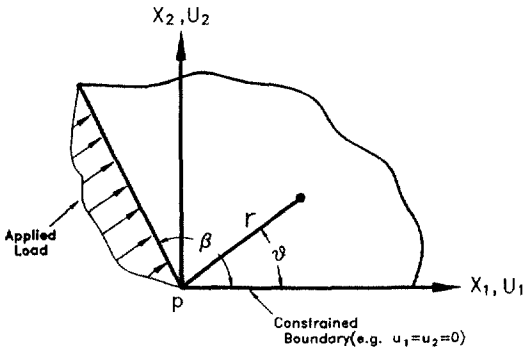


Fig. 1. Typical singular point in plane elasticity problems

Table 1. Eigenvalues for various solid angles

Solid angle (β)	eigenvalues (λ_i)
360°	0.5
340°	0.5004263
320°	0.5034905
300°	0.5122213
280°	0.5303957
260°	0.5628395
240°	0.6157312
220°	0.6971650
200°	0.8186959
180°	1.0

3. 모서리 특이성(Corner Singularity)

Fig.1과 같은 요각모서리(reentrant corner)를 갖는 2차원 평면탄성문제(plane elasticity problem)에 있어서 변위 u 는 다음과 같이 정의된다.

$$u(r, \theta) = \sum_i A_i r^{\lambda_i} F_i(\theta) + G(r, \theta) \quad (11)$$

여기서, 요각모서리 점에서 무한응력이 발생하는 까닭에 이 점을 특이점(singular point)라 하며 특이점 P를 포함하는 $u(r, \theta)$ 를 변위백터라 한다. 한편, r 과 θ 는 p점을 중심으로 하는 극좌표이고 $G(r, \theta)$ 는 해의 평활함수(smooth function)를, $r^{\lambda_i} F_i(\theta)$ 는 특이함수(singular function)를 나타내는데 일반적으로 삼각함수의 조합형태로 정의된다. A_i 는 임의의 상수를 나타내며 고유치(eigenvalues) λ_i 는 각도 β 와 각을 둘러싼 주변의 경계조건, 그리고 포아손 비에 영향을 받는다. 응력-변형률의 관계와 변형률-변위의 관계으로부터 식 (11)을 응력의 향으로 표시하면 식 (12)로 된다.

$$\sigma(r, \theta) = \sum_i B_i r^{(\lambda_i-1)} f_i(\theta) + g(r, \theta) \quad (12)$$

여기서, 응력은 고유치 λ_i 의 함수로 되며 고유치는 또 Table 1에 의해 모서리 각도의 함수가 되므로 모서리 각도의 변화에 따라 응력의 크기가 달라진다. Table 1에서 보여주는 바와 같이 $\lambda_i < 1$ 이 될 때 식 (12)에 대입하면 응력은 특이점($r=0$)에서 무한대에 접근하므로 응력특이현상이 발생하게 되는 것이다.

본 연구에서 해석하고자 하는 인장력을 재하받는 필렛(fillet) 문제의 경우도 모서리 각도가 $\beta=220^\circ$ 로서 $\lambda_i=0.6971650$ 이므로 $\lambda_i < 1$ 이 되어 응력특이가 발생한다. 이와 같이 극심한 응력특이가 발생하는 까닭에 본 문제를 수치예제로 채택하여 최적화 이전의 응력상태를 형상최적화 이후의 응력상태와 비교하여 얼마만큼 최대응력의 감소와 응력경사의 완화가 이루어지는지를 조사하였다.

4. P-version 유한요소 모델

저매개변수요소(subparametric element)에 근거를 둔 2차원 평면응력/변형 요소에 형상함수로는 적분형 르장드르 다항식이 사용되었다. 적분형 르장드르 다항식은 계층적 성질(hierarchical nature)을 갖게되어 형상함수가 n 차인 강성도 행렬은 $n+1$ 차 강성도 행렬의 부행렬(submatrix)가 되므로 형상함수의 차수가 증가함에 따라 새로운 형상함수가 정의되는 비계층요소(non-hierarchical element)와는 달리 앞에서 정의된 형상함수들을 그대로 사용할 수 있는 장점이 있다. 또한 Zienkiewicz 등의 연구⁽¹²⁾에 의하면 계층요소는 비계층적요소에 비해 수치오차(numerical errors)가 현저히 줄어들음을 보이고 있어서 강성도 행렬의 수치 안정성(numerical stability)을 확보할 수 있는 까닭에 호조건 행렬(well-conditioned matrix)가 됨을 알 수 있다. 한편, 르장드르 다항식은 직교성(orthogonality)을 갖고 있어서 더욱

수치오차를 줄일 수 있게 된다.

