

論文94-31B-11-11

변형 Karhunen-Loeve 변환의 수리형태학적 의미와 칼라 영상처리에의 응용

(Morphological Interpretation of Modified Karhunen-Loeve Transformation and Its Applications to Color Image Processing)

魚 鎮 愚 *

(Jin Woo Eo)

要 約

대상물체와 배경으로 이루어진 다변수 신호를 분리시키기 위한 변환 기법의 하나로 두 샘플 공분산 행렬의 정규화 후 동시 대각화를 이용한 변형된 Karhunen-Loeve 변환 기법이 제안되었다. 두 클래스간의 샘플 공분산비를 최대화함으로써 국소적 데이터 구조를 분리하는 이 변환 기법은 수리형태학적 연산자를 비롯한 인접화소 연산자를 사용하는 다변수 영상처리 알고리즘들의 전처리 변환으로 유망한 기법이라는 것을 보였다. 제안된 기법이 가지는 분리성은 수리형태학적 패턴 스펙트럼에 근거하여 제안된 measure인 '평균높이'의 개념과 관련시켜 해석하였다. 그리고 변환 기법에 대한 실용적인 구현 알고리즘과 이론적인 결과를 모의실험을 통하여 확인하였다.

Abstract

A modified Karhunen-Loeve transformation technique using normalization and simultaneous diagonalization of two sample covariance matrices is proposed to separate the object from the background. The transformation technique for the separation of local data structure through maximizing the ratio of sample variances between two classes was identified as a promising one for a preprocessing of multi-variate signal processing algorithms using neighborhood operators including morphological filtering. To relate the separation quality of the proposed technique to a morphological measure, average height was defined by using morphological pattern spectrum. A practical implementation of the transformation technique was tested experimentally and the theoretical results were confirmed.

1. 서 론

* 正會員, 檀國大學校 電子工學科
(Dept. of Elec. Eng., Dankook Univ.)
接受日字 : 1994年 2月 8日

어떤 칼라 좌표계를 사용할 것인가 하는 문제는 칼라 영상처리 알고리즘에서 가장 먼저 대두되는 문제

일 뿐만 아니라 전체 알고리즘의 성능을 좌우하는 중요한 문제이다. 일반적으로 칼라 영상처리 시스템의 입력영상은 적(R), 녹(G), 청(B) 3원색의 성분으로 표현되는 벡터로 구성된 RGB-좌표계로 주어진다. 이 입력영상은 선형 또는 비선형 변환기법에 의하여 다른 좌표계로 변환되어 처리된다. 기존의 칼라 좌표계는 XYZ, UVW, YIQ 등과 같이 주어진 영상과는 독립으로 정해진 변환행렬에 의하여 구해지는 좌표계와, Karhunen-Loeve (K-L) 변환에 의하여 구해지는 K-L 좌표계처럼 주어진 영상의 통계적 특성에 의해서 변환행렬이 결정되는 좌표계로 구분할 수 있다.^[1] K-L 변환은 좌표 성분들 간의 무상관성을 제공하며 주성분의 분산이 가능한 선형 변환들 중 최대가 되도록 하여 식별력을 증대시키는 변환으로 이용되었다. 이러한 성질들을 대상물체와 배경으로 이루어진 다변수 데이터를 최적으로 분리시키는 소위 두 클래스 문제에 적용하기 위하여 몇 가지의 변형 K-L 변환이 [3], [4], [5] 에서 제안되었고, [7]에서는 이들과 그 확장 이론들을 하나의 통합된 틀인 두 대칭행렬을 정규화 후 동시 대각화 (normalization and simultaneous diagonalization : 이하 NAD로 표기함) 하는 변환행렬을 구하는 일반 고유치 문제로 정리하고 있다. 여기서 사용된 두 대칭행렬이 어떻게 구성되는가에 따라서 각 변환들의 특성이 결정된다. 기존의 변환들은 각 클래스에 대한 공분산 행렬과 각 성분의 평균에 관한 정보를 조합하여 구성된 두 대칭행렬로부터 변환행렬을 구하기 때문에 공분산 행렬에 의한 식별력과 평균 벡터에 의한 식별력을 동시에 감안하는 변환이다. 따라서 이러한 변환들은 두 클래스의 평균 벡터간의 거리가 중요한 분리 measure의 하나인 패턴인식을 위한 특징추출용 변환으로는 최적이라고 할 수 있으나 주어진 영상이 대상물체와 배경의 두 클래스로 이루어져 있을 때 대상물체영역의 세부 정보는 최대한 향상시키고 배경영역의 세부 정보는 가능한 한 약화시켜 대상물체를 추출하는 영상처리용 변환으로는 최적이라고 할 수 없다.

이와 같은 영상처리용 변환을 위하여 평균 벡터에 의한 식별력은 고려하지 않고 두 클래스간의 분산비를 최대로 하는 변환을 제안한다. 이러한 성질을 가진 영상면은 각 클래스의 공분산 행렬을 정규화 후 동시 대각화 (normalization and simultaneous diagonalization of covariance matrices: 이하 NAD-CVM 으로 표기함)하는 변환행렬을 이용하여 주어진 입력 칼라영상을 변환함으로써 구할 수 있다. 이 변환 방법 역시 기존의 변형 K-L 변환들과 마찬가지로 두개의 행렬을 NAD 기법으로 변환하는 일반

고유치 문제의 하나이다. NAD-CVM을 이용한 변환은 다른 변형 K-L 변환과는 달리 평균 벡터에 의한 분리가 고려되지 않는다는 점에서 패턴인식을 위한 변환으로는 K-L 변환의 한 변형으로서 충분한 평가를 받지 못하였으나 두 개의 클래스로 이루어진 칼라 영상처리를 위한 좌표변환 기법으로 다음과 같은 성질들이 유용하게 이용될 수 있을 것이다.

- (1) NAD-CVM에 의하여 구한 고유치들은 변환된 좌표계의 각 좌표 평면에서의 샘플 분산에 해당되어 분산비의 극대화를 통한 두 클래스의 식별력을 최대화시킬 수 있다는 관점과 직접적으로 부합한다.
- (2) 정규화된 두 개의 공분산 행렬은 고유벡터를 공유하며 모든 고유벡터에 대하여 각각에 대응하는 두 공분산 행렬의 고유치들은 0 과 1 사이의 값을 가지고 합은 1 이다. 이 성질을 이용하여 두 클래스간의 샘플 분산비가 최대로 되는 변환 벡터를 구할 수 있다.
- (3) 두 클래스 중 하나의 샘플 공분산 행렬을 사전에 알고 있으면 주어진 입력 영상으로부터 변환행렬을 구할 수 있는 알고리즘이 존재한다.

NAD-CVM 변환 기법의 기본 개념은 두 클래스간의 샘플 분산비의 극대화를 통해서 대상물체와 배경을 최대한 분리시켜 영상처리 또는 분석에 이용하고자 하는 것인데 실제로 이들이 어떻게 관련되는지를 설명할 수 있는 해석적인 접근이 필요하다. 일반적으로 분산이 영상처리 또는 분석에서 직접 이용되는 경우는 흔하지 않으나 화소값들이 국부적으로 얼마나 많이 변화하는가를 나타내 주는 특징으로 사용되기도 한다.^[8] 국부적으로 화소값들의 변화가 많으면 분산도 커지기 때문이다. [6]에서 그레이톤 영상의 크기-모양 복잡도를 측정하기 위하여 수리형태학적 패턴 스펙트럼에 근거하여 정의된 평균크기와 평균기침기가 화소값의 국부적 변화를 나타내는 하나의 measure로서 이용되었다. 본 논문에서는 수리형태학적 패턴 스펙트럼으로부터 정의되는 '평균높이'의 개념을 제안하여 분산을 대체한 일차 절대 중심 모멘트를 평균높이와 각 패턴의 크기로 표현하여 NAD-CVM변환을 수리형태학으로 해석하는 이론적 근거를 마련하였다. 이에 따르면 NAD-CVM 변환에 의하여 증가 (또는 감소)된 분산의 크기가 평균높이의 증가 (또는 감소)에 기인하는 것으로 해석되며 이러한 해석의 부수적인 효과로 NAD-CVM 변환 기법으로 구한 대상물체 대 배경의 샘플 분산비가 최대인 영상면에 대하여 수리형태학적 opening과 closing 연산의 선택적 필터링 특성의 효용성이 극대화될 수 있다는

것을 보였다. 평균높이의 개념을 이용하여 선정한 적절한 structuring element를 사용하여 수리형태학적 필터링을 수행함으로써 대상물체영역의 정보는 보존하면서 관심 밖의 배경영역의 정보를 보다 많이 제거할 수 있기 때문이다.