한편, 강성도 행렬의 정의는 형상함수를 1차 미분한 항들의 곱에 적분한 형태가 되므로 르장드르 다항식을 그대로 사용하게 되면 직교성은 잃게 되므로 정규영역에서 한번 적분한 형태를 유도하게 되면 1차미분을 하더라도 다시 르장드르 다항식이 되므로 직교성을 유지하게 되는 이유로 본 연구에서는 적분형 르장드르 다항식을 형상함수로 채택하였다. 형상함수는 4개의 좌표값을 갖는 꼭지점으로 구성되는 선형함수를 기본 모드(basic mode)라 하고 4개의 변에 좌표값을 갖지 않는 절점(nodeless node)들을 고차로 증가시킨 곡선함수를 주변 모드(side mode)라 정의 하여 기본 모드에 주변 모드를 더해줌으로써 임의의 변위함수를 표현할 수 있게 한다.

한편, 형상함수의 수렴조건중의 하나인 완전성(completeness)을 유지하기 위해 내부 영역에 내부 모드(internal mode)를 정의하는데 통상 거품모양처럼 볼록한 형상을 띠는 까닭에 거품 모드(bubble mode)라 하기도 한다. 이와 같은 내부 모드는 형상함수의 차수가 4차 이상부터 발생되는데 앞에서 정의된 3가지 모드들의 조합으로 임의의 변위함수를 근사시키게 된다. 또한, 4개의 꼭지점을 제외한 절점에는 별도의 좌표값을 갖지 않는 저매개변수 요소이므로 꼭지점을 제외한 임의의 경계영역을 정의 하기 위해서는 적절한 사상기법이 필요하게 되는데 본 연구에서는 초유한사상(transfinite mapping)을 사용하여 이 문제를 해결하였고, 경계영역내에 있는 임의의 해석영역의 좌표를 설정하기 위해서는 혼합 함수(blend function)를 사용하여 처리하였다. 적분형 르장드르 다항식의 정의와 초유한 사상에 관한 자세한 연구는 참고문헌과 같다.^(13,14)

5. 베지에르 곡선(Bezier curve)

구조물의 형상을 최적화한 결과는 외부경계영역의 절점을 이동시키게 되므로 절점과 절점을 연결하게 되면 직선의 모양으로 표시된다. 이를 근사화방법을 통한 곡선화과정이 필요하게되는 데 본 연구에서는 곡선보간(curve fitting)의 근사화에 적합한 Bezier 곡선을 사용하였다. Bezier 곡선은 n개의 조절점에 의해 설정되는 곡선으로써 Fig. 2와 같이 첫번째 점

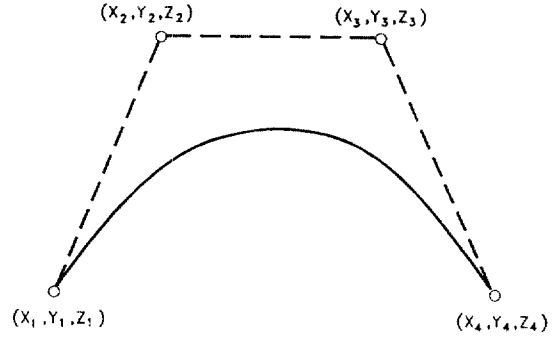


Fig. 2. Configuration of Bezier curve

과 마지막 점을 제외한 나머지 점은 통과하지 않고 그려지는 근사곡선을 말한다.

Bezier 곡선상의 임의의 점은 다음과 같이 표시 된다.

$$P(t) = \sum_{i=0}^n P_i J_{n,i}(t) \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (13)$$

여기서, P_i 는 각 정점의 위치벡터로서 2차원 평면의 경우 $P_i = (X_i, Y_i)$ 로 되며, 3차원의 경우 $P_i = (X_i, Y_i, Z_i)$ 로 된다. 한편,

$$J_{n,i}(t) = C_{n,i} \cdot t^i (1-t)^{n-i} \quad (14)$$

$$C_{n,i} = n! / (i!(n-i)!) \quad (15)$$

n : 다항식의 차수

i : $0 \sim n$ 사이의 정점으로 된다.

n 차 다항식을 갖는 Bezier 곡선은 $n+1$ 개의 정점에 의해서 시작점과 끝점은 고정된다. 예를들면 4개의 정점을 갖는 3차 Bezier 곡선의 경우 다음과 같이 표시할 수 있다.⁽¹⁵⁾

$$J_{3,0}(t) = C_{3,0} t^0 (1-t)^{3-0} = (1-t)^3$$

$$J_{3,1}(t) = C_{3,1} t^1 (1-t)^{3-1} = 3t(1-t)^2$$

$$J_{3,2}(t) = C_{3,2} t^2 (1-t)^{3-2} = 3t^2(1-t)$$

$$J_{3,3}(t) = C_{3,3} t^3 (1-t)^{3-3} = t^3 \quad (16)$$

그러므로 식 (16)을 식 (13)에 대입하면 다음과 같이 된다.