II. 변형 Karhunen-Loeve 변환

1. Karhunen-Loeve 변환

본 논문에서 사용하는 용어 Karhunen-Loeve 변환은 이산 Karhunen-Loeve 변환^[6]에 근거한 것으로 관측치의 랜덤성을 배제한 주성분 매핑방법(principal component mapping method)^[7]으로서 다음과 같이 간략히 요약될 수 있다.

$x(i) \in R^p$ 를 p차 관측 벡터라 하고 관측수를 n이라 하면 $i=1, 2, \dots, n$ 이다. 여기서 관측에 관한 랜덤성은 고려하지 않으며 샘플 평균 벡터와 샘플 공분산 행렬을 다음과 같이 정의한다:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x(i) \quad \text{: 샘플 평균 벡터} \quad (1)$$

$$K = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x(i) - \bar{x})(x(i) - \bar{x})^T \quad \text{: 샘플 공분산 행렬} \quad (2)$$

행렬 K가 nonnegative definite이고 대칭이므로 정규화된 고유벡터 행렬 Φ 를 이용하여 다음 식과 같이 대각화할 수 있다.

$$\Phi^T K \Phi = \Lambda = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p\} \quad (3)$$

여기서 $\Phi = [\Phi_1 | \Phi_2 | \dots | \Phi_p]$ 이며 행렬 K의 고유치 i에 대응하는 고유벡터 Φ_i 로 이루어진 행렬이고, $\Phi^T \Phi = I$ 로 정규화되어 있다. 고유치 λ_i 는 값이 큰 것부터 내림순으로 다음과 같이 지수를 부여하여 정리할 수 있다: $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_p \geq 0$. 이렇게 하여 구해진 정규화 벡터 Φ_k 를 이용한 선형 변환 $\Phi_k^T x(i)$, $i=1, 2, \dots, n$; $k=1, 2, \dots, p$ 를 k번째 주성분, 변환 벡터 Φ_k 는 k번째 주축이라고 부르며 Φ_1 을 이용한 첫번째 주성분의 샘플 분산은 가능한 선형 변환들 중 최대가 된다. 일반적으로 정규화된 변환벡터 Φ_k 는 벡터 $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_{k-1}$ 에 직교하는 벡터들 중에서 선형변환 $\Phi_k^T x(i)$, $i=1, 2, \dots, n$; $k=2, 3, \dots, p$ 의 샘플 분산을 최대로 하는 벡터이다. 또한 식(3)의 행렬 $\Phi^T K \Phi$ 는 관측 벡터의 변환 $y(i) = \Phi^T x(i)$ 에 대한 샘플 공분산 행렬이 된다는 것을 쉽게 알 수 있다. 이와 같이 (샘플) 공분산 행렬의 대각화를 위한 고유벡터를 새로운 좌표계로 이용하여 변환하는 과정을 이산 K-L 변환 또는 주성분 매핑법이라 부른다.

2. 변형 K-L 변환: 두 공분산 행렬의 동시 대각화를 이용한 변환 (NAD-CVM)

1) NAD-CVM의 배경

앞절 1에서 고찰한 변환 방법은 정사영 축 (projection axes)이 주어진 데이터 집합의 전체 공분산 행렬로부터 계산되므로 전체 주성분 매핑 (total principal component mapping)이라고 불리기도 한다. 이 전체 주성분 매핑은 데이터의 fitting에는 최적의 방법이나 패턴 클래스를 분리하기 위한 특징 추출용으로는 최적의 방법은 아니다. 따라서 [7], [10], [11]에서 조사된 바와 같이 수많은 분리 기법이 제시되었다. 그 중 Fukunaga 와 Koontz^[4]는 두개의 패턴 클래스를 분리시키는 중요한 특징을 추출하기 위하여 두 자기상관 행렬 (autocorrelation matrices)에 대하여 정규화 과정을 거친 후 대각화 (NAD-CRM)하는 일반 고유치 문제를 적용하여 구한 고유벡터가 한 클래스는 '가장 잘 (best)' 나타내 주나 다른 한 클래스는 '가장 잘못 (poorest)' 나타내 주는 변환 벡터임을 제안하였다. 여기서 무엇을 가장 잘 나타내고 또 무엇을 가장 잘못 표현하는가 하는 문제는 어떤 행렬들에 대하여 일반 고유치 문제를 적용하는가에 따라서 달라진다. Fukunaga 등은 식(4)에서 정의된 것과 같은 각 클래스의 샘플 자기상관 행렬을 이용하였으므로 각 클래스의 샘플 평균과 샘플 분산 모두가 가지는 식별력이 최적화된 특징을 지닌 성분을 추출할 수 있었다.

$$R_j = \frac{1}{n_j - 1} \sum_{i=1}^{n_j-1} x^{(j)}(i)x^{(j)}(i)^T = k_j + \overline{x^{(j)}x^{(j)T}} \quad (j=1,2) \quad (4)$$

여기서 R_j , K_j , $x^{(j)}$, $\overline{x^{(j)}x^{(j)T}}$ 및 n_j 는 각각 클래스 j의 샘플 자기상관 행렬, 샘플 공분산 행렬, 샘플 벡터, 샘플 평균 및 샘플 수를 나타낸다. 그러나 샘플 자기상관 행렬을 이용한 변환은 각 클래스간의 샘플 평균 벡터에 의한 식별력을 추가함으로써 샘플 분산간의 식별력을 약화시킨다. 따라서 NAD-CRM을 이용한 변환 기법은 변환 벡터가 샘플 분산을 극대화시키는 '주축'이 아니라는 의미에서 최적이라고 할 수 없으므로 본 논문에서는 변환 벡터가 주축으로 이루어진 NAD-CVM을 이용한 변환 기법을 제안하였다.

2) NAD-CVM 기법의 유도

행렬 S_1 과 S_2 를 식(5)와 같이 클래스1과 2의 각종 샘플 공분산 행렬이라고 하자:

$$R_j = \frac{1}{n_j - 1} \sum_{i=1}^{n_j-1} x^{(j)}(i)x^{(j)}(i)^T = k_j + \overline{x^{(j)}x^{(j)T}} \quad (j=1,2) \quad (5)$$

여기서 K_i 는 $p \times p$ 인 클래스 i의 샘플 공분산 행렬이고,

ω_k 는 K_1 에 대한 가중치이며 $\omega_k \geq 0$, $\omega_1 + \omega_2 = 1$ 이다. 두 클래스를 혼합한 전체 샘플 공분산 행렬 S_0 를 다음과 같이 정의하자:

$$S_0 = S_1 + S_2 \tag{6}$$

샘플 공분산 행렬은 정의에 의하여 대칭행렬이며 nonnegative definite이다. 더욱이 고유치 영인 경우는 변환 후 샘플 분산이 영인 성분이 존재하는 것을 의미하므로 이러한 성분을 제외시키면 일반적으로 샘플 공분산 행렬이 positive definite라고 가정할 수 있다. 따라서 S_0 가 positive definite로 되므로, 변환 행렬 C 에 의하여 행렬 S_0 와 S_1 은 다음 식(7)과 같이 동시에 대각화될 수 있다:

$$CS_0C^T = I; CS_1C^T = \Lambda_1 \tag{7}$$

여기서 행렬 I 와 Λ_1 은 각각 단위 행렬과 대각 행렬을 나타낸다. 또한 행렬 S_2 도 같은 변환 행렬 C 에 의하여 대각화된다. 즉,

$$CS_2C^T = \Lambda_2 \tag{8}$$

식(6), (7) 및 (8)로부터,

$$\Lambda_1 + \Lambda_2 = I \tag{9}$$

임을 알 수 있다.