$$P(t) = P_0 + 3(P_1 - P_0)t + 3(P_2 - 2P_1 + P_0)t^2 + (P_3 - 3P_2 + 3P_1 - P_0)t^3 \quad (17)$$

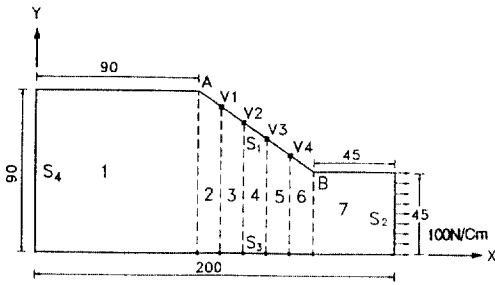


Fig. 3. P-version finite element model for fillet problems

6. 수치해석 예제

6.1 필렛문제

필렛문제(fillet problem)의 경우 Fig. 3에서 보는 바와 같이 B점의 모서리부분에 응력집중이 심하기 때문에 구조물의 형상 최적설계에 자주 이용되는 구조물의 하나이다. Fig. 3과 같이 서로 다른 폭을 가지며 인장력이 작용하고 있는 2차원 평면응력의 경우, X축과 Y축에 대해 각각 대칭이므로 전체구조물의 1/4만 고려하기로 한다. 그림에서 S_3 와 S_4 는 필렛의 대칭선이며 경계선 S_1 상의 각 절점의 수직 이동을 설계변수로 놓는다. 절점 A와 B는 고정시키고 외력은 S_2 에 등분포하중 100 N/cm를 재하시킨다. 목적함수는 여러 개의 응력조합으로 표시되는 등가응력(equivalent stress)인 von Mises 응력으로 정의하였으며 선분 S_1 상의 응력집중을 최소화하도록 하였다. 요소분할은 4변형 계층적 평면요소를 사용하여 7개의 요소로 분할하였다. 수리계획법(M. P.)에 의한 필렛문제의 형상최적화를 위한 정식화 과정은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \text{Minimize } \sigma_{v,M}(X_i) \\ & \text{Subject to } 0.9 \sigma_m \leq \sigma_{v,M}(X_i) \leq 1.1 \sigma_m \end{aligned} \quad (18)$$

여기서, X_i 는 설계변수로서 선분 S_1 상의 각 절점이 된다. 따라서 최적화 과정은 선분 S_1 위의 각 절점을 Y축 방향으로 이동시킴으로써 von Mises 응력을 완화시키는 것으로 하였다. von Mises 응력은 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} \sigma_{v,M} = \frac{1}{\sqrt{2}} & [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 \\ & + 6\tau_{xy}^2 + 6\tau_{yz}^2 + 6\tau_{zx}^2]^{1/2} \end{aligned} \quad (19)$$

Table 2. Summary of results for fillet problems

P-Order	Optimized Results			Reanalyzed with Bezier Curve		
	σ_{max}	σ_{min}	$\sigma_{max}/\sigma_{min}$	σ_{max}	σ_{min}	$\sigma_{max}/\sigma_{min}$
Initial	302.5	148.6	2.04			
2	289.5	165.5	1.75	288.2	146.3	1.75
3	274.8	165.7	1.66	262.3	162.3	1.62
4	260.9	165.5	1.58	253.7	164.6	1.54
5	247.2	165.8	1.49	241.2	165.0	1.46
6	243.0	166.2	1.46	243.3	165.4	1.47

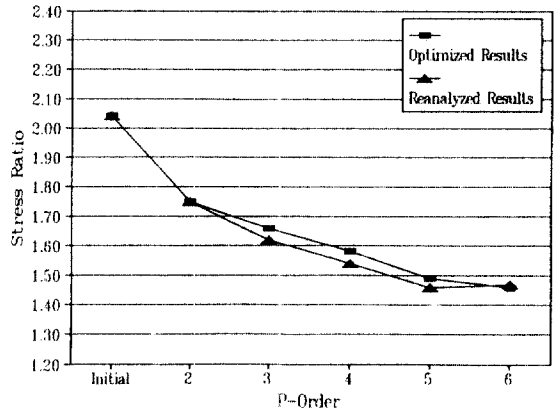


Fig. 4. Variation of stress ratio with respect to p-order

한편, 식 (18)의 두번째 식인 제약조건식은 초기모델상태를 갖고 구조해석을 수행하였을 때 7개의 요소로 분할된 각 요소에서 발생하는 최대 von Mises 응력을 구한 다음 요소수로 나누어 구한 평균 von Mises 응력으로 σ_m 로 정의하며 최적화단계에서 계산된 von Mises 응력이 오차한계를 $\pm 10\%$ 이내에 들도록 제약조건을 설정하였다. 본 연구의 예제인 필렛의 경우, 4개의 설계변수(V_1, V_2, V_3, V_4)가 있으며, 절점이동의 방향이나 이동거리(step size)의 결정은 경사투사법(gradient projection method)에 의해 이루어진다.