여기서 식(7)과 (8)을 만족시키는 변환 행렬 C 는 다음과 같은 과정을 거쳐 구할 수 있다: S_0 가 positive definite이기 때문에 다음 식(10)을 만족하는 행렬 P 가 존재한다.

$$PS_0P^T = I \tag{10}$$

두개의 행렬 Q_1 과 Q_2 를 다음과 같이 정의하자:

$$Q_1 = PS_1P^T; Q_2 = PS_2P^T \tag{11}$$

식(10)과 (11)로부터 $Q_1 + Q_2 = I$ 이고 행렬 Q_1 의 고유치와 고유벡터는 다음과 같이 주어진다:

$$Q_1 \phi_j^{(1)} = \lambda_j^{(1)} \phi_j^{(1)} \quad (j = 1, 2, \dots, p) \tag{12}$$

여기서 상첨자 (1)은 클래스1을 나타낸다. 식(12)를

만족하는 p 개의 고유치는 다음과 같이 내림순으로 지정할 수 있다:

$$\lambda_1^{(1)} \geq \lambda_2^{(1)} \geq \dots \geq \lambda_p^{(1)} > 0 \tag{13}$$

클래스2에 대한 고유치와 고유벡터는 식(14)와 같은 관계를 가진다.

$$Q_2 \phi_j^{(2)} = (I - Q_1) \phi_j^{(2)} = \lambda_j^{(2)} \phi_j^{(2)} \tag{14}$$

이 식의 두 번째 등호로부터 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$Q_1 \phi_j^{(2)} = (1 - \lambda_j^{(2)}) \phi_j^{(2)} \tag{15}$$

식(12)와 (15)는 같은 행렬 Q_1 에 대한 고유치와 고유벡터의 정의식 이므로 다음 식(16)과 (17)을 유도할 수 있다.

$$\phi_j^{(2)} = \phi_j^{(1)}, \quad j = 1, 2, \dots, p \tag{16}$$

$$\lambda_j^{(1)} = 1 - \lambda_j^{(2)}, \quad j = 1, 2, \dots, p \tag{17}$$

식(16)과 (17)은 클래스1에서 가장 큰 고유치에 대응하는 고유벡터는 클래스2에서는 가장 작은 고유치에 대응하는 고유벡터에 해당한다는 것을 보여 주고 있다. 수식으로 표현하면

$$\text{클래스1에 대하여 } 1 > \lambda_1^{(1)} \geq \lambda_2^{(1)} \geq \dots \geq \lambda_p^{(1)} > 0 \text{ 이고 (18)}$$

클래스2에 대하여는

$$1 > \lambda_p^{(2)} = 1 - \lambda_p^{(1)} \geq \lambda_{p-1}^{(2)} = 1 - \lambda_{p-1}^{(1)} \geq \dots \geq \lambda_1^{(2)} = 1 - \lambda_1^{(1)} > 0 \tag{19}$$

이다.

$p \times p$ 행렬 Φ 를 고유벡터 ϕ_j 로 이루어진 행렬 (즉, $\Phi = [\phi_1 | \phi_2 | \dots | \phi_p]$)이라 하면 구하고자 하는 변환 행렬 C 는 다음 식(20)으로 주어지고 이 행렬은 식(7), (8), (9)를 만족하게 된다.

$$C = \Phi^T P \tag{20}$$

3) NAD-CVM 기법의 유용한 성질

(1) 고유치와 샘플 분산의 관계

식(20)에서 정의된 행렬 C 를 이용한 다음과 같은 변환에 대하여 고려해 보자:

$$y^{(j)}(i) = Cx^{(j)}(i) \quad j = 1, 2; \quad i = 1, 2, \dots, n_1 \quad (\text{클래스1})$$

$$\text{또는} \quad i = 1, 2, \dots, n_2 \quad (\text{클래스2}) \tag{21}$$

여기서 벡터 x 와 y 는 $px \times 1$ 이다. 행렬 C 는 p 개의 벡터로 이루어져 있다. 즉, $C=[c_1|c_2|\dots|c_p]^T$. 클래스1에 대한 벡터 y 를 $y^{(j)}=[y_1^{(j)}y_2^{(j)}\dots y_p^{(j)}]^T$ 로 놓으면 클래스 j 의 k 번째 성분 $y_k^{(j)}$ 의 샘플 분산은 식(2), (5), (7)을 이용하여 다음 식과 같이 표현된다.

$$\frac{1}{n_j - 1} \sum_{i=1}^{n_j} (y_k^{(j)}(i) - \bar{y}_k(j))^2 = \frac{1}{\omega_j} \lambda_k^{(j)} \quad j=1,2 \quad (22)$$

여기서 가중치 ω_j 는 $\omega_j = N_j / (N_1 + N_2)$ 로 결정되는 수이다. 따라서 변환된 벡터성분의 샘플분산은 가중치에 따라서 변한다고 할 수 있으나 $\omega_1 = \omega_2 = 0.5$ 인 경우에 k 번째 성분에 대한 클래스1과 클래스2의 샘플 분산비는 $\lambda_k^{(1)} / \lambda_k^{(2)} = \lambda_k^{(1)} / (1 - \lambda_k^{(1)})$ 이 됨을 알 수 있으며 식(18)에 의하면 $\lambda_k^{(1)}$ 이 가장 큰 고유치이므로 $\lambda_k^{(1)} / (1 - \lambda_k^{(1)})$ 이 모든 $k=1,2,\dots,p$ 에 대하여 최대가 됨을 알 수 있다. 즉, 두 클래스의 샘플 분산비가 최대로 되는 변환은 변환 벡터 c_1 을 이용하여 구할 수 있으며 이런 의미에서 NAD-CVM 변환 기법은 클래스1에 대하여는 'best'이고 클래스2에 대하여는 'poorest'인 성분을 제공하는 변환 기법이다. 위와 같은 특수한 경우 ($\omega_1 = \omega_2 = 0.5$)에 대한 전개는 다음의 보조정리 1 및 2에 의하여 정당화될 수 있다.

(2) 실용화 알고리즘

일반적으로 식(5)에 사용된 K_1 과 ω_1 가 사전에 주어지는 경우는 매우 드물다. 여기서 ω_1 가 사전에 주어지야 한다는 조건을 배제하고도 NAD-CVM에 의한 변환 행렬을 구할 수 있는 알고리즘을 제시한다.

보조정리 1

두 행렬 K_1 과 K_2 가 대칭 행렬이고 positive definite이면 식(20)의 변환 행렬 $\Phi^T P$ 는 1과 ω_2 의 값에 무관하다. 단, $\omega_1 > 0, \omega_2 > 0, \omega_1 + \omega_2 = 1$.

(증명: 부록 참조)

보조정리 2

K_2 가 주어지고 K_0 (전체 영상의 샘플 공분산 행렬)은 계산 가능하다고 가정하면 식(20)의 변환 행렬 $\Phi^T P$ 에서 행렬 P 는 다음 식(23)으로부터 구할 수 있고 행렬 Φ 는 식(24)로부터 구할 수 있다.

$$PK_0P^T = I \quad (23)$$

$$\Phi^T PK_2 P^T \Phi = \Lambda \quad (24)$$

단, $\Phi^T \Phi = I$ 이고 Λ 는 주대각선 요소들이 행렬 PK_2P^T 의 고유치로 이루어진 대각 행렬이다.