최적화의 결과는 Table 2와 같고 P의 차수에 따른 von Mises 응력의 결과는 Fig. 4에 나타나 있다. Table 2에서 최적화가 완료된 후의 결과(optimized result)와 이를 Bezier 곡선으로 근사시킨 후 재해석한 결과(reanalyzed with Bezier curve)를 비교하여

Stress Von Mises
 Max +3.0254E+02
 Min +3.7724E+01

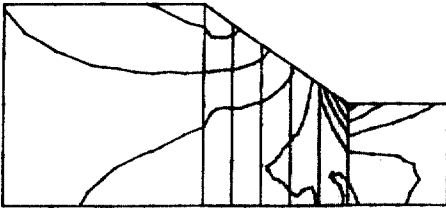


Fig. 5. Stress contours of initial structure for fillet problem

Stress Von Mises
 Max +2.4293E+02
 Min +1.7054E+01

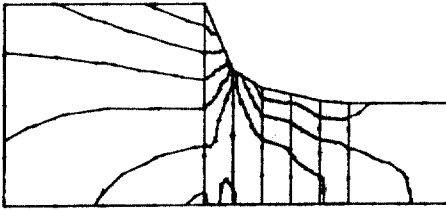


Fig. 6. Stress contours of optimized structure for fillet problem

Stress Von Mises
 Max +2.4327E+02
 Min +1.5296E+01

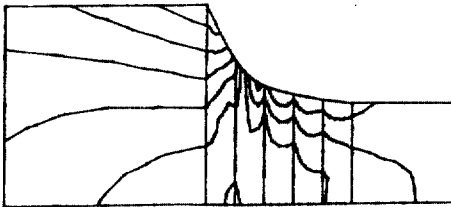


Fig. 7. Stress contours of reanalyzed structure with Bezier curve

보면, P의 차수가 6차일 때 243.0 N/cm²과 243.3 N/cm²으로 거의 접근하고 있음을 보여준다. Fig. 6과 Fig. 7에서 보는 바와 같이 최적화된 단면형상이 Bezier 곡선으로 평활화한 단면형상에 거의 접근하기 때문이다. 한편, Fig. 5와 같이 초기설계된 필렛의 등응력선(stress contour)은 응력특이점 부근에서 매우 가파른 응력경사를 보인 반면 Fig. 6와 Fig. 7의

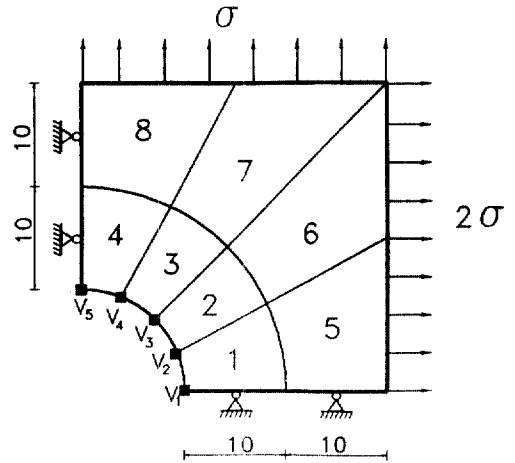


Fig. 8. P-version model for a quarter plate problem

최적단면에서는 응력경사가 매우 완화되고 있음을 알 수 있다. 또한, Table 2에서 보듯이 von Mises 최대응력과 최소응력의 비로 정의되는 응력비(stress ratio)는 초기모델의 경우 2.04에서 p=6차인 경우 1.46으로 감소됨을 알 수 있고 아울러 p=5차 이후에는 응력비가 수렴되는 양상을 보이고 있다.

6.2 2축응력 상태의 원공판문제

원공(circular hole)을 가진 평판에 2축응력이 작용할 경우, 일반적으로 원공의 원주부분에 응력집중이 심하게 나타난다. 그러므로 원공주위의 응력집중을 완화시키기 위해 적절한 형상의 최적화가 요구된다. Fig. 8은 정사각형 평판의 가장자리에 등분포하중이 존재하는 경우를 보여주고 있다. X축 방향으로의 하중은 Y축 방향 하중의 2배를 가해주었다. 일반적으로 원공주위의 응력집중현상은 두 축에 작용하는 응력상태에 전적으로 좌우되며, 평판의 크기에 따라 응력집중현상의 경향은 변화되지 않는다. 한편, 본 수치예제의 경우 평판의 체적을 목적함수로 정의하여 체적을 최소화시키는 것으로 하며, 제약조건으로는 원공주변 요소의 최대 von Mises응력이 평균 von Mises응력에 접근하도록 하였다. 오차한계는 ±20%로 설정하였으며 이를 정식화하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \text{Minimize} && V(X_i) \\ & \text{Subject to} && 0.8 \sigma_m \leq \sigma_{v,M}(X_i) \leq 1.2 \sigma_m \quad (20) \end{aligned}$$