(증명: 부록 참조)

보조정리 1은 각 클래스의 샘플 공분산 행렬 K_1 과

K_2 가 주어지면 가중치 ω_1 과 ω_2 를 계산하거나 추정할 필요가 없다는 것을 보여준다. 또한 보조정리 2는 주어진 영상에서 배경의 샘플 공분산 행렬을 사전에 알고 있으면 대상물체와 배경의 분산비를 최대로 하는 변환 행렬을 구할 수 있다는 것을 보여 준다. 더구나 배경은 변하지 않고 대상물체만 바뀌는 상황은 영상 처리 및 분석 분야에서 흔히 접할 수 있는 상황이므로 이 보조정리의 효용성은 크다고 할 수 있다. 본 논문에서 실험한 목재의 결합 검출 예에서도 볼 수 있듯이 배경에 해당하는 나뭇결은 변하지 않고 대상물체인 결합은 여러 가지 형태로 나타난다. 나뭇결의 샘플 공분산 행렬을 알고 있으면 어떤 형태의 결합을 포함하고 있는 칼라 목재 영상에 대해서도 나뭇결과 결합을 최대한 분리시키는 NAD-CVM 알고리즘이 존재한다는 것을 의미한다.

III. NAD-CVM 기법의 수리형태학적 의미

제안된 NAD-CVM을 이용한 변환 기법은 대상물체와 배경의 샘플 분산비의 극대화를 통한 두 클래스의 분리에 기초를 두고 있다. 이 변환이 어떻게 영상 처리 및 분석에 관련되는지를 해석적으로 설명하기 위하여 수리형태학적 패턴 스펙트럼^[6]의 개념을 도입한다. 수리형태학적 패턴 스펙트럼은 패턴 밀도함수라는 이름으로 [12]에서도 소개된 바 있으며 주어진 영상이 일정한 패턴의 모양과 크기를 담은 국부적인 영역을 얼마나 많이 함유하고 있는가를 측정하는 measure로서 평균크기, 평균거칠기 등을 구하는 데 이용되었다. 본 논문에서는 패턴 스펙트럼을 이용한 새로운 measure로서 여러 가지 크기의 패턴에 대한 평균높이를 정의하고 이를 이용하여 샘플 분산을 대체하는 일차 절대 중심 모멘트 (first absolute central moment of observation)에 대한 해석적인 표현을 구할 수 있다는 것을 보인다. 일차 절대 중심 모멘트는 다음 식(25)와 같이 정의된다.

$$\mu_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |y_j(i) - \bar{y}_j| \quad (25)$$

여기서 $y_j(i)$ 는 벡터 $y(i)$ 의 j 번째 성분이고, 샘플 수는 n , 그리고 \bar{y}_j 는 j 번째 성분의 샘플 평균을 나타낸다. 수식을 간략화 하기 위하여 앞으로는 하첨자 j 를 생략한다. 일반적으로 일차 절대 중심 모멘트는 샘플 분산과는 달리 관측데이터의 분산도 (dispersion)을 나타내는 measure로는 잘 사용되지는 않는다. l_2 -norm 벡터공간에서 잘 개발된 이론을 이용하여 접근하기 쉽다는 이점을 가진 샘플 분산이 주로

사용되기 때문이다. 그러나 다음과 같은 이유로 샘플 분산 (σ^2)을 일차 절대 중심 모멘트 (μ)로 대체한다:

- (1) 샘플 분산 σ^2 에 대응하는 수리형태학적 measure를 구하는 것은 매우 어렵다.
- (2) 그러나 수리형태학적 패턴 스펙트럼을 이용하여 정의한 수리형태학적 measure로는 μ 를 표현할 수 있다.
- (3) 각 성분의 샘플분산 크기의 순서가 일차 절대 중심 모멘트에서도 변하지 않는다. 즉, 모든 $i, j=1, 2, \dots, p$ 에 대하여 $\sigma_i < \sigma_j$ 이면 $\mu_i < \mu_j$ 이다. 따라서 두 성분간의 분산비의 관계가 일차 절대 중심 모멘트에서도 그대로 유지된다.

이제 μ 에 대응하는 수리형태학적으로 등가인 표현을 구하기로 한다. 다음에 계속해서 나타나는 수리형태학적 연산자와 그 정의는 [12]를 따랐으며 본 논문에서는 자세한 소개는 피하기로 한다. 다음 식과 같이 유계 정의역 (bounded support) D 를 가지는 함수 f 에 대하여 고려해 보자:

$$f: D \subset Z^2 \rightarrow R \tag{26}$$

Structuring element S_λ 를 다음과 같이 convex 집합 S 를 $(\lambda-1)$ 번 dilation하여 얻어진 집합으로 정의한다:

$$S_\lambda = S \oplus S \oplus \dots \oplus S (\lambda=1, 2, \dots) \tag{27}$$

함수 $f^* : D \subset Z^2 \rightarrow R$ 을 $f^*(x) = |f(x) - m|$ 으로 정의한다. 여기서 m 은 $f(x)$ 의 샘플 평균으로서 $m = (1/M(D)) \sum_{x \in D} f$ 로 표현될 수 있으며 $M(D)$ 는 집합 D 에 포함된 요소들의 수를 나타낸다. 함수 f^* 에 대한 수리형태학적 패턴 분포함수 $r(\lambda)$ 와 패턴 밀도 함수 $p(\lambda)$ 를 다음과 같이 정의하자:

$$r(\lambda) = Mes(f^* \circ S_\lambda) \tag{28}$$

$$p(\lambda) = r(\lambda) - r(\lambda-1), p(0) = 0, p(1) = r(1) \tag{29}$$

여기서 \circ 는 opening 연산을 나타내며 $\bar{y}_i = \sum_{x \in D} f(x)$ Mes를 나타낸다. 양의 정수 N 을 다음 식을 만족하는 λ 중 가장 작은 값이라고 하자.

$$Mes(f^* \circ S_\lambda) = Mes(f^* \circ S_{\lambda+1}) = \epsilon \tag{30}$$

여기서 하나의 새로운 수리형태학적 measure $h(\lambda)$ 를 제안한다:

$$h(\lambda) = \sum_{i=\lambda}^N \frac{p(i)}{M(S_i)}, \lambda=1, 2, \dots, N. \tag{31}$$

$h(\lambda)$ 를 이용하여 함수 f 의 일차 절대 중심 모멘트는 다음과 같이 표현된다: (식(32)의 유도는 부록 참조)

$$\mu = \frac{1}{M(D)} \left(\sum_{\lambda=1}^N (h(\lambda)(M(S_\lambda) - M(S_{\lambda-1})) + \epsilon) \right) \tag{32}$$

식(32)는 일차 절대 중심 모멘트를 수리형태학적 measure인 $h(\lambda)$ 를 이용하여 표현한 식이다. 이 식의 중심부에 해당하는 $\sum h(\lambda)(M(S_\lambda) - M(S_{\lambda-1}))$ 을 그림1과 같이 실린더를 쌓아 놓은 형상의 부피로 해석할 수 있다. 그림1에서 실린더 하나의 높이인 $h(\lambda) - h(\lambda+1)$ 은 식(31)로부터 $p(\lambda)/M(S_\lambda)$ 로 표현할 수 있으며 식(28)과 (29)를 이 식에 대입하면 다음의 관계식을 구할 수 있다.

$$h(\lambda) - h(\lambda+1) = [Mes(f^* \circ S_{\lambda-1}) - Mes(f^* \circ S_\lambda)] / M(S_\lambda) \tag{33}$$

수리형태학적 opening의 비확장성 (anti-extensivity)으로부터 다음의 부등식이 성립한다.

$$f^* \geq (f^* \circ S) \geq \dots \geq (f^* \circ S_{\lambda-1}) \geq (f^* \circ S) \geq \dots \geq (f^* \circ S_N) \tag{34}$$

f^* 가 모든 structuring element의 성분을 포함하고 있다면 $(f^* \circ S)$ 는 f^* 에서 S 보다 작은 영역에서 변화하는 부분이 제거된 것을 의미한다. 같은 방법으로 $(f^* \circ S_\lambda)$ 도 설명될 수 있으며 $(f^* \circ S_{\lambda-1}) - (f^* \circ S_\lambda)$ 는 f^* 에서 $S_{\lambda-1}$ 에 의한 opening으로는 변하지 않으나 S_λ 에 의한 opening으로는 변하는 부분을 의미하며 주어진 영상이 포함하고 있는 $S_{\lambda-1}$ 의 성분과 S_λ 의 성분의 차로 해석할 수 있다. 식(33)에서 $h(\lambda) - h(\lambda+1)$ 에 $M(S_\lambda)$ 를 곱하면 $[Mes(f^* \circ S_{\lambda-1}) - Mes(f^* \circ S_\lambda)]$ 가 되는데 $(h(\lambda) - h(\lambda+1))M(S_\lambda)$ 는 그림1에서 S_λ 를 밑면으로 하고 높이가 $h(\lambda) - h(\lambda+1)$ 인 실린더 하나를 의미하며 $[Mes(f^* \circ S_{\lambda-1}) - Mes(f^* \circ S_\lambda)]$ 는 $(f^* \circ S_{\lambda-1}) - (f^* \circ S_\lambda)$ 의 graph와 정의역 D 에 의하여 둘러싸인 형상의 부피이다. 따라서 $(f^* \circ S_{\lambda-1}) - (f^* \circ S_\lambda)$ 를 주어진 structuring element S_λ 와 평균높이 $h(\lambda) - h(\lambda+1)$ 로 특징지은 것이 되며 이러한 해석과 식(33)의 양변을 비교하여 $h(\lambda)$ 는 structuring element S 에 대한 $(f^* \circ S_\lambda)$ 의 평균높이라고 할 수 있다. 여기서 높이라는 용어는 부피가 밑면적에 의하여 나누어진 형태의 수식으로부터 부여된 명칭이다. 주어진 λ 에 대한 $h(\lambda)$ 의 값은 structuring element S_λ 내에서 변화하는 불연속점의 활동에 의하여 결정

된다. 즉, jump가 큰 불연속점이 많을수록 평균높이는 커지게 된다.

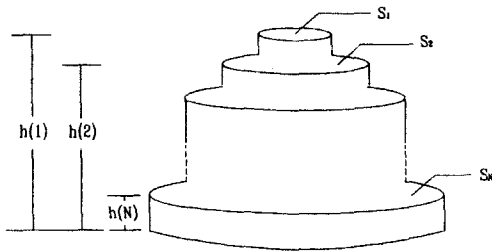


그림 1. 평균 높이 개념의 기하학적 해석
Fig. 1. Geometric interpretation of average height.

이 결과를 이용하여 2장에서 제안한 NAD-CVM 변환 기법에 대하여 고려해 보자. 우선 우리는 원 좌표계에서의 불연속점 위치는 변환된 좌표계에서 적어도 하나 이상의 좌표축에 유지된다는 것을 알고 있다. 반면에 변환에 의하여 증가 (또는 감소)된 샘플 분산은 변환을 통하여 불연속점에서의 jump량을 증대 (또는 감축) 시켰거나 불연속점을 창출 (또는 제거) 시켰기 때문이다. 이것은 주어진 structuring element S_λ 에 대한 $p(\lambda)$ 의 증가 (또는 감소)와 대응되는 의미이며, 위에서 소개한 평균높이의 증가 (또는 감소)로 해석될 수 있다. 샘플 분산과 평균높이 간의 이러한 관계는 수리형태학적 알고리즘에서 적절한 structuring element를 선택하는데 사용될 수 있다. 적절한 structuring element를 선택함으로써 배경영역의 의미 없는 세부정보는 제거시키고 대상물 체영역의 불연속점은 강조할 수 있으며 이에 대한 실험적 고찰은 다음 장에서 다룬다.

IV. 실험 및 고찰

1. NAD-CVM 변환과 평균높이의 관계에 관한 실험

앞 장에서 제안한 개념을 실험적으로 증명하기 위하여 RGB 칼라 영상을 사용하였다. 그림2는 R, G, B 성분으로 표현된 원영상의 한 수평 단면에서의 데이터를 보여준다. 그림3은 그림2에서 x축 영역 [40, 110]을 대상물체로 하고 나머지를 배경영역으로 지정했을 때의 NAD-CVM 변환 결과를 보여준다. 그림3에서 NAD-CVM-1은 대상물체의 샘플 분산이 가장 크고 배경의 샘플 분산이 가장 작게 되는 좌표축의 성분이고 NAD-CVM-2는 그 반대 경우이다. 그림4와 5는 $(f^* \circ S_{\lambda_1}) - (f^* \circ S_{\lambda_2})$ 의 평균높이인 $p(\lambda)$

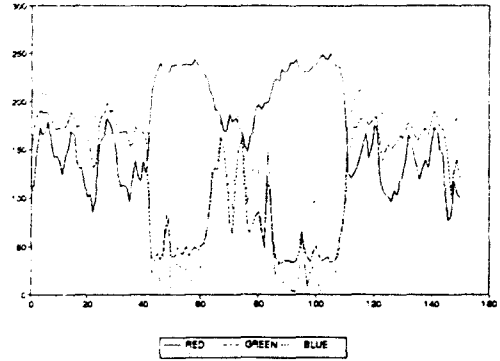


그림 2. RGB 칼라 영상의 한 단면에서 채취한 원 데이터
Fig. 2. Original Data from a section of RGB color image.

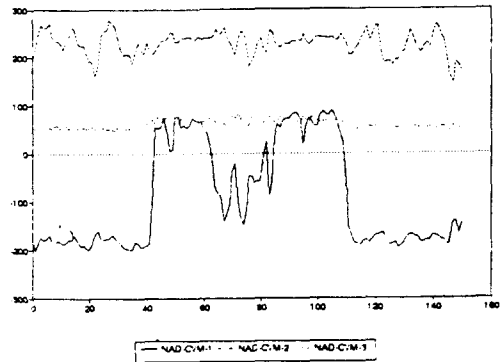


그림 3. 원데이터에 대한 NAD-CVM 변환의 결과
Fig. 3. Results of NAD-CVM transformation of original data.

$/M(S_\lambda)$ 를 λ 에 대하여 그린 것이다. 그림4는 그림2의 데이터에 대한 결과이고 그림5는 그림3의 데이터에 대한 결과이다. 그림4와 5에서 structuring element의 크기가 커질수록 평균높이가 점점 줄어들고 어느 크기 이상이 되면 나타나지 않게 되는 것을 볼 수 있다. 여기서 우리는 structuring element의 크기가 커짐에 따라 일정한 크기 이상의 평균높이를 유지하다가 갑자기 아주 작은 높이로 줄어드는 지점에 대하여 주목하고자 한다. 이때 작은 높이로 줄어들기 직전의 structuring element의 크기를 λ^* 라고 표시한다. 그림4를 보면 R, G, B 성분 모두에 대하여 대상물체에 대한 $\lambda^*(\hat{s}_1^*)$ 가 배경의 (\hat{s}_2^*) 보다 크다는 것을 알 수 있다. 반면에 그림5를 보면 NAD-CVM 변환의 개념으로부터 예측된 바와 같이, 첫 번째 좌표성분 (NAD-CVM-1)에 대해서는 λ_1^* 가

λ_2^* 보다 크고, 두 번째 좌표 성분(NAD-CVM-2)에 대해서는 λ_2^* 가 λ_1^* 보다 크다는 것을 볼 수 있다. 따라서 첫 번째 좌표 성분에 대하여 $\lambda=2$ 인 structuring element ($=S_2$)를 사용하여 opening을 취하면 opening의 fitting 성질에 의하여 S_2 보다 작은 영역내에서의 크기 (amplitude) 변화는 모두 제거되고 크기 변화의 범위가 S_2 보다 큰 불연속점은 보존되므로 위의 실험 결과와 같이 배경영역의 세부 정보는 거의 제거되고 대상물체의 세부 정보는 보존된다. 또한 두 번째 좌표성분에 대해서는 반대의 개념이 적용된다. 더구나 이 실험 결과에서 보듯이 앞에 있는 몇 개의 structuring element들이 전체 평균높이의 분포를 지배하고 있다. 따라서 이 몇 개의 structuring element에 대해서만 평균높이의 분포를 계산하면 되므로 여기서 제안한 structuring element를 선택하는 알고리즘의 실용성을 제고시킬 수 있다.