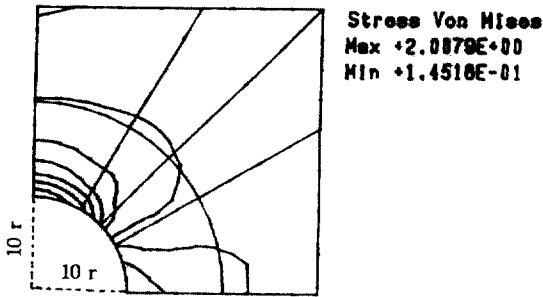


Fig. 9. Stress contour of initial structure for a plate problem

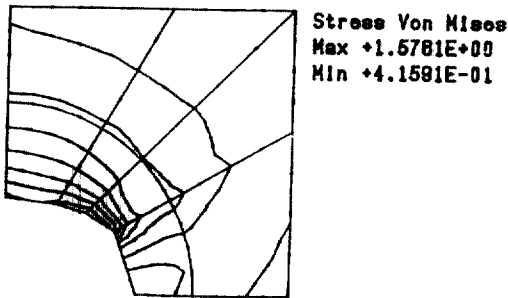


Fig. 10. Stress contour of optimized structure for a plate problem

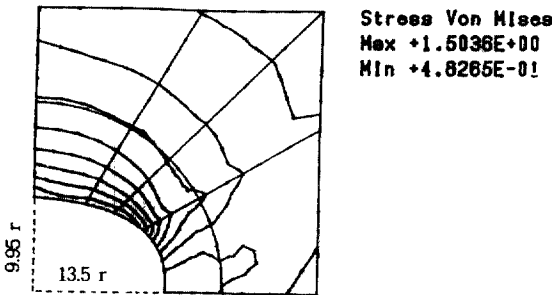


Fig. 11. Stress contour of reanalyzed structure for a plate problem

본 문제의 경우 Fig. 8과 같이 5개의 설계변수(V1, V2, V3, V4, V5)를 사용하였으며, 설계변수는 원공의 중심을 기준으로 한 반경방향(radial direction)의 절점이동으로 정의하였다. 초기모델의 체는설계는 Fig. 8과 같이 8개의 계층적 평면응력요소로 분할하였다. Fig. 9는 초기모델의 von Mises 응력분포상태를 나타내고 있으며, Fig. 10은 최적화가 완료된 후의 응력상태를, Fig. 11은 Fig. 10을 Bezier 곡선을 사용하여 평활화한 후의 재해석한 결과를 나타내고

Table 3. Summary of results for plate with circular hole

Iteration	Optimized Results		Reanalyzed Results	
	Volume	$\sigma_{max}/\sigma_{min}$	Volume	$\sigma_{max}/\sigma_{min}$
Initial Model	2464.39	2.80	2464.39	2.80
1	2438.63	2.09	2437.90	2.06
2	2422.73	2.01	2419.68	2.03
3	2411.43	2.01	2406.72	1.94
4	2360.41	1.95	2354.80	1.85

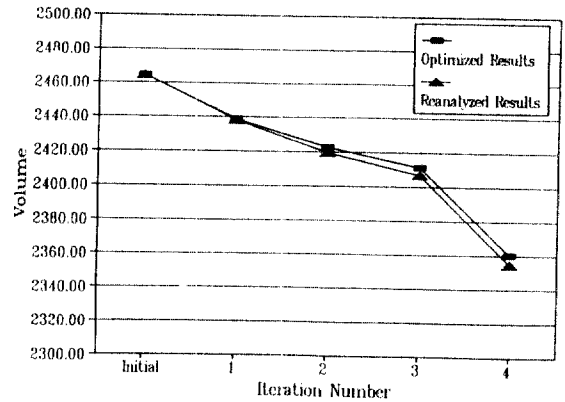


Fig. 12. Volume change with respect to number of iterations

있다. 초기 모델에서 von Mises 최대응력은 2.008 N/mm²이었지만 재해석한 후의 von Mises응력은 1.504 N/mm²으로 약 25%의 감소를 보이고 있다. 또한 초기모델의 반경은 10 mm인데 반하여 재해석한 후의 모델에서는 장반경 13.5 mm, 단반경 9.95 mm로 변화되고 있음을 볼 수 있다. Table 3은 p=6 차로 초기모델을 갖고 구조해석을 하였을 때 응력비가 2.80이었으나 반복회수가 4회가 됨에 따라 최적설계단면에서는 1.95, Bezier 곡선으로 평활화한 단면으로는 1.85로 각각 30%와 35%의 응력비 감소를 보여 주고 있다. Fig. 12는 목적함수인 원공을 갖는 정사각형평판의 체적이 4회 반복됨에 따라 2464.39 mm²에서 2354.80 mm²으로 감소하고 있음을 보여주고 있다. Fig. 13은 각 반복과정에 따른 설계변수의 민감도를 보여주며 $\partial\sigma/\partial X_i$ 로 정의된다. 이를 보면 초기모델에서 von Mises응력이 가장 작은 절점인 설계변수 V1을 6.25에서 15로 변화시킬 때 von

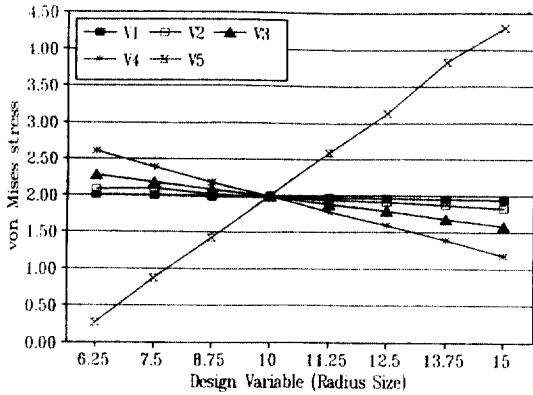


Fig. 13. Design sensitivity analysis for plates with a circular hole

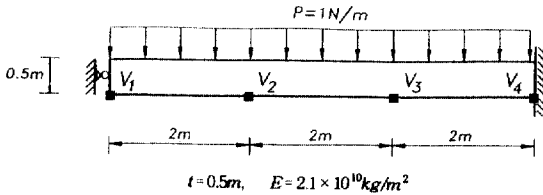


Fig. 14. P-version half model for fixed-fixed beam

Mises응력의 변화량은 거의 없는 상태가 되므로 민감도가 0에 접근하는 반면 초기모델상태에서 von Mises응력이 가장 높은 절점인 설계변수 V5를 앞에서와 동일하게 변화시키면 von Mises 응력은 0.25에서 4.25가 급격한 증가를 보이게 되므로 민감도가 매우 크다고 말할 수 있다.

6.3 양단 고정 정보 문제

양단고정보(fixed-fixed beam)는 부정정 구조물로서 Fig. 14와 같이 보의 중앙을 기준으로 대칭이므로 1/2만 모델링 하였다. 하중조건과 단면제원은 Fig. 14에 표시한 바와 같다. 여기에서는 형상함수의 차수를 6차로 고정하고, 각 반복과정에 따른 구조물의 체적을 목적함수로 정의하여 이를 최소화하고자 하였다. 양단 고정 정보의 형상최적화를 정식화하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \text{Minimize} && V(X_i) \\ & \text{Subject to} && 356 \leq \sigma_{v,m}(X_i) \leq 404 \end{aligned} \quad (21)$$

한편, 초기모델을 3개요소로 분할하여 구조해석한 결과 고정단에서 517.8 N/m² 정도의 최대 von Mises

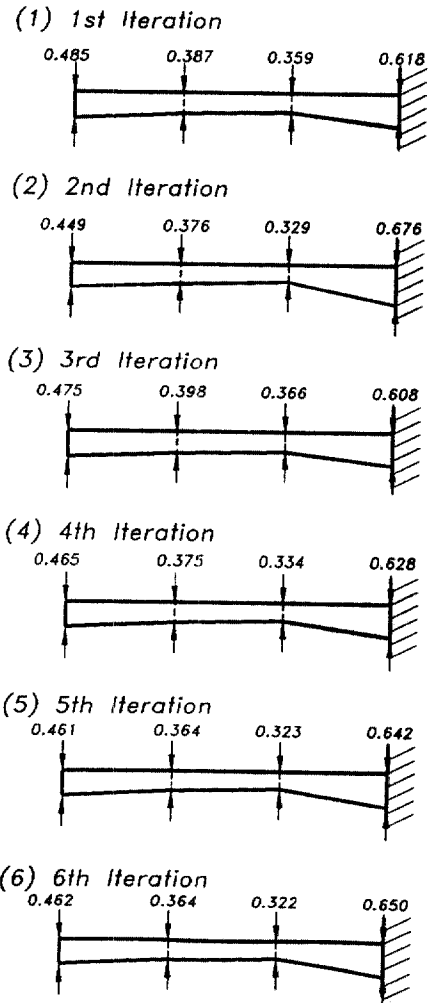


Fig. 15. Design history with respect to number of iterations

응력이 발생된다. 본 연구에서는 허용응력을 식 (21)과 같이 설정하여 제약조건을 정의하였다.