2. 칼라 목재 영상의 결함 검출을 위한 실험
실험에 원영상으로 사용된 칼라 영상들은 그림6과

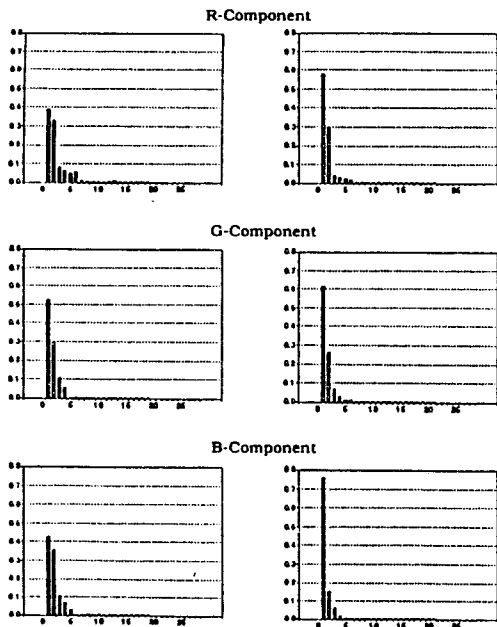


그림 4. 원 R, G, B 데이터에 대한 $p(\lambda)/M(S_\lambda)$ 대 λ 의 그래프
(좌측 세 그림은 대상물체영역에 적용한 결과이고 우측 세 그림은 배경영역에 적용한 결과임)
Fig. 4. Plots of $p(\lambda)/M(S_\lambda)$ vs. λ for the original R, G, B data.

같이 결함을 포함하고 있는 두 목재판으로 참고문헌 [13]을 칼라 스캐너로 스캐닝하여 획득한 것이다:

- (1) 스파이크 용이 (spike knot)를 포함하는 목재판 (Wood 1)
- (2) 청색 얼룩 (blue stain)을 포함하는 목재판 (Wood 2)

Wood 2에서 목재판의 가운데 부분에 좌우로 뻗어진 띠 모양의 약간 진한 부분이 청색 얼룩에 해당하는 부분이다. 그림에서 보인 것처럼 나뭇결과 거의 비슷한 그레이톤 광강도를 가지고, texture 또한 나뭇결과 같으므로 그레이톤 영상처리 기법으로는 검출이 거의 불가능한 결함으로 알려진 것이다. 이 영상들에 대하여 여러 가지 변환 기법을 비교함으로써 2장과 3장의 제안과 기법들이 타당하다는 것을 보이기 위하여 설계된 실험이다. 이 실험의 성능 평가 측정은 RGB 좌표계로 주어진 칼라 원영상에 대하여 NAD-CVM, NAD-CRM 및 K-L 변환을 하고 각각에 대하여 수리형태학적 에지 검출 알고리즘을 적용한 결과의 이치 에지영상을 육안으로 비교하는 것

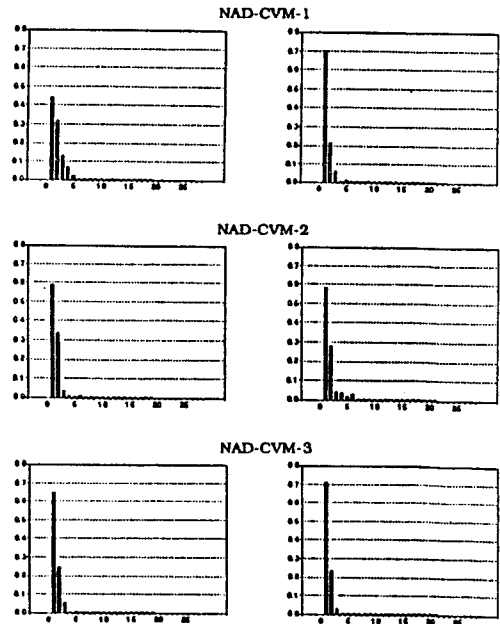


그림 5. NAD-CVM 변환에 의한 좌표성분에 대한 $p(\lambda)/M(S_\lambda)$ 대 λ 의 그래프
(좌측 세 그림은 대상물체영역에 적용한 결과이고 우측 세 그림은 배경영역에 적용한 결과임)
Fig. 5. Plots of $p(\lambda)/M(S_\lambda)$ vs. λ for the components transformed by NAD-CVM method.

으로 한다. 이러한 실험은 각 R,G,B 성분 및 그레이톤 영상에 대해서도 수행되었다. 에지 검출 결과 이치 영상의 대상물체영역에 상세부분이 많을수록 그리고 배경영역의 상세는 많이 억제되었을수록 좋은 성능을 가진 알고리즘으로 평가한다. 이 실험에 사용된 수리형태학적 에지 검출 알고리즘은 open-closing으로 평활화 (rolling ball 알고리즘^[14])한 영상에 대하여 그 영상과 그 영상을 작은 원반형 structuring element로 erosion한 영상의 차를 에지 세기로 정의하는 간단한 알고리즘으로서 이 알고리즘 자체의 평가는 여기서 하지 않기로 한다. 왜냐하면 똑 같은 알고리즘이 위의 각 변환들에 대하여 적용되었기 때문이다. 또한 NAD-CVM 및 NAD-CRM 변환을 위하여 결합 부분을 대상물체, 나뭇결을 배경으로 설정하여 동일 목재에 대하여는 거의 일

정한 값을 가지는 나뭇결의 샘플 공분산 행렬을 결합이 없는 목재판으로부터 추정하여 보조정리 2를 이용하여 대상물체에 'best'인 변환 벡터를 구하였다.

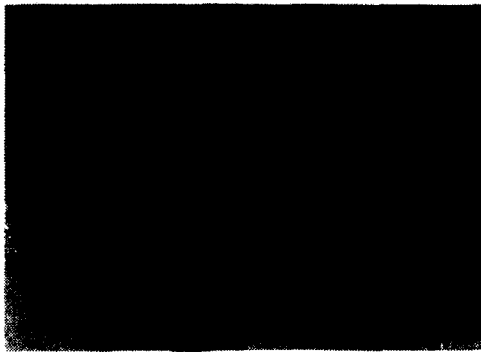
그림7은 Wood 1, 그림8은 Wood 2에 대하여 여러 가지 좌표성분에 관한 실험 결과 이치 영상을 보여준다. 각 그림에서 (a)는 R,G,B 중에서 가장 좋은 결과를 보여 주는 영상면에 대한 실험 결과이고, (b)와 (c)는 각각 NAD-CVM 및 NAD-CRM에 의하여 변환된 영상면 중에서 대상물체에 best인 영상면에 대한 실험 결과이며, (d)는 K-L 변환된 영상면 중에서 첫 번째 주축에 해당하는 영상면에 대한 실험 결과이며, (e)는 그레이톤 영상에 대한 실험 결과이다.

그림7에서 보인 것처럼 Wood 1에 대해서는 각 성분이 나름대로 의미있는 결과를 제공하고 있으나 대상물체영역의 상세 보존 능력과 배경영역의 에지 제거 능력에 초점을 맞추어 보면 그림7(b)와 (c)에서 보인 바와 같이 NAD-CVM과 NAD-CRM 변환 기법이 다른 방법들 보다 우수한 결과를 보여주고 있음을 알 수 있다. Wood 1의 경우 NAD-CVM과 NAD-CRM은 거의 비슷한 결과를 보여주고 있는데 이것은 원영상 자체에 대상물체와 배경간의 평균 벡터에 의한 식별력이 상당량 존재하므로 NAD-CRM 변환이 평균 벡터에 의한 식별력을 증대시키기 위한 역할은 억제되고 분산에 의한 식별력을 극대화시키는 역할만 존재하여 NAD-CVM과 비슷한 작용을 하였기 때문이다. 표1은 Wood 1과 Wood 2에 대한 변환 벡터를 NAD-CVM 및 NAD-CRM 각각에 대하여 나타낸 것이다. Wood 1인 경우 거의 비슷한 변환 벡터를 보여주고 있다는 사실이 위에서 언급한 두 변환 기법에 의한 결과의 유사성을 뒷받침한다.

표 1. NAD-CVM 및 NAD-CRM 변환 벡터
Table 1. Transformation Vector of NAD-CVM and NAD-CRM.