반복횟수에 따른 설계변수의 변화는 Fig. 15에 Y좌표값으로 변환시켜 나타내고 있다. 초기의 반복과정은 각 절점좌표가 상당히 큰 진폭을 보이다가, 반복횟수가 증가함에 따라 일정한 설계변수값에 수렴되어감을 알 수 있다. 또한 초기모델에서 응력집중이 심한 고정단에서 단면의 높이는 0.5 m에서 0.65 m로 약 30%가 증가하고 있음을 볼 수 있다. Fig. 16과 Fig. 17은 반복횟수에 따른 최적결과(optimized result)와 이를 Bezier 곡선을 사용하여 얻은 결과(reanalyzed result)를 나타내고 있다. 두 결과 모두

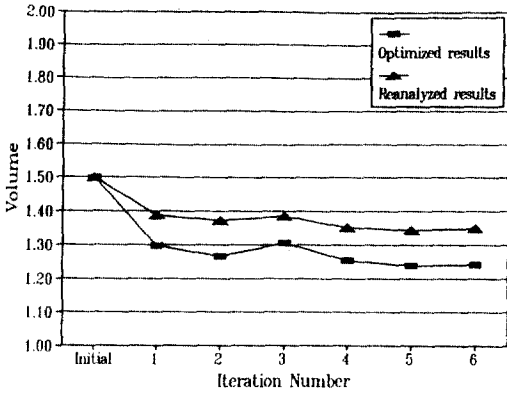


Fig. 16. Volume change with respect to number of iterations

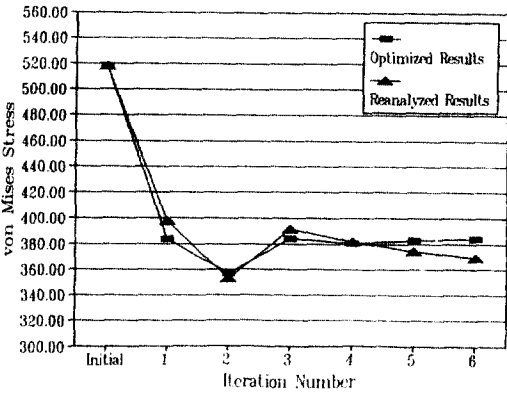


Fig. 17. von Mises stress with respect to number of iterations

반복회수가 증가함에 따라 체적과 von Mises 응력은 초기모델과 비교하여 감소됨을 알 수 있는데 Bezier 곡선을 갖고 평활화된 단면을 갖고 재해석한 결과를 살펴보면 초기모델의 체적이 3.0 m^3 에서 2.69 m^3 로 약 10% 감소시킬 수 있었으며, 특히 초기모델에서의 von Mises 응력은 517.8 N/m^2 에서 368.5 N/m^2 으로 약 30%를 감소시킬 수 있었다. 한편, Bezier 곡선으로 처리한 후의 결과와 최적설계의 결과를 비교하여 보면, 반복회수가 증가함에 따라 Bezier 곡선의 결과는 von Mises 응력은 감소되어 응력완화 효과가 증대되는 반면 체적은 다소 늘어남을 알 수 있었다. 이는 최적단면을 평활화시키는 과정에서 약간의 체적 증가가 있었던 것으로 생각된다.

7. 결 론

본 연구에서는 p-version 유한요소법을 이용하여 응력집중이 발생하는 구조물의 응력집중을 완화시키기 위한 형상최적화를 수행하였다. p-version 유한요소는 2차원 계층적 평면응력요소를 사용하였으며, 최적화방법은 제약조건을 갖는 경우의 최적화 문제에 적합한 경사투사법을 사용하였다. 목적함수는 von Mises 응력 또는 구조물의 전체 체적으로 정의하였다. 설계변수는 절점좌표의 이동으로 정의하였으며, 설계민감도 해석을 통하여 설계변수의 변화를 유도하였다. 최적화가 완료된 모델은 Bezier 곡선을 이용하여 평활화함으로써 응력집중을 더욱 완화시키는 보다 나은 구조물의 형상을 얻을 수 있었다. 본 연구의 구조해석 및 최적화를 위해 범용 p-version 유한요소법 프로그램인 RASNA를 이용하였다.

본 연구를 통하여 p-version 유한요소법에 의한 구조물의 형상 최적화는 종래의 h-version 유한요소법에 의한 형상 최적화 방법과 비교하여 다음과 같은 장점이 있음을 알 수 있었다. 응력집중이 발생하는 필렛(fillet), 원공판문제 등의 형상최적화를 수행하기 위해서 h-version 유한요소법에는 요소재분할(remeshing)이 중요한 문제로 된다. 즉, 초기모델을 갖고 요소분할한 초기 체눈설계가 최적화단계마다 변화되는 외부경계영역에 따라 새롭게 체눈설계를 해야만 일정한 수준의 정확도를 유지할 수 있게 된다. 그러나, p-version 유한요소법에 의한 최적화 방법은 $p=3$ 차 이상이 되면 각 반복단계에서 발생할 수 있는 요소의 형상비 변화나 왜곡도에 대하여 유한요소 해가 거의 영향을 받지 않기 때문에 매 단계마다 요소를 재분할해야 하는 번거로움과 시간적 손실을 줄일 수 있었다. 또한 구조물의 형상 최적화과정에서 필연적으로 수반되는 모서리 부분의 응력특이성의 표현을 Legendre 다항식에 근거한 p-version 유한요소법을 사용함으로써 비교적 정확하게 묘사할 수 있었으며, 특히 p의 차수의 증가에 따라 해가 수렴되는 것을 볼 수 있었다. 마지막으로 형상최적화가 완료된 모델을 Bezier 곡선을 사용하여 평활화한 모델을 재해석할 때 외부 경계영역은 곡선경계를 갖기 때문에 적절한 사상기법이 필요하게 되는데, 본 연구에서는 초유한사상(transfinite mapping)을 사용함으로써 체적의 큰 증감이 없이 응력집중을 완화시킬 수 있었다. 본 연구의 수치예제인

원공판문제의 경우 목적함수로 정의한 체적은 초기 모델에서 형상최적화가 완료된 최종모델로 됨에 따라 체적은 2464.4 mm³에서 최적화가 완료된 모델의 체적은 2360.4 mm³이고, 이를 Bezier 곡선을 사용하여 재해석한 후의 체적은 2354.8 mm³로 체적의 변화는 크지 않음에 비하여 von Mises 응력비는 초기모델의 경우 2.80에서 최적화결과는 1.95로 대략 30% 정도의 응력완화 효과를 보이고 있으며, 반면에 Bezier 곡선으로 평활화한 모델의 경우는 1.84로 초기모델에 비해 약 35% 정도 감소시킬 수 있었다. 그러므로 초기모델에서 반경 10 mm이었던 원공은 형상최적화가 완료됨에 따라 타원형의 형상을 갖게 되며 아울러 장반경이 13.5 mm, 단반경이 9.95 mm 이 됨을 알 수 있었다. 또한, 모서리점에서 심한 응력특이를 보이고 있는 필렛문제의 경우 von Mises 등가응력의 최대 및 최소의 비로 정의되는 응력비는 초기모델에서 최적화단면이 됨에 따라 2.04에서 1.46 으로 약 28% 정도의 응력완화효과를 보이고 있음을 알 수 있다. 마지막 예제로 채택한 양단고정보의 경우 응력집중이 발생하는 고정단에서의 보의 두께는 초기모델의 경우 0.5 m에서 0.65 m로 30% 정도의 두께증가가 발생됨을 알 수 있었다. 반면에 보의 중앙단면은 초기모델의 경우 0.5 m에서 형상최적화가 완료된 후의 단면은 0.46 m로 8%의 단면감소가 발생된다.

이상과 같이 수치예제를 통해 볼 때 본 연구에서 제안하는 p-version 최적화모델은 기존의 h-version 유한요소법을 사용한 최적화 모델에 비해 구조물의 형상최적화에 효과적인 모델이라 결론지을 수 있다.

참고문헌

1. Maxwell, J.C., *Scientific Paper*, Vol. 2, 175-177, 1869.
2. Shanley, F., *Weight-Strength Analysis of Aircraft*

Structure, Dover, New York, 1960.

3. Cox, H., *The Design of Structure of Least Weight*, Pergamon, Oxford, 1965.
4. Taylor, J., "Optimal Design of Structural System: an Energy Formulation", *AIAA J*, Vol. 7, 1969, pp. 1404-1406.
5. Venkayya, V., "Design of Optimum Structure", *Computers and Structures*, No. 1/2, 1971, pp. 265-309.
6. Livesley, R.K., "The Automatic Design of Structure Frames", *Quart. J. Mech. Appl. Math*, 9, Part 3, 1956.
7. Pearson, C., "Structural Design by High-Speed Computing Machines", *Proc. of ASCE*, 1958.
8. Schmit, L., "Structural Design by Systematic Synthesis", *Proc. of ASCE*, 1960.
9. Robinson, J., "A Single Element Test", *CMAME*, Vol. 7, No. 2, 1976, pp. 191-200.
10. Woo, K.S., "Robustness of Hierarchical Elements Formulated by Integrals of Legendre Polynomials", *Computers and Structures*, Vol. 49, No. 3, 1993, pp. 421-426.
11. MECHANICA, Applied Structure, Rasana Cooperation, 1992.
12. Zienkiewicz, O.C., and Kelly, D.W., "The Hierarchical Concept in Finite Element Analysis", *Computers and Structures*, Vol. 16, No. 1-4, 1983, pp. 53-65.
13. 우광성, "초유한 보간법에 의한 P-version 유한요소해석", *한국전산구조공학*, Vol. 5, No. 1, 1992, pp. 75-82.
14. Woo, K.S., and Basu, P.K., "Analysis of Singular Cylindrical Shells by p-Version of F.E.M", *Int. J. of Solids and structures*, Vol. 25, No. 2, 1989, pp. 151-165.
15. Izadpanah, K., "Shape Optimal Design Using High-order Elements", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 71, 1988, pp. 99-116.

(接受: 1994. 1. 29)