	Wood 1	Wood 2
NAD-CVM	$[0.045 \ -0.066 \ 0.021]^T$	$[0.029 \ -0.155 \ 0.088]^T$
NAD-CRM	$[0.040 \ -0.058 \ 0.018]^T$	$[0.125 \ -0.183 \ 0.050]^T$

그림8은 청색 얼룩을 포함하고 있는 Wood 1에 대한 결과인데 그림8(b)에서 보인 것처럼 NAD-CVM 변환을 이용한 결과만 배경영역을 억제하면서 대상물체인 청색 얼룩을 나타내는 때 모양의 연결된 에지를 보여주고 있다. 그림8의 (a), (c), (d), (e)에서 보인 것처럼 NAD-CRM을 포함하여 다른 어떠한 변환에 의한 성분도 좋은 결과를 보여주지 못한다. 이 경우



(a)



(b)

그림 6. 원영상: (a)스파이크 옹이를 포함하는 목재판. (b)청색 얼룩을 포함하는 목재판
Fig. 6. Original images: (a)wood with a spike knot. (b)wood with blue stain.

대상물체와 배경의 평균 벡터가 비슷한 값을 가지므로 NAD-CRM이 분산비의 증대뿐만 아니라 평균 벡터에 의한 식별력을 증대시키기 위한 작용을 동시에 한

반면에 NAD-CVM은 평균 벡터에 의한 식별력은 무시하고 분산비의 극대화에만 작용하였다. 표1에서 보는 바와 같이 두 변환 기법은 상당히 다른 변환 벡터

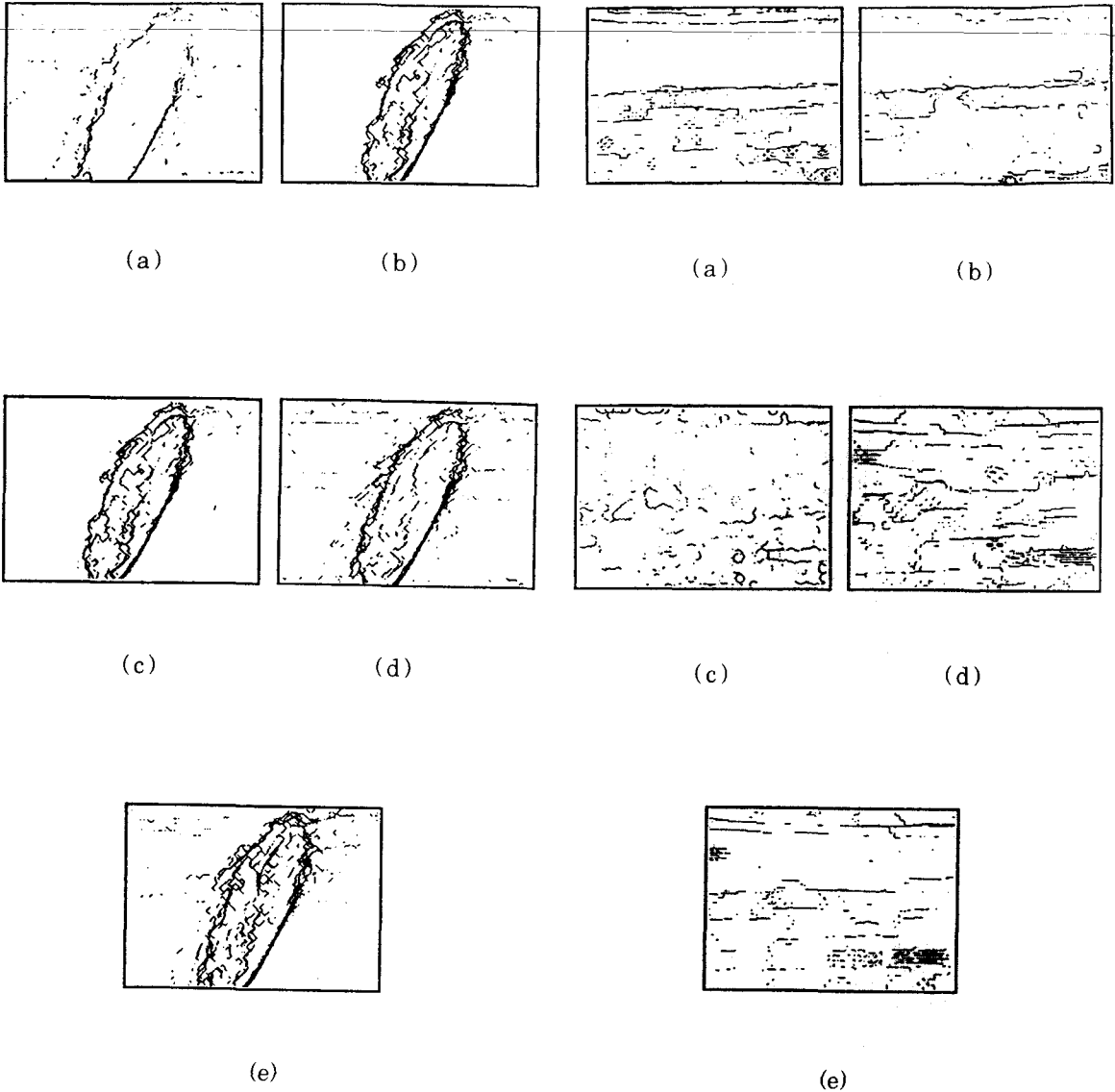


그림 7. Wood 1의 각 좌표 성분에 대한 결과:
 (a)blue-성분, (b)NAD-CVM,
 (c)NAD-CRM, (d)K-L, (e)그레이톤
 Fig. 7. Results of processing Wood 1 for the components: (a)blue, (b)NAD-CVM, (c)NAD-CRM, (d)K-L, (e)graytone.

그림 8. Wood 2의 각 좌표 성분에 대한 결과:
 (a)red-성분, (b)NAD-CVM, (c)NAD-CRM,
 (d)K-L, (e)그레이톤
 Fig. 8. Results of processing Wood 2 for the components: (a)red, (b)NAD-CVM, (c)NAD-CRM, (d)K-L, (e)graytone.

를 제공하며 이 경우처럼 두 클래스간의 샘플 평균 벡터가 비슷하면 NAD-CRM기법이 영상 처리에 사용될 수 없음을 보여준다. 청색 얼룩 검출의 경우 NAD-CVM 변환 기법 또한 완벽한 검출을 제공하였다고 할 수 없으나 이 문제를 해결하기 위하여 가장 근접된 방법으로 제시될 수 있을 것이다.

V. 결론

배경과 대상물체의 두 클래스로 이루어진 다변수 신호를 분리시키기 위한 변환 기법의 하나로 두 샘플 공분산 행렬의 정규화 후 동시 대각화 (NAD-CVM)을 이용한 변환 기법이 이산 Karhunen-Loeve 변환의 변형된 형태로 제안되었다. 두 클래스간의 샘플 분산비를 최대화하는 NAD-CVM 변환 기법이 국소적 데이터 구조의 분리를 제공함으로써 수리형태학적 연산자를 비롯한 인접화소 연산자 (neighborhood operators)를 사용하는 영상처리 알고리즘의 전처리 알고리즘으로 유망한 기법이 될 수 있다는 것을 보였다. 이 변환 기법이 가지는 유용한 성질들을 이론적으로 고찰하였으며 실험적으로 증명하였다. 특히 '평균높이'의 개념을 가지는 수리형태학적 measure를 이용하여 NAD-CVM 변환 기법의 특징인 클래스 분리성을 입증하였다.

NAD-CVM 변환 기법은 임의의 두 클래스를 가지는 다변수 신호처리 및 분석 문제에 적용될 수 있기 때문에 기대되는 응용 분야는 수없이 많다고 할 수 있다. 그 한 실험적 예로 불량 목재 검출을 위하여 칼라 영상을 이용하여 수리형태학적 에지 검출 알고리즘으로 모의실험을 하였으며 기대되는 결과를 도출하였다. 특히 그레이톤 영상처리 기법으로는 해결하기 어려운 문제로 알려진 청색 얼룩 검출 문제를 해결하기 위한 접근 방법으로 유망한 기법임을 보였다.

附 錄

보조정리 1의 증명

$K_0 = \omega_1 K_1 + \omega_2 K_2$, $\omega_1, \omega_2 > 0$, $\omega_1 + \omega_2 = 1$ 이라 놓으면 변환 행렬 $C = \Phi^T P$ 를 구하는 문제는 다음과 같은 일반화 고유치 문제를 푸는 것과 같다:

$$(\omega_1 K_1)c_i = \lambda_i K_0 c_i \text{ 또는 } (\omega_2 K_2)c_i = \lambda_i K_0 c_i$$

여기서 벡터 c_i 는 고유치 λ_i 에 대응하는 일반화 고유벡터 (generalized eigenvector)이며, 행렬 C^T 의 i 번째 열에 해당하는 벡터이다. 2.2절에서 위의 두 식에 대한 고유 벡터는 같다는 것을 증명하였으므로 다음과 같은 두개의 일반화 고유치 문제의 고유 벡터

들이 같다는 것을 보이면 된다. 즉, 모든 $i=1, 2, \dots, p-1, \omega_1' > 0$. 그리고 $K_0' = \omega_1' K_1 + (1 - \omega_1') K_2$ 에 대하여 $c_i = c_i'$ 임을 보이면 된다.

K_0 가 positive definite이기 때문에 이 일반화 고유치 문제는 (보통의) 고유치 문제 $(K_0^{-1} \omega_1 K_1)c_i = \lambda c_i$ 와 동일하다. ω_1' 를 $\omega_1' \neq \omega_1$ 이고 $\omega_1' < 1$ 인 임의의 양의 실수라 놓고 $\omega_2' = 1 - \omega_1'$ 라 놓자. 두 행렬 $K_0^{-1} \omega_1 K_1$ 과 $K_0'^{-1} \omega_1' K_1$ 이 같은 고유치를 갖는다는 것을 보이기 위해서 이 두 행렬이 commute함을 보이는 것으로 충분하다.^[12]

즉, $(K_0^{-1} \omega_1 K_1)(K_0'^{-1} \omega_1' K_1) = (K_0'^{-1} \omega_1' K_1)(K_0^{-1} \omega_1 K_1)$ 임을 보이는 것인데 양 변을 비교하면 $K_0^{-1} K_1 K_0'^{-1} = K_0'^{-1} K_1 K_0^{-1}$ 만 보이면 된다는 것을 알 수 있다. K_0 이 positive definite이고 따라서 K_0^{-1} , K_0' , K_1 의 역행렬이 존재하므로 양 변의 역을 취하면 $K_0' K_1^{-1} K_0 = K_0 K_1^{-1} K_0'$ 임을 보이는 것으로 충분하다. K_0 대신 $\omega_1 K_1 + \omega_2 K_2$ 그리고 K_0' 대신 $\omega_1' K_1 + \omega_2' K_2$ 를 대입하면:

$$\begin{aligned} K_0' K_1^{-1} K_0 &= (\omega_1' K_1 + \omega_2' K_2) K_1^{-1} (\omega_1 K_1 + \omega_2 K_2) \\ &= \omega_1' \omega_1 K_1 + \omega_2' \omega_1 K_2 + \omega_1' \omega_2 K_2 + \omega_2' \omega_2 K_2 K_1^{-1} K_2 \end{aligned}$$

이고

$$\begin{aligned} K_0 K_1^{-1} K_0' &= (\omega_1 K_1 + \omega_2 K_2) K_1^{-1} (\omega_1' K_1 + \omega_2' K_2) \\ &= \omega_1 \omega_1' K_1 + \omega_2 \omega_1' K_2 + \omega_1 \omega_2' K_2 + \omega_2 \omega_2' K_2 K_1^{-1} K_2 \end{aligned}$$

이 되어 두 식이 같다. 증명 끝.

보조정리 2의 증명

$S_0 = K_0$ 이므로 식(23)의 행렬 P는 식(10)의 행렬 P와 같다. 또한 행렬 $PK_2 P^T$ 와 $P(\omega_2 K_2)P^T$ 는 같은 정규화 고유벡터 행렬 Φ 를 갖는다. 그러므로 변환 행렬 $\Phi^T P$ 는 식(20)에서 정의한 행렬과 같다. 증명 끝.

식(32)의 유도

식(28)과 (30)으로부터 다음 식을 구할 수 있고:

$$\begin{aligned} r(N) &= Mes(f^* - (f^* \circ S_N)) \\ &= Mes(f^*) - Mes(f^* \circ S_N) \\ &= Mes(f^*) - \epsilon \\ &= \mu \cdot M(D) - \epsilon \end{aligned} \tag{A-1}$$

이 식은 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\mu = \frac{1}{M(D)}(r(N) + \epsilon) \tag{A-2}$$

식(31)을 이용하여 다음과 같은 관계를 유도할 수 있다.

$$\sum_{\lambda=1}^N (h(\lambda)(M(S_{\lambda}) - M(S_{\lambda-1})) = \sum_{\lambda=1}^N p(\lambda) \quad (A-3)$$

식(28)과 (29)로부터 다음 식을 구할 수 있다.

$$\sum_{\lambda=1}^N p(\lambda) = r(N) \quad (A-4)$$

식(A-3)와 (A-4)를 통합하고 이 식을 식(A-2)의 r(N)에 대입하면 식(32)가 유도된다.

參 考 文 獻

[1] W.K.Pratt, *Digital Image Processing*, John Wiley and Sons, 1978.
 [2] Y.Ohta, *Knowledge-based interpretation of outdoor natural color scenes*, Pitman Publishing Inc., 1985.
 [3] D.Foley and J.Sammon, "An optimal set of discriminant vectors," *IEEE Trans. Computers*, Vol. C-24, No.3, pp.281-289, 1975.
 [4] K.Fukunaga and W.L.G.Koontz, "Application of Karhunen-Loeve expansion to feature selection and ordering," *IEEE Trans. Computers*, Vol. C-19, No.4, pp.127-136, 1980.
 [5] J.Kittler and P.Young, "A new approach to feature selection based on Karhunen-Loeve expansion," *Pattern Recognition*, Vol.5, pp.335-352, 1973.
 [6] P.Maragos, "Pattern Spectrum and

Multiscale Shape," *IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol. PAMI-11, pp.701-716, 1989.
 [7] W.Sieddlecki, K.Siedlecka, and J.Sklansky, "An overview of mapping techniques for exploratory pattern analysis," *Pattern Recognition*, Vol. 21, No.5, pp.411-429, 1988.
 [8] A.K.Jain, *Fundamentals of Digital Image Processing*, Prentice-Hall, 1989.
 [9] K.Fukunaga, *Introduction to Statistical Pattern Recognition*, Academic Press, 1972.
 [10] E.Gelsema and R.Eden, "Mapping Algorithms in ISPAHAN," *Pattern Recognition*, Vol. 12, pp.127-136, 1980.
 [11] G.Biswas, A.K.Jain, and R.C.Dubes, "Evaluation of projection algorithms," *IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol. PAMI-3, pp.701-708, 1981.
 [12] J.Serra, *Image Analysis and Mathematical Morphology*, Academic Press, 1982.
 [13] *Select-Finish/Commons-Boards: Vol.2*, Western-Wood Product Association, 1989.
 [14] S.R.Sternberg, "Greyscale Morphology," *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, Vol. 35, pp.335-355, 1986.
 [15] G.Strang, *Linear algebra and its Application (2nd Ed.)*, Academic Press, 1980.

著 者 紹 介



魚 鎮 愚 (正 會 員)

1955年 5月 23日生. 1979年 2月 서울대학교 전기공학과 졸업. 1988年 6月 오레곤 주립대학 전기 및 컴퓨터공학과 졸업(공학석사). 1992年 2月 오레곤 주립대학 전기 및 컴퓨터공학과 졸업(공학박사). 1979年 3月 ~ 1986年 7月 국방과학연구소 연구원. 1992年 8月 ~ 현재 단국대학교 조교수. 주관심 분야는 영상 인식, 영상신호 압축, 비선형 신호/영상 처리 및 시스템 해석 등임